

# Construção de Códigos Esféricos Usando a Fibrção de Hopf

Henrique Koji Miyamoto \*  
Graduação em Engenharia Elétrica - Unicamp  
miyamotohk@gmail.com

Prof. Henrique Sá Earp e prof.<sup>a</sup> Sueli Costa (Orientadores)  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - Unicamp  
henrique.saearp@ime.unicamp.br e sueli@ime.unicamp.br

**Palavras-chave:** códigos esféricos, fibrção de Hopf, álgebras de divisão.

## Resumo:

Um código esférico  $C(M, n)$  é um conjunto de  $M$  pontos na superfície da esfera unitária  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ . Apresentamos uma nova construção de códigos esféricos, baseada nas propriedades topológicas da fibrção de Hopf e inspirados por uma construção anterior em camadas de toros planares [1][2]. O problema tratado é o do *empacotamento esférico*, na seguinte versão: dada uma distância mínima  $d$ , buscamos o maior número de pontos  $M$  em  $S^{n-1}$  de forma que a distância euclidiana entre dois deles seja no mínimo  $d$ . Uma das principais aplicações desse problema está na transmissão de sinais por canais gaussianos [1].

Para isso, usamos as propriedades da fibrção de Hopf [3]:

$$h : S^{2n-1} \rightarrow S^n \\ (z_0, z_1) \mapsto (2z_0\bar{z}_1, |z_0|^2 - |z_1|^2)$$

em que  $z_0, z_1$  são elementos de uma das álgebras de divisão normadas:  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  ou  $\mathbb{O}$  ( $n = 1, 2, 4, 8$ ). Para a construção em  $\mathbb{R}^4$  ( $n = 2$ ), exploramos a folheação da esfera  $S^3$  por toros  $T^2$  através de uma parametrização natural dada pela fibrção de Hopf:

$$(\eta, \xi_1, \xi_2) \mapsto (e^{i\xi_1} \sin \eta, e^{i\xi_2} \cos \eta)$$

em que  $\eta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  e  $\xi_i \in [0, 2\pi[$ ,  $i = 1, 2$ .

O procedimento de distribuição de pontos ocorre em duas etapas:

1. Variando  $\eta$ , escolhemos toros  $T_\eta \cong S_{\sin \eta}^1 \times S_{\cos \eta}^1$  mutuamente distantes (na métrica euclidiana em  $\mathbb{R}^4$ ) de no mínimo  $d$ . Para isso, usamos o fato de que a distância mínima entre  $T_\eta$  e  $T_{\eta'}$  em  $S^3$  coincide com a distância entre os pontos  $e^{i\eta}$  e  $e^{i\eta'}$  no primeiro quadrante de  $S^1$ .

---

\*Bolsista de Iniciação Científica FAPESP 16/05126-0.

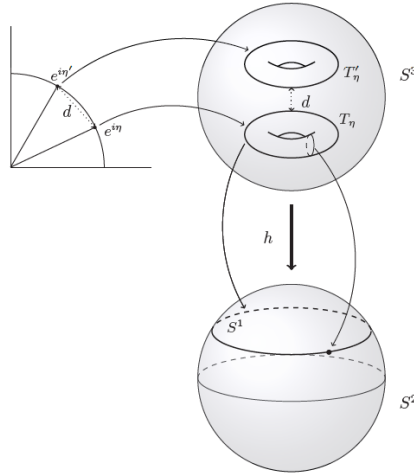


Figura 1: Fibrção de Hopf e distância entre toros.

2. Para cada toro, escolhamos  $n$  círculos internos, cada um com  $m$  pontos equidistantemente distribuídos, de forma que círculos subsequentes tenham uma defasagem de ângulo  $\psi_m = \frac{\pi}{m}$  na distribuição dos pontos.

A distribuição em  $\mathbb{R}^4$ , baseada na fibrção de Hopf  $h : S^3 \rightarrow S^2$ , é usada como caso base para a distribuição nas dimensões  $\mathbb{R}^8$  e  $\mathbb{R}^{16}$ . Nestas, usamos um procedimento iterativo em que a esfera  $S^{2n-1}$  é folheada por variedades  $S_{\sin \eta}^{n-1} \times S_{\cos \eta}^{n-1}$  ( $n = 4, 8$ ). Em cada esfera  $S^{n-1}$ , é feita a distribuição da dimensão anterior, a menos de escala.

Em  $\mathbb{R}^4$ , verificamos que a constução desenvolvida coincide com a de camadas de toros planares (TLSC) e que as duas têm desempenho semelhante e superior ao de outros métodos conhecidos [1][2]. Em  $\mathbb{R}^8$  e  $\mathbb{R}^{16}$ , foi feito um comparativo com a implementação do método TLSC apresentada em [4]. Nosso desempenho é superior para um certo intervalo de  $d$ , notadamente para distâncias muito pequenas. Um aspecto importante é a construtibilidade dos códigos apresentados para uma distância mínima fixada. A etapa atual do trabalho consiste em melhorar o procedimento, de forma a ultrapassar o desempenho comparativo em todas as distâncias avaliadas.

Tabela 1: Códigos esféricos em  $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^8, \mathbb{R}^{16}$  para algumas distâncias mínimas [1][4]

| Dimensão          | $d$ | Hopf                  | TLSC                  |
|-------------------|-----|-----------------------|-----------------------|
| $\mathbb{R}^4$    | 0,4 | 280                   | 308                   |
|                   | 0,2 | 2.656                 | 2.718                 |
|                   | 0,1 | 22.016                | 22.406                |
| $\mathbb{R}^8$    | 0,4 | 8.608                 | 14.336                |
|                   | 0,2 | $2,28 \times 10^6$    | $4,16 \times 10^5$    |
|                   | 0,1 | $3,76 \times 10^8$    | $7,11 \times 10^6$    |
| $\mathbb{R}^{16}$ | 0,4 | $1,25 \times 10^6$    | $1,23 \times 10^7$    |
|                   | 0,2 | $6,95 \times 10^{10}$ | $8,43 \times 10^9$    |
|                   | 0,1 | $4,17 \times 10^{15}$ | $3,14 \times 10^{12}$ |

### Referências:

[1] TOREZZAN, C.; COSTA, S. I. R.; VAISHAMPAYAN, V. Constructive spherical codes on layers of flat tori. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 59, n. 10, p. 6655-6663, out. 2013.

[2] TOREZZAN, C. **Códigos esféricos em toros planares**. 115 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

[3] LYONS, D. W. An elementary introduction to Hopf fibration. **Mathematics Magazine**, v. 76, n. 2, p. 87-98, abr. 2003.

[4] NAVES, L. R. B. **Códigos esféricos em canais grampeados**. 147 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.