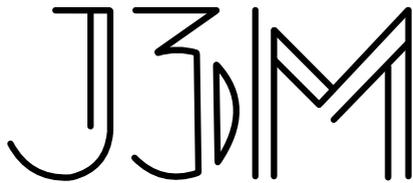


# Caderno de Resumos

J3M 8<sup>a</sup> Edição - 2024



**JORNADA DA MATEMÁTICA,  
MATEMÁTICA APLICADA E  
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

PET - Matemática UFPR

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

**Comissão Organizadora**

Tutor: Prof. Dr. Cleber de Medeira

Estudantes: Ana Carla de Carvalho Honório  
Andressa Balestrin Dasenbrock  
Augusto Henrique da Costa  
Brenda Dal Puppo Monteiro  
Daniel Thiago Ivanchechen  
Elissandro Antonio Sikora  
Felipe Monteiro Kiotheka  
Isabele Andrade Vichinieski  
Kaiky Yuji Ishiy  
Laura Carolina Aymore Ferrandin  
Leonardo Cortez do Nascimento  
Lucas Xavier  
Otavio Augusto Salomão Recacho  
Pedro Dell'Agnolo Busarello  
Pedro Henrique Andrade  
Samuel Adam Trindade de Souza  
Tiago Filipe Pires Galu

Site do Evento: <https://petmatematica.ufpr.br/j3m>

Data do Evento: 11 a 14 de novembro de 2024

Local de Realização: Centro Politécnico da UFPR,

Curitiba, novembro de 2024.

---

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>xi</b>
<b>1 Álgebra</b>	<b>1</b>
Classificação das Álgebras de Jordan de dimensão 3 <i>Ana Cleo Matias Vieira da Motta</i> . . . . .	2
Globalização de Ações Parciais de Semigrupos Inver- sos em Conjuntos <i>Bruno Gerevini Boni</i> . . . . .	5
O Teorema Espectral <i>Emilly Giovana Torquato</i> . . . . .	7
Categorias Modelo e Álgebra Homotópica <i>Fernando Augusto de Lima Filho</i> . . . . .	9
Criptografia RSA: Teoria e Implementação <i>Fernando de Barros Castro</i> . . . . .	12
Representação de álgebras de Lie <i>Gabriela Martins dos Santos</i> . . . . .	14
Aplicação do Teorema de Minkowski na Redução de Formas Quadráticas <i>Gabrieli Kmiecik</i> . . . . .	17
Grupos e Geometria <i>Henrique de Cristo da Fonseca</i> . . . . .	20
Teorema de reconstrução de Tannaka para álgebras de Hopf <i>João Gabriel Chiorato</i> . . . . .	23

Álgebras de Hopf: a biálgebra tensorial em uma coálgebra e a álgebra de Sweedler	
<i>Kaiky Yuji Ishiy</i> . . . . .	25
Álgebras e Superálgebras de Jordan Excepcionais	
<i>Lucas Cabral Port</i> . . . . .	28
Dual finito e Álgebras de Hopf	
<i>Samuel Adam Trindade de Souza</i> . . . . .	31
<b>2 Análise Matemática</b>	<b>33</b>
A desigualdade triangular no espaço $l^p$	
<i>Amanda Carolina Coelho</i> . . . . .	34
Números e Polinômios de Bernoulli: Múltiplas Conexões e Aplicações	
<i>Ana Caroline da Silva</i> . . . . .	36
O fenômeno J. W. Gibbs	
<i>Camilly Silva dos Anjos</i> . . . . .	39
Cálculo Fracionário e Sua aplicação na Modelagem do Decaimento do Césio-137	
<i>Daniel Thiago Ivanchechen</i> . . . . .	41
O espaço métrico discreto	
<i>Eduarda Caroline Klug</i> . . . . .	43
Espaços $L^p$ e Soluções Fracas Para Equações Diferenciais	
<i>Elissandro Antonio Sikora</i> . . . . .	45
O fatorial de $1/2$	
<i>Henrique Cuco</i> . . . . .	48
Uma introdução à Análise de Fourier em $SU(2)$	
<i>Isabele Andrade Vichinieski</i> . . . . .	51
Introdução aos espaços de Lebesgue com expoente variável	
<i>Isac Messias Michelon</i> . . . . .	53
Números Metálicos	
<i>Isadora Benvenuto Langer</i> . . . . .	55

Teorema de Baire, a não enumerabilidade dos reais, e a existência de funções contínuas não deriváveis	
<i>Júlia Pscheidt</i>	57
Introdução à Teoria das Distribuições	
<i>Leonardo Cortez do Nascimento</i>	59
Os irmãos anômalos do conjunto $\mathbb{R}$	
<i>Leonardo Ferreira Bielinski</i>	62
O Teorema de Sharkovsky e suas Consequências	
<i>Lucas Bisoni</i>	65
Funções Contínuas Diferenciáveis em Lugar Nenhum e o Teorema da Categoria de Baire	
<i>Lucas Xavier</i>	68
Uma extensão do $g$ -cálculo para $n$ variáveis	
<i>Matheus Everaldo Krüger Gebelucá</i>	70
Hipoeliticidade Global em Classes de Denjoy-Carleman	
<i>Otávio Augusto Salomão Recacho</i>	73
Sobrejetividade da função cosseno no plano complexo	
<i>Raphael Luciani</i>	75
A Desigualdade Isoperimétrica	
<i>Ruan Pablo Ronson Luqueti</i>	78
<b>3 Análise Numérica</b>	<b>80</b>
Modelagem matemática da hemodinâmica em válvulas aórticas bicúspides	
<i>Fernanda de Oliveira de Jesus</i>	81
Resolvendo EDPs Parametrizadas Não-Lineares com Redes Neurais Informadas pela Física	
<i>Guilherme Furquim</i>	84
Solução Numérica da Equação do Transporte com Velocidade Variável via Redes Neurais	
<i>Guilherme Ozanski</i>	87

Solução Numérica para as Equações de Burgers e Korteweg-De Vries (KdV) por meio de Redes Neurais <i>Larry Steffen Bertocello</i> . . . . .	90
Algoritmo de criptografia com matrizes em Portugol e Javascript <i>Lucas Nakashima</i> . . . . .	93
Operações aritméticas em Posit: um sistema de ponto flutuante com precisão variável <i>Mateus Rebellato Ussui</i> . . . . .	96
<b>4 Educação Matemática</b>	<b>99</b>
Discussões sobre gênero e Matemática no ambiente acadêmico <i>Andressa Balestrin Dasenbrock</i> . . . . .	100
Negociação de sinais e ensino bilíngue: experiências e metodologias na inclusão de alunos surdos em Geometria <i>Andressa Balestrin Dasenbrock</i> <i>Isabele Andrade Vichinieski</i> . . . . .	103
Além das Fronteiras: uma análise sobre a diversidade curricular do curso de Matemática na América Latina <i>Brenda Dal Puppo Monteiro</i> . . . . .	106
A Matemática Acadêmica na formação do/a professor/a de Matemática da Educação Básica <i>Brenda Dal Puppo Monteiro</i> . . . . .	109
Ensino de matemática através do fantom e pensamento computacional para alunos com Altas Habilidades/Superdotação <i>Bárbara Borkowski</i> <i>Matheus Rocha</i> . . . . .	113

Análise de Produção Escrita de Resoluções de Questões de Matemática	
<i>Emanuela Gonçalves Lopes</i>	116
O Ensino de Matemática para Estudantes com Deficiência Intelectual	
<i>Fernanda Pscheidt Uhlig</i>	119
Sudoku e Pensamento Computacional para estudantes com Altas Habilidades/Superdotação	
<i>Fernanda Queiroz da Silva Oliveira</i>	
<i>Julia Tiepo Muller</i>	122
Festival de vídeos de Matemática	
<i>Fernanda Rodrigues</i>	
<i>Maria Paulo</i>	
<i>Renato Machado</i>	
<i>Petterson Pontes</i>	125
O Jogo dos Palitos para o Ensino de Matemática através do Pensamento Computacional para alunos com Altas Habilidades/Superdotação	
<i>Gabriel Bressan Sizenando</i>	
<i>Mayara Gabrielly da Silva</i>	128
O uso de materiais didáticos manipuláveis à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica	
<i>Igor Nascimento Duarte</i>	131
Trajетórias Acadêmicas de estudantes de Matemática	
<i>Isac Messias Michelin</i>	134
Letramento Estatístico: um estudo sobre sua presença na BNCC e em planos de aula	
<i>Laura Carolina Aymoré Ferrandin</i>	136
Perspectiva histórica da Educação Matemática: início de um estudo sobre a pós-graduação em Educação da UFPR	
<i>Matheus Henrique Pawlak Silva</i>	139

Topologia na Educação Básica: o que isso tem a ver com a Formação de Professores? <i>Natalia Chicora</i> . . . . .	142
Criando formas geométricas com couro do peixe: Uma matemática aplicada ao meio ambiente <i>Patricia Alves da Cruz</i> <i>Patrícia Vieira Alves</i> . . . . .	145
Inclusão digital e ensino da matemática no contexto das instituições públicas da educação básica do litoral do Paraná <i>Patricia Alves da Cruz</i> <i>Patrícia Vieira Alves</i> . . . . .	148
Jogos de Matemática na terceira idade: estimulando a memória e o raciocínio <i>Patrícia Alves da Cruz</i> <i>Patrícia Vieira Alves</i> . . . . .	151
Estudo sobre o ESMATE à luz da Hermenêutica de Profundidade <i>Pedro Dell’Agnolo Busarello</i> . . . . .	154
Relato de experiência: dificuldades no processo de ensino-aprendizagem causadas pela simplificação da linguagem matemática <i>Samara Ortiz</i> . . . . .	156
Mapeamento de provas e cadernos de prova no repositório institucional da UFSC <i>Sibeli da Rosa Da Rocha</i> . . . . .	159
Trajetória de Professores e Professoras do Sul Global do DMAT/UFPR: Vozes Latinoamericanas <i>Sibeli da Rosa Da Rocha</i> . . . . .	162
Gincana de Educação Financeira no Ensino Fundamental: situação de ensino organizada para a revisão e a complementação de conteúdos financeiros <i>Wanderson dos Santos Rodrigues</i> . . . . .	165

Educação financeira e as mulheres: uma perspectiva histórica e escolar das relações financeiras e disciplinares no Brasil <i>Wécia Luiza Bhering Konell</i> . . . . .	168
<b>5 Equações Diferenciais</b>	<b>171</b>
Método de Feynman para integrais e aplicações em Geometria Diferencial e Teoria dos Campos <i>André Teixeira Viana</i> . . . . .	172
Estudo do Modelo Dinâmico Regulatório de glicose insulina com o Auxílio de Programas de Álgebra Computacional <i>Cassiano Fuziki</i> . . . . .	174
Teorema de Poincaré-Bendixson e aplicação em Sistemas Dinâmicos <i>Eduardo Teixeira de Oliveira</i> . . . . .	177
Equivalência entre Semigrupos Gradientes e Dinamicamente Gradientes <i>Guilherme Oliveira Cunha</i> . . . . .	180
Uma Introdução ao Caos através da Equação Logística Discreta <i>Lucas Bisoni</i> . . . . .	182
<b>6 Geometria e Topologia</b>	<b>184</b>
Introdução a Teoria de Nós <i>Felipe Monteiro Kiotheka</i> . . . . .	185
Homologias simplicial e singular como invariantes topológicos <i>Gabriel Luiz de Freitas</i> . . . . .	188
Uma relação entre redução de formas binárias e geometria hiperbólica <i>Gabrieli Kmiecik</i> . . . . .	191
Grupos de Lie em relação com as hiperoperações exponenciais <i>Saulo Minatti</i> . . . . .	193

<b>7 Otimização</b>	<b>197</b>
Otimização Livre de Derivadas Aplicado a Compressão de Imagens	
<i>Bianca Mendes Francisco</i> . . . . .	198
Otimização com Restrição de Cardinalidade aplicada a Compressão de Imagens	
<i>Frank Wolff Hannemann</i> . . . . .	201
Redes Neurais MLP e o Algoritmo de Backpropagation na Simulação da Superfície de Uma Esfera	
<i>Halena Kulmann Duarte</i> . . . . .	204
Implementação de Algoritmos Evolucionários Multi-objetivos em Redes Neurais Informadas pela Física	
<i>Lucas Xavier</i> . . . . .	207
<i>Splines</i> para Representação de Características Faciais com Aplicação em Biometria	
<i>Maria Luiza Sampaio Logrado</i> . . . . .	210
Aplicação de Pesquisa Operacional para a Modelagem de um Portfólio de Investimentos	
<i>Pedro Henrique Cardoso</i> . . . . .	213
Resolução de Problemas de Regressão Linear Utilizando Aproximações por Autovalores em Problemas Quadráticos	
<i>Rafaella Gulin dos Santos</i> . . . . .	216
Redes Neurais Fisicamente Guiadas (PINNs) na Aproximação de Soluções para a Equação de Benjamin-Bona-Mahony	
<i>Samuel Kutz Paranhos</i> . . . . .	219
Comparação do Perceptual Hashing e Redes Neurais Convolucionais na Busca Reversa de Imagens	
<i>Sandy Hoffmann</i> . . . . .	222
Otimização de Carteira de Ações: um estudo com base no perfil do cliente	
<i>Tânia Valasky</i> . . . . .	225

<b>8</b>	<b>Projetos</b>	<b>228</b>
	Brancando de Matemático: uma Experiência de Ensino e Aprendizagem	
	<i>Elissandro Antonio Sikora</i>	
	<i>Felipe Monteiro Kiotheka</i> . . . . .	229
	Semana da Matemática	
	<i>Brenda Dal Puppo Monteiro</i>	
	<i>Samuel Adam Trindade de Souza</i> . . . . .	231
	Programa de Iniciação Científica da OBMEP - PICJr	
	<i>Caio Barros Deunig</i>	
	<i>Gabrieli Kmiecik</i> . . . . .	232
	Explorando a Matemática através do GeoGebra: uma iniciativa do Projeto de Extensão Elas vão para CiMa	
	<i>Camila Trevisan</i>	
	<i>Maria Eduarda de Lara</i> . . . . .	234
	POTI/TOPMAT: estratégias dinâmicas para engajar estudantes e garantir sucesso nas olimpíadas de Matemática	
	<i>Carolina de Souza Soares</i>	
	<i>Fernanda de Oliveira de Jesus</i>	
	<i>Leonardo Knelsen</i>	
	<i>Lucas Bisoni</i>	
	<i>Samuel Henrique Gomes Velez Benito</i> . . . . .	236
	Olimpíada Paranaense de Matemática (OPRM): fomentando o interesse pela Matemática no Paraná	
	<i>Fernanda de Oliveira de Jesus</i>	
	<i>Leonardo Knelsen</i>	
	<i>Lucas Bisoni</i> . . . . .	239
	A importância da leitura dos clássicos para o ensino-aprendizagem em Matemática	
	<i>Fernanda Queiroz da Silva Oliveira</i>	
	<i>Fernando Baleira Leão de Oliveira Queiroz</i>	
	<i>Rudson Alexandre Gomes Maia</i> . . . . .	242

Caminhos Olímpicos na Matemática: Compreendendo a turma de Altas Habilidades/Superdotação	
<i>Hiroshi Caled Tashiro Ascorbe</i> . . . . .	245
A aplicação das Cifras de César e Espartana no contexto do Projeto de extensão MatematicATIVA	
<i>Luiza Tomiello Paraizo</i> . . . . .	248
Explorando a Atividade Orientadora de Ensino na Oficina Pedagógica de Matemática: Teoria e Prática em Contexto Educativo	
<i>Rebecca Ranà Moreira Costa</i> . . . . .	251

# Introdução

Prezado(a) leitor(a). É com satisfação que apresentamos o caderno de resumos da 8ª edição da *Jornada de Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática - J3M*. Esse é um evento idealizado, produzido e coordenado pelos estudantes do grupo PET Matemática da UFPR.

A J3M surgiu da necessidade e do desejo de se criar um ambiente propício para a apresentação de trabalhos de Iniciação Científica nas diversas áreas da Matemática. É um evento que tem se consolidado como um importante canal de comunicação entre o grupo PET Matemática, estudantes e professores do Curso de Matemática da UFPR e de outras universidades.

Nesta edição, temos 90 trabalhos inscritos e distribuídos nas áreas de Álgebra, Análise Matemática, Análise Numérica, Educação Matemática, Equações Diferenciais, Geometria, Otimização e Projetos. As bancas especializadas de avaliação são compostas por docentes e estudantes de pós-graduação da UFPR. Como forma de incentivo aos alunos apresentadores, são concedidas distinções aos trabalhos que obtêm as melhores avaliações por parte das bancas.

Gostaria de agradecer a cada um dos integrantes do grupo PET Matemática pela dedicação e cuidado que dispensaram para a realização desta edição da J3M. Também agradeço aos professores e estudantes de pós-graduação pelo excelente trabalho realizado nas bancas de avaliação. Registramos também nosso reconhecimento à Direção do Setor de Ciências Exatas, ao Departamento de Matemática e à Coordenação do Curso de Matemática, pelo apoio recebido em todas as etapas deste evento.

Prof. Dr. Cleber de Medeira  
Tutor do PET Matemática - UFPR  
Novembro de 2024

# *Álgebra*

*Comissão Científica:*

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves

Prof. Dr. Matheus Batagini Brito

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Tanise Carnieri Pierin

Prof. Dr. Willian Goulart Gomes Velasco

# Classificação das Álgebras de Jordan de dimensão 3

Ana Cleo Matias Vieira da Motta\*  
anacleomatias@gmail.com<sup>1</sup>

Profa. Maria Eugênia Martin (Orientadora)  
eugenia@ufpr.br<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Universidade Federal do Paraná

16/08/2024

**Palavras-chave:** álgebras de Jordan, classificação de álgebras, álgebras não-associativas, decomposição de Peirce, teorema de Wedderburn.

## Resumo:

A classificação a menos de isomorfismos das álgebras de Jordan de dimensão 3 sobre um corpo  $\mathbb{K}$  algebricamente fechado e de característica diferente de 2 foi realizada em 1978 por H. Wesseler, conforme descrito em [8]. No entanto, esse trabalho é de difícil acesso, tanto pelo idioma em que foi escrito (alemão), quanto pela indisponibilidade online. Diante disso, nosso projeto teve como objetivo refazer a classificação das álgebras de Jordan de dimensão 3, utilizando os métodos empregados em [4], onde o autor classifica as álgebras de dimensão 4. Verifiquemos então algumas definições importantes para o trabalho realizado.

Primeiramente, dizemos que duas  $\mathbb{K}$ -álgebras  $(A, \cdot)$  e  $(A', *)$  são **isomorfas** se existe um isomorfismo de espaços vetoriais  $T : A \rightarrow A'$  que preserva o produto, i.e., tal que  $T(x \cdot y) = T(x) * T(y), \forall x, y \in A$ .

**Definição:** Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra  $J$  é chamada de  **$\mathbb{K}$ -álgebra de Jordan** se seu produto satisfaz a condição de comutatividade  $xy = yx, \forall x, y \in J$  e uma versão debilitada da associatividade, chamada Identidade de Jordan:  $(x^2y)x = x^2(yx), \forall x, y \in J$ .

Podemos reescrever a identidade de Jordan através da relação  $(x^2, y, x) = 0$ , onde  $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$  é o associador. Linearizando completamente a identidade e usando o fato que a álgebra é comutativa, obtemos a identidade equivalente:

$$(xy, z, t) + (xt, z, y) + (yt, z, x) = 0, \forall x, y, z, t \in J.$$

Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra de Jordan  $J$  é chamada de **simples** se  $J^2 \neq 0$  e  $0$  e  $J$  são os únicos ideais de  $J$ . Diremos ainda que  $J$  é **nilpotente** se existe um número natural  $n$  tal que o produto de quaisquer  $n$  elementos da álgebra, com quaisquer distribuição de

---

\*Bolsista do PET-Matemática.

parêntesis seja igual a zero. O menor de tais números é denominado **índice de nilpotência** de  $J$ .

**Exemplo:** Seja  $V$  um espaço vetorial e  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  uma forma bilinear simétrica. Se considerarmos  $J(V, f) = \mathbb{K} \cdot 1 \oplus V$  a soma direta do espaço vetorial  $V$  com o espaço vetorial  $\mathbb{K} \cdot 1 = \{\alpha \cdot 1, \alpha \in \mathbb{K}\}$  junto com o produto  $\square$ , definido por:

$$(\alpha \cdot 1 + x) \square (\beta \cdot 1 + y) = (\alpha\beta + f(x, y)) \cdot 1 + (\beta x + \alpha y)$$

em que  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in V$ , então  $(J(V, f), \square)$  é uma álgebra de Jordan. Se, além disso, a forma  $f$  for não degenerada e a  $\dim_{\mathbb{K}} V > 1$ , a álgebra é também simples.

Durante a revisão bibliográfica, foram estudados os resultados e teoremas em [6] dentre os quais destacamos:

- (a) existe um único ideal nilpotente maximal de  $J$ , que chamaremos de **radical de  $J$**  e será denotado por  $\text{Rad}(J)$ ;
- (b) o quociente de  $J$  pelo seu radical é uma álgebra de Jordan **semisimples** (i.e. é uma soma direta de álgebras simples), e será denotada por  $J_{ss}$ ;
- (c) se  $J$  é uma álgebra semisimples, então possui um elemento unidade e sua decomposição em álgebras simples é única.

Além destes, também foram de suma importância:

- (a) o Teorema de Albert (veja [3]) que classifica as álgebras de Jordan simples;
- (b) o Teorema Principal de Wedderburn em [7] que nos diz que  $J$  se decompõe como  $J = J_{ss} \oplus \text{Rad}(J)$  (soma direta de espaços vetoriais); e
- (c) a Decomposição de Peirce de uma álgebra de Jordan, segundo [3].

Assim, a classificação das álgebras de Jordan de dimensão 3 foi feita considerando 4 casos, de acordo com as possíveis dimensões do radical nilpotente: 0, 1, 2 e 3.

No caso em que  $\dim \text{Rad}(J) = 0$ , pelo Teorema Principal de Wedderburn,  $J$  será uma álgebra semisimples e a classificação é uma consequência do Teorema de Albert ([3]). Analogamente, se  $\dim \text{Rad}(J) = 3$ ,  $J$  será uma álgebra nilpotente e estas foram classificadas por Ancochea Bermúdez, Fresán e Bentabol em [1].

Os casos mais desafiadores acontecem quando  $\dim \text{Rad}(J) = 1$  ou  $\dim \text{Rad}(J) = 2$ . Nesses casos, a parte semisimples da álgebra  $J_{ss}$  é determinada pelo Teorema de Albert e o elemento unidade dessa subálgebra será um elemento idempotente da álgebra  $J$  o que permitirá que  $J$  admita uma Decomposição de Peirce, a qual será herdada pelo seu radical nilpotente, uma vez que este é um ideal. Agora basta analisar os diferentes subespaços de Peirce que admite  $\text{Rad}(J)$  para obtermos todas as possíveis álgebras de Jordan.

Ao todo foram obtidas, a menos de isomorfismos, 20  $\mathbb{K}$ -álgebras de Jordan de dimensão 3 sobre um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2.

## Referências

- [1] ANCOCHEA BERMÚDEZ, J. M.; FRESÁN, J. e BENTABOL, J. M. **Contractions of Low Dimensional Nilpotent Jordan Algebras**. Communications in Algebra, 39, pp. 1139–1151, 2011.

- [2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de álgebra linear**. São Paulo: EdUSP, 2010.
- [3] JACOBSON, N. **Structure and Representations of Jordan Algebras**. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 39. American Mathematical Society, Providence, 1968.
- [4] MARTIN, M. E. **Four Dimensional Jordan Algebras**. International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra, 20 (2013), pp. 41–59.
- [5] MARTIN, M.E. **Deformações e Isotopias de álgebras de Jordan**. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2013.
- [6] MCCRIMMON, K. **A Taste of Jordan Algebras**. New York: Springer, 2004.
- [7] TAFT, E. **Invariant Wedderburn Factors**. Illinois Journal of Mathematics, 1 (1957), pp. 565–573.
- [8] WESSELER, H. **Der Klassifikation der Jordan-Algebren niedrigen Dimensionen**. Tese de doutorado, Staatsexamensarbeit für der Lehramt am Gymnasium Münster, 1978.

# Globalização de Ações Parciais de Semigrupos Inversos em Conjuntos

Bruno Gerevini Boni\*

brunogboni2000@gmail.com<sup>1</sup>

Paulinho Demeneghi (Orientador)

paulinho.demeneghi@ufsc.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>UFSC

**Palavras-chave:** ação parcial, semigrupos inversos, globalização.

## Resumo:

A noção de ação parcial apareceu pela primeira vez na literatura em 1994 em um trabalho desenvolvido por Ruy Exel [2] em que o conceito de produto cruzado de uma  $C^*$ -álgebra por uma ação parcial do grupo cíclico infinito foi introduzido. O trabalho de Exel foi posteriormente generalizado por McClanahan [6] em 1995 onde uma definição de produto cruzado de uma  $C^*$ -álgebra por uma ação parcial de um grupo discreto foi formalizada.

A noção de ações parcial de grupos em conjuntos foi introduzida por Exel [3] em 1998 motivado pelo grande interesse no conceito de ações parciais de grupos em  $C^*$ -álgebras e, desde então, o conceito de ações parciais de grupos tem aparecido na literatura em diversos contextos.

Um importante problema envolvendo ações parciais é o problema da globalização. Em suma, ações globais naturalmente induzem ações parciais via processo de restrição e isso motiva a pergunta: quando uma ação parcial é globalizável? Isto é, quando uma ação parcial pode ser obtida através da restrição de uma ação global? Abadie [1] mostrou em 1999 que toda ação parcial de um grupo em um conjunto é globalizável.

Motivado pelo problema da existência de globalizações para ações parciais, muitos trabalhos foram desenvolvidos em vários contextos diferentes: ações parciais de grupos em objetos como espaços topológicos, anéis,  $C^*$ -álgebras; ações parciais de monoides, semigrupos, semigrupos inversos, álgebras de Hopf, grupoides ordenados e categorias pequenas.

Nessa palestra vamos abordar o problema da globalização para ações parciais de semigrupos inversos em conjuntos usando uma versão adaptada da definição de ação parcial de semigrupo inverso em conjunto dada em [7]: vamos utilizar a noção de homomorfismo parcial de semigrupos inversos ao invés de pré-homomorfismos. Embora tenha sido provado em [5] (Teorema 6.10) que toda ação parcial de um semigrupo

---

\*Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET Matemática UFSC)

inverso em um conjunto é globalizável, vamos apresentar um argumento sem precisar passar por uma unitização do semigrupo. De forma resumida, nosso argumento é uma adaptação direta da prova do resultado obtido para ações parciais de grupos em conjuntos dada em [4].

## Referências

- [1] ABADIE, F. **Sobre ações parciais, Fibrados de Fell e Grupóides**. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 1999.
- [2] EXEL, R. **Circle Actions on  $C^*$ -algebras, Partial Automorphisms, and a Generalized Pimsner-Voiculescu Exact Sequence**. J. Funct. Anal. 122, 2 (1994), 361–401.
- [3] EXEL, R. **Partial Actions of Groups and Actions of Inverse Semigroups**. Proc. Amer. Math. Soc. 126, 12 (1998), 3481–3494.
- [4] EXEL, R. **Partial Dynamical Systems, Fell Bundles and Applications**. Mathematical Surveys and Monographs 224: American Mathematical Society, 2017.
- [5] GOULD V, HOLLINGS C. **Partial Actions of Inverse and Weakly Left E-Ample Semigroups**. Journal of the Australian Mathematical Society. 2009;86(3):355-377.
- [6] MCCLANAHAN, K. **K-Theory for Partial Crossed Products by Discrete Groups**. J. Funct. Anal. 130, 1 (1995), 77–117
- [7] KHRYPCHENKO, M. **Partial actions and an embedding theorem for inverse semigroups**. Period Math Hung 78, 47–57 (2019).

# O Teorema Espectral

Emilly Giovana Torquato<sup>1\*</sup>

*emillygiovana@alunos.utfpr.edu.br*<sup>1</sup>

Prof<sup>a</sup>. Dra. Lilian Cordeiro Brambila (Orientadora)

*lilianc@utfpr.edu.br*<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

**Palavras-chave:** operadores lineares, autovalores e autovetores, diagonalização.

## Resumo:

O presente trabalho tem como objetivo entender uma demonstração do Teorema Espectral. Este resultado, amplamente conhecido e abordado em cursos clássicos de Álgebra Linear, afirma que a classe de operadores lineares auto-adjuntos é diagonalizável. Isso significa que, dado um operador linear auto-adjunto definido em um espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita com produto interno, é possível encontrar uma base de autovetores do operador linear para tal espaço. Mais do que isso, o Teorema afirma que essa base de autovetores pode ser escolhida ortonormal. Para alcançar esse objetivo, foi realizada uma extensa revisão bibliográfica da literatura existente, com o intuito de entender os principais pré-requisitos necessários para compreender a prova do resultado principal deste trabalho. Nesse sentido, realizou-se o estudo do conceito de espaço vetorial, apresentando algumas de suas propriedades básicas, bem como do conceito de transformações lineares, que são funções tais que seu domínio e contradomínio são espaços vetoriais, de modo que as operações que definem as suas estruturas de espaços vetoriais são preservadas por essa função. Tais tipos de funções desempenham um papel fundamental neste trabalho, pois operadores lineares são transformações lineares cujo domínio e contradomínio são o mesmo espaço vetorial. Outros conceitos importantes que aparecem ao longo do trabalho são os de subespaço vetorial, base, dimensão, matrizes de transformação linear, autovalores e autovetores. Ao final, estudou-se alguns tipos especiais de operadores lineares, entre os quais os operadores lineares auto-adjuntos. Com base na literatura utilizada, foram identificados quais são os fundamentos necessários para compreender a diagonalização de tais operadores. Como consequência imediata do Teorema Espectral, pode-se afirmar que toda matriz simétrica é diagonalizável.

## Referências:

---

<sup>1\*</sup> Voluntária

- [1] COELHO, F. U. **Um Curso de Álgebra Linear**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2020.
- [2] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Linear Álgebra**. New Jersey: Prentice-Hall Hispanoamericana, 1973.
- [3] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. São Paulo: Pearson/Makron Books, 1987.

# Categorias Modelo e Álgebra Homotópica

Fernando Augusto de Lima Filho\*

fernando.lima@ufpr.br<sup>1</sup>

Eduardo Outeiral Correa Hoefel (Orientador)

hoefel@ufpr.br<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná (UFPR)

**Palavras-chave:** estrutura modelo, categorias modelo, complexos de  $R$ -módulos.

**Resumo:** Uma teoria de homotopia pode ser feita de diversos pontos de vista, como por exemplo, do ponto de vista dos espaços topológicos  $Top$ , dos complexos de cadeia sobre  $R$ -módulos  $Ch(R)$ , dos conjuntos simpliciais  $sSet$ , entre outros. Uma maneira de unificar e comparar essas teorias é com o uso de categorias modelo que é o estudo principal desse projeto de pesquisa.

Uma **estrutura modelo** em uma categoria  $\mathcal{C}$  é uma tripla  $(Fib, Cof, \mathcal{W})$ , composta por três classes de morfismos de  $\mathcal{C}$ , chamados fibrações, cofibrações e equivalências fracas tais que:

- i) **(2 de 3)** - Sejam  $f$  e  $g$  morfismos de  $\mathcal{C}$  tais que  $gf$  existe. Se dois de  $f, g$  e  $gf$  estão em  $\mathcal{W}$ , então o terceiro também está em  $\mathcal{W}$ .
- ii)  $\mathcal{W}$  é fechado por retratos.
- iii) Ambos  $(Cof \cap \mathcal{W}, Fib)$  e  $(Cof, Fib \cap \mathcal{W})$  são sistemas de fatorações fracas funtoriais.

Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria completa-pequena e cocompleta-pequena (fixado um universo arbitrário  $\mathcal{U}_\lambda$ ), dizemos que  $(\mathcal{C}, (Fib, Cof, \mathcal{W}))$  é uma **categoria modelo**.

Uma categoria modelo é **cofibrantemente gerada** se existem  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$  dois subconjuntos pequenos de morfismos de  $\mathcal{C}$  tais que:

- i) A classe de fibrações é  $R(\mathcal{J})$ ;
- ii) A classe de fibrações triviais (isto é,  $Fib \cap \mathcal{W}$ ) é  $R(\mathcal{I})$ .

---

\*Voluntario

A classe  $\mathcal{I}$  é chamada de geradora de cofibrações e a classe  $\mathcal{J}$  é chamada de geradora de cofibrações triviais ( $Cof \cap \mathcal{W}$ ).

É bastante complicado construir tais estruturas por essa definição; então, uma maneira mais 'simples' é usar os seguintes resultados:

**Argumento do Objeto Pequeno (Quillen).** Sejam  $\mathcal{C}$  uma categoria localmente pequena e cocompleta-pequena,  $\mathcal{I}$  um subconjunto pequeno dos morfismos de  $\mathcal{C}$  e  $\kappa$  um cardinal. Suponha que os domínios dos morfismos de  $\mathcal{I}$  sejam  $\kappa$ -pequenos relativos à  $\mathcal{I}$ -cell. Então existe um sistemas de fatorações fracas functorial em  $\mathcal{C}$  dada por  $(L(R(\mathcal{I})), R(\mathcal{I}))$ .

**Teorema (Daniel M. Kan).** Suponha que  $\mathcal{C}$  é uma categoria completa-pequena e cocompleta-pequena. Sejam  $\mathcal{W}$  uma subcategoria de  $\mathcal{C}$ , e  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{J}$  dois subconjuntos pequenos dos morfismos de  $\mathcal{C}$ . Então existe uma estrutura modelo cofibrantemente gerada, se e somente se:

- i)  $\mathcal{W}$  é fechado por retrato e satisfaz a propriedade **(2 de 3)**;
- ii)  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{J}$  satisfazem o Argumento do Objeto Pequeno;
- iii)  $(\mathcal{J}\text{-cell}) \subset L(R(\mathcal{I})) \cap \mathcal{W}$ ;
- iv)  $R(\mathcal{I}) \subset R(\mathcal{J}) \cap \mathcal{W}$ ;
- v)  $L(R(\mathcal{I})) \cap \mathcal{W} \subset L(R(\mathcal{J}))$  ou  $R(\mathcal{J}) \cap \mathcal{W} \subset R(\mathcal{I})$ .

Como exemplo, irei construir uma estrutura modelo na categorias de complexos de  $R$ -módulos a partir desses dois resultados, como segue:

**Teorema. (Estrutura Modelo Projetiva)** Seja  $\mathcal{C} = Ch(R)$  a categoria de complexos de cadeias de  $R$ -módulos. Temos que  $\mathcal{C}$  possui uma estrutura modelo, onde:

- i)  $f : A \longrightarrow B$  é equivalência fraca, se, e somente se,  $f$  é quasi-isomorfismo;
- ii)  $f : A \longrightarrow B$  é fibração, se e somente se,  $f$  é epimorfismo em cada grau;
- iii)  $f : A \longrightarrow B$  é cofibração, se e somente se,  $f$  é mono-split com cokernel projetivo.

## Referências

- [1] HOVEY, M. **Model Categories**. American Mathematical Society, 1991.
- [2] DWYER, W.G; SPALINSKI, J. **Homotopy Theories and Model Categories**. Elsevier Science B.V, 1995.
- [3] HIRSHHORN, P.S. **Model Categories and Their Localizations**. American Mathematical Society, 2009.
- [4] CISINSKI, D.C. **Higher Categories and Homotopical Algebra**. Cambridge University Press, 2019.
- [5] MACLANE, S. **Categories for the Working Mathematician**. Springer, 1978.
- [6] QUILLEN, D.G. **Homotopical Algebra**. Springer, 1967.
- [7] KUNEN, K. **The Foundations of Mathematics**. College Publications, 2009.

# Criptografia RSA: Teoria e Implementação

Fernando de Barros Castro \*  
fernando.castro1@ufpr.br <sup>1</sup>

Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)  
wagnermoraes@ufpr.br <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Palavras-chave: RSA, criptografia de chave pública, função de Euler.

Resumo:

O algoritmo de encriptação RSA foi um dos primeiros sistemas de criptografia de chave pública desenvolvidos. O algoritmo foi primeiro descrito em 1978 por Ron Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, com as iniciais de seus sobrenomes formando o acrônimo RSA. Sua criação resolve o problema da distribuição de chaves ao usar um sistema de criptografia simétrico, em que a mesma chave é usada para criptografar e descriptografar. Isso é feito distinguindo a chave de encriptação (pública) da chave de deciptação (privada), de forma que quem intercepte a mensagem encriptada, não consiga decifrá-la com a chave pública. O algoritmo é considerado lento, assim é utilizado em conjunto com algoritmos de criptografia simétrica apenas para a transmissão segura da chave compartilhada.

A segurança do sistema RSA apoia-se principalmente no problema da fatoração e sua dificuldade. Esse, por sua vez, consiste em decompor um  $N \in \mathbb{Z}$  em seus fatores primos. Não se conhece um algoritmo para resolvê-lo em tempo polinomial. Em contrapartida, encontrar um  $N$  grande (maior que  $10^{300}$  ou com representação binária com mais de 1024 bits) que pode ser escrito como produto de dois primos é um problema da classe de complexidade polinomial, possibilitando a viabilidade do algoritmo. Essa busca por  $N$  pode ser feita utilizando um teste de primalidade eficiente como de Miller-Rabin, que, apesar de probabilístico, tem taxa de erro considerada insignificante. As multiplicações dos números grandes também não representam um empecilho. O algoritmo de Karatsuba, por exemplo, faz aproximadamente  $n^{1.58}$  multiplicações de dígitos dados dois números de  $n$  casas.

A busca por um  $N \in \mathbb{Z}$  que atenda as características mencionadas é de extrema importância para o sistema RSA. Um uso hipotético do algoritmo pode ajudar a entender essa importância: Bob quer compartilhar uma mensagem com Alice de forma privada usando RSA para isso. Alice então roda o algoritmo RSA em sua máquina. Após encontrar um  $N$  grande, com os primos  $p$  e  $q$ , o algoritmo computa o valor de  $\Phi(N)$  (função totiente de Euler). Em seguida, encontra um  $d$  que satisfaça  $\text{mdc}(d, \Phi(N)) = 1$  ao mesmo tempo que calcula um segundo valor auxiliar  $e$  com o algoritmo de Euclides estendido. Alice então envia a chave pública  $(d, N)$  para Bob pela rede. O computador de Bob então

---

\*Voluntário do Programa de Voluntariado Acadêmico (PVA)

segmenta sua mensagem em blocos, sendo cada um transformado em um único número concatenando os respectivos códigos ASCII de cada letra. Sobre cada um dos números são feitas operações modulares e os resultados dessas são enviados pela rede para Alice. Apenas ela têm a chave privada que consegue decifrar a mensagem de Bob e lê-la em segurança. Um hacker não conseguirá decriptar a mensagem de Bob de forma fácil, justamente por não saber o outro valor  $e$  que compõe a chave privada. É importante notar que Alice e Bob poderiam utilizar um algoritmo de criptografia simétrico como o AES (Advanced Encryption Standard) e o RSA para a transmissão segura da chave utilizada.

Por fim, entender o algoritmo RSA e suas nuances é de suma importância para a manutenção da segurança no ambiente virtual, já que abre caminho para pesquisas que exploram as vulnerabilidades do sistema e oferecem soluções para tais.

## Referências

- [1] MILIES, César Polcino; COELHO, Sônia Pitta. Números: uma introdução à matemática. São Paulo: Edusp, 2023.
- [2] BIGGS, Norman L. Codes: an introduction to information communication and cryptography. London: Springer Science+Business Media, 2008.
- [3] RSA (sistema criptográfico). In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/RSA\\_\(sistema\\_criptografico\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/RSA_(sistema_criptografico)). Acesso em: 04 set. 2024

# Representação de álgebras de Lie

Gabriela Martins dos Santos \*  
g236547@dac.unicamp.br <sup>1</sup>

Eder Moraes de Correa (Orientador)  
ederc@unicamp.br <sup>1</sup>

<sup>1</sup>IMECC-UNICAMP

**Palavras-chave:** álgebras de Lie, teoria de representação, complexificação.

## Resumo:

Neste resumo, temos como objetivo estudar a relação entre as álgebras de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{su}(\mathbb{C})$  e  $\mathbb{R}_\lambda^3$ . Assim, ficarão evidentes conceitos importantes da teoria de Álgebras de Lie.

Uma *álgebra de Lie* sobre um corpo  $\mathbb{F}$  consiste em um espaço vetorial  $\mathfrak{g}$  de  $\mathbb{F}$  munido de um mapa bilinear chamado de *colchete*  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ,  $(x, y) \mapsto [x, y]$  que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(L1) \quad [x, x] = 0, \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}.$$

$$(L2) \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \text{ para todos } x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Um primeiro exemplo é a álgebra de endomorfismos de um espaço vetorial  $V$ , denotada por  $\mathfrak{gl}(V)$ . O colchete entre quaisquer  $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$  é dado por  $[x, y] = x \circ y - y \circ x$ . Perceba que nessa álgebra de Lie vale que  $\text{tr}([x, y]) = \text{tr}(x \circ y - y \circ x) = 0$ . Restringindo portanto o colchete para endomorfismos de traço zero, definimos então a álgebra  $\mathfrak{sl}(V)$ . Para um espaço  $V$  de dimensão dois no corpo complexo, essa álgebra é denotada por  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . Os vetores  $e, f, g$  a seguir servirão de base para esta álgebra. Os colchetes entre os elementos dessa base são igualmente importantes:  $[e, f] = h$ ,  $[h, e] = 2e$  e  $[f, h] = 2f$ .

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Outro exemplo bem popular é o produto vetorial  $(x, y) \mapsto x \times y$ , que define a estrutura de álgebra de Lie em  $\mathbb{R}_\lambda^3$ . Uma base de  $\mathbb{R}_\lambda^3$  é formada pelos vetores  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  e os colchetes entre estes vetores são dados por  $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$ ,  $[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$  e  $[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$ .

O último exemplo que apresentaremos é a álgebra  $\mathfrak{su}(2)$ , formada por matrizes  $2 \times 2$  anti-hermitianas de traço zero, ou seja,  $\mathfrak{su}(2) = \{x \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}) : x = -\bar{x}^T, \text{tr}(x) = 0\}$ .

---

\*Bolsista do PICME

O colchete é o mesmo de  $\mathfrak{gl}(V)$ . Uma base para essa álgebra é dada pelos vetores a seguir

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

em que  $[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_3$ ,  $[\sigma_3, \sigma_1] = \sigma_2$  e  $[\sigma_2, \sigma_3] = \sigma_1$ . Diferentemente de  $\mathfrak{gl}(V)$  que é espaço vetorial tanto no corpo dos reais quanto dos complexos, a álgebra  $\mathfrak{su}(2)$  tem estrutura de espaço vetorial apenas no corpo dos reais, apesar de ser formada por matrizes com entradas complexas.

Uma *subálgebra* de  $\mathfrak{g}$  é um subespaço  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  tal que  $[x, y] \in \mathfrak{h}$  para todos  $x, y \in \mathfrak{h}$ . Já um *ideal* de  $\mathfrak{g}$  é uma subálgebra  $\mathfrak{j}$  de  $\mathfrak{g}$  tal que  $[x, y] \in \mathfrak{j}$  para todos  $x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{j}$ . O *produto* de dois ideais  $\mathfrak{i}$  e  $\mathfrak{j}$  é definido como  $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] := \text{span}\{[i, j] : i \in \mathfrak{i}, j \in \mathfrak{j}\}$ .

**Proposição 0.1.** *Existem duas álgebras de Lie de dimensão três com a propriedade de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$  no corpo dos reais:  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{R}_\lambda^3$ . Já no corpo dos complexos, a única álgebra de Lie desse tipo é a famosa  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .*

Para provar essa afirmação, bastaria calcularmos os colchetes entre os elementos de uma álgebra de Lie qualquer e ver que eles coincidem com os colchetes dos elementos de alguma base das álgebras citadas.

Podemos ver que  $\mathbb{R}_\lambda^3$  não possui subálgebras, pois o colchete de quaisquer dois elementos da base gera o terceiro. Por outro lado,  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  possui sim subálgebras, por exemplo,  $\text{span}\{h, e\}$ , que é fechado pelo colchete. Assim, podemos ver que  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{R}_\lambda^3$  não são isomorfos. Além disso, perceba que a álgebra  $\mathfrak{su}(2)$  é isomorfa a  $\mathbb{R}_\lambda^3$ . Para verificar isso, basta ver que o mapa  $\varphi : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathbb{R}_\lambda^3$  que leva, respectivamente, a base  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  em  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  é um isomorfismo que preserva os colchetes. Portanto,  $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}_\lambda^3$  mas  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  não é isomorfa nem a  $\mathfrak{su}(2)$  e nem a  $\mathbb{R}_\lambda^3$ .

Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é dita *solúvel* se a *série derivada*, dada por  $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  e  $\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$  para  $k \geq 2$ , possui termo nulo, isto é, se existe  $m$  tal que  $\mathfrak{g}^{(m)} = 0$ . Por sua vez, uma álgebra  $\mathfrak{g}$  é dita *semi-simples* se todos os seus ideais solúveis são nulos.

Uma forma de vermos se determinada álgebra é semi-simples é analisando o traço da álgebra. Seja  $L$  uma álgebra de Lie. A *forma de Killing* em  $L$  é uma forma simétrica e bilinear, definida por  $\kappa(x, y) := \text{tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y)$  para todo  $x, y \in L$ . Pelo segundo critério de Cartan, podemos relacionar a forma de Killing com a semi-simplicidade.

**Teorema 0.2. (Segundo critério de Cartan)** *Uma álgebra de Lie complexa  $\mathfrak{g}$  é semi-simples se e somente se sua forma de Killing  $\kappa$  é não-degenerada.*

Dizemos que  $\kappa$  é não degenerado se  $V^\perp = 0$ . Uma forma de verificarmos se  $\kappa$  é degenerado é através da matriz com entradas  $a_{ij} = \kappa(x_i, x_j)$ , onde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é base de  $\mathfrak{g}$ . Se o determinante é zero, a forma de Killing na álgebra é degenerada. Usando a base  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , a matriz da forma de Killing em  $\mathfrak{su}(2)$  e  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  tem determinante não-nulo e portanto tem forma de Killing não-degenerada. Concluímos então que  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  e  $\mathfrak{su}(2)$  (consequentemente,  $\mathbb{R}_\lambda^3$  também) são semi-simples.

Sejam  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$  álgebras de Lie sobre um corpo  $\mathbb{F}$ . Dizemos que  $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  é *homomorfismo* se  $\varphi$  é linear e  $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$  para todos  $x, y \in \mathfrak{g}_1$ . Além disso, dizemos que  $\varphi$  é *isomorfismo* se for bijetora. Em especial, uma *representação* da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é um homomorfismo  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ , em que  $V$  é um espaço vetorial em  $\mathbb{F}$ .

Dada uma representação  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  e definindo  $\mathfrak{g} \times V \rightarrow V$  como  $x \cdot v := \varphi(x)(v)$ , tornamos  $V$  um *módulo* de  $\mathfrak{g}$ . Assim, a representação de uma álgebra de Lie pode ser vista como a ação dos elementos dessa álgebra em um espaço vetorial. Estudaremos agora a representação da álgebra semi-simples  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .

Seja  $V$  módulo de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Um subespaço  $W$  de  $V$  é chamado de *submódulo* quando é invariante a ação de  $\mathfrak{g}$ , isto é, para todos  $x \in \mathfrak{g}$  e  $w \in W$  tem-se  $x \cdot w \in W$ . Um módulo  $V$  é *irredutível* quando é não-nulo e possui apenas os submódulos  $0$  e  $V$ .

**Proposição 0.3.** *Seja  $V_d = \text{span}\{X^d, X^{d-1}Y, X^{d-2}Y^2, \dots, Y^d\}$  subespaço dos polinômios complexos de variáveis  $X$  e  $Y$  de grau máximo  $d$ . O mapa  $\varphi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V_d)$  como definido abaixo é uma representação de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .*

$$\varphi(e) := X \frac{\partial}{\partial Y} \quad \varphi(f) := Y \frac{\partial}{\partial X} \quad \varphi(h) := X \frac{\partial}{\partial X} - Y \frac{\partial}{\partial Y}$$

A linearidade de  $\varphi$  é garantida pela linearidade da derivada parcial e a partir de  $\star$  pode-se mostrar que a representação preserva o colchete. Assim como  $h$ , a matriz de  $\varphi(h)$  também é diagonal. Da mesma forma, as matrizes  $f$  e  $\varphi(f)$  são triangulares inferiores e a dupla  $e$  e  $\varphi(e)$  são triangulares superiores.

**Proposição 0.4.** *O espaço vetorial  $V_d$  é módulo irredutível de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .*

*Demonstração.* Observe que a ação da álgebra em um elemento qualquer da base de um submódulo de  $V_d$  geraria todo o  $V_d$ . □

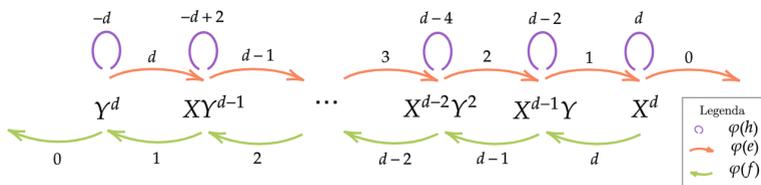


Figura 1: Diagrama ilustração a ação de  $e$ ,  $f$  e  $h$  em  $V_d$

**Teorema 0.5.** *Qualquer módulo irredutível  $V$  de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  com dimensão finita é isomorfo a algum  $V_d$ .*

Sabendo a representação irredutível de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ , ganhamos de tabela uma representação irredutível de  $\mathfrak{su}(2)$ . Perceba que para construir a representação de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  utilizamos do corpo dos complexos para garantir a existência de autovalores, o que facilitou bastante as coisas.

## Referências

- [1] HALL, Brian C. **Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction**. Nova Iorque: Springer, 2010.
- [2] WILDON, K.; ERDMANN, M. J. **Introduction to Lie Algebras**. Nova Iorque: Springer, 2006.

# Aplicação do Teorema de Minkowski na Redução de Formas Quadráticas

Gabrieli Kmiecik

`gabi.kmiecik@hotmail.com`<sup>1</sup>

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Gisele Teixeira Paula (Orientadora)

`giseleteixeira@ufpr.br`<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bacharelado em Matemática - UFPR

<sup>2</sup>Departamento de Matemática - UFPR

**Palavras-chave:** redução de formas quadráticas, teorema de Minkowski, mínimo de formas definidas positivas.

## Resumo:

Existem alguns métodos para reduzir uma forma quadrática. O método estudado neste trabalho leva em conta o fato de que formas quadráticas definidas positivas possuem um mínimo. O mínimo da forma garante a existência de uma matriz unimodular que, quando conjugada pela matriz da forma, resultará em uma matriz reduzida, que mantém as mesmas propriedades da forma original. Inicialmente, apresentaremos a definição de formas bilineares e suas formas quadráticas associadas. Depois, serão definidas as formas quadráticas positivas definidas e o que são os seus mínimos. Então, apresentaremos dois métodos para obter estimativas sobre o mínimo de uma forma quadrática: um de origem algébrica, devido à Hermite, e um de origem geométrica, obtido a partir do Teorema de Minkowski. Ao final, será apresentada a comparação entre as duas estimativas para ver qual oferece a melhor aproximação para o mínimo.

Para iniciar o estudo da redução das formas quadráticas, é preciso relembrar alguns conceitos e definições de Álgebra Linear, que podem ser encontrados em [1]. Uma **forma bilinear** em  $\mathbb{R}^n$  é uma função  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz:  $f(cx_1 + x_2, y) = cf(x_1, y) + f(x_2, y)$  e  $f(x, cy_1 + y_2) = cf(x, y_1) + f(x, y_2)$ . A matriz  $S$  de  $f$  é  $S = (s_{ij}) = f(e_i, e_j)$ , então  $f(x, y) = \sum_{i,j} S_{ij}x_iy_j$ . Assim,  $f$  pode ser escrita

como  $f(x, y) = x^T S y$ , em que  $x, y$  são vetores coluna do espaço  $\mathbb{R}^n$ . A forma  $f$  é dita **simétrica** se  $f(x, y) = f(y, x)$ , para todos  $x, y$  em  $\mathbb{R}^n$ . Podemos mostrar que  $f$  é uma forma simétrica se, e somente se,  $S$  é uma matriz simétrica.

Dada uma forma bilinear  $f$  simétrica, a **forma quadrática associada à  $f$**  é a função  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $q(x) = f(x, x)$ . Note que podemos escrever  $q(x) = S[x] := x^T S x = \sum_{i,j} S_{ij}x_ix_j$ . A partir de agora, identificaremos a forma  $q$  por sua matriz  $S$ . Uma forma quadrática é dita **definida positiva** se  $S[x] > 0$  para todo  $x \neq 0$ . Podemos

mostrar que  $q$  é definida positiva se, e somente se, a matriz  $S$  é definida positiva. Estamos interessados em estimar o mínimo das formas quadráticas que são definidas positivas mas, para isso, precisaremos do conceito de matrizes equivalentes.

Duas matrizes  $S, T$  reais, invertíveis, simétricas e quadradas de tamanho  $n$  são ditas **equivalentes** se existir uma matriz unimodular  $U$  tal que  $S[U] = T$ . Notação:  $S \sim T$ . Observamos que  $\sim$  é de fato uma relação de equivalência. Por essa relação,  $T$  e  $S$  terão propriedades em comum, entre elas nosso objeto principal de estudo: seu mínimo. A ideia da redução de uma forma quadrática  $S$  é encontrar uma forma equivalente e mais simples do que a original, a qual chamaremos de forma reduzida, mas que mantenha as mesmas propriedades de  $S$ . O próximo passo é definir o mínimo, mas precisaremos ainda de alguns conceitos.

Dizemos que uma matriz  $S$  **representa**  $t \in \mathbb{R}$  **integralmente** se  $S[x] = t$  para algum vetor integral  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se  $S \sim T$ , ambas representam os mesmos números  $t$ . Dados  $S$  uma matriz definida positiva e  $x \neq 0$  algum vetor integral e primitivo, dizemos que  $S[x]$  é o **mínimo de  $S$**  se  $S[x] \leq S[y]$  para todo vetor  $y$  integral não nulo. Denotamos o mínimo de  $S$  como  $\mu(S)$ . Fixado  $t \in \mathbb{R}$ , existem finitos vetores integrais  $x$  satisfazendo  $S[x] < t$ . Além disso, podemos garantir que as entradas de  $x$  são limitadas. Como, na definição de mínimo, o vetor  $x$  pode variar entre todos os vetores integrais não nulos, a observação anterior garante que  $S$  atinge o seu mínimo. Porém, para encontrar  $\mu(S)$ , teríamos que testar uma quantidade de valores de  $x$  que, embora finita, pode ser grande em dimensões altas. Por isso, é interessante encontrar uma forma mais direta para estimar o valor do mínimo. Uma dessas formas é encontrar uma relação entre  $\mu(S)$  e o determinante de  $S$ . Assim, introduzimos o Teorema de Hermite.

**Teorema 1 (Hermite)** *Se  $\mu(S)$  é o mínimo de uma matriz  $S$  definida positiva de tamanho  $n \times n$ , existe uma constante  $c_n$ , dependendo apenas de  $n$ , tal que  $\mu(S) \leq c_n |S|^{1/n}$ .*

A demonstração desse teorema é feita usando indução em  $n$ . Utilizando fórmula de recorrência, chegaremos que  $c_n = (4/3)^{(n-1)/2}$ .

Quando trabalhamos com valores pequenos para  $n$ , essa constante funciona muito bem. Porém, para valores maiores, essa pode não ser a melhor estimativa para  $c_n$ , por isso gostaríamos de melhorá-la. Para isso, precisaremos do Teorema de Minkowski. Antes de apresentar esse teorema, necessitaremos de algumas definições sobre conjuntos e pontos:

- Considerando  $\mathcal{L}$  um conjunto em  $\mathbb{R}^n$  e  $h \in \mathbb{R}^n$  um ponto qualquer, definimos a **translação de  $\mathcal{L}$  por  $h$** , denotada por  $\mathcal{L}_h$ , como o conjunto  $\mathcal{L}_h := \{x \in \mathbb{R}^n : x - h \text{ é um ponto de } \mathcal{L}\}$ .
- Se  $v(A)$  é o volume de um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , podemos ver que  $v(\mathcal{L}) = v(\mathcal{L}_h)$ .
- Um ponto  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  é dito **ponto de reticulado** se  $h_1, h_2, \dots, h_n$  são inteiros.

Com as definições e conceitos vistos até aqui, somos capazes de enunciar e demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 2 (Minkowski)** *Se  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto, limitado, simétrico e convexo de volume maior que  $2^n$ , então  $\mathcal{L}$  contém algum ponto de reticulado além da origem.*

A demonstração do Teorema de Minkowski pode ser feita pela contrapositiva, assumindo que  $\mathcal{L}$  só possui a origem de ponto de reticulado e chegando que seu volume é menor ou igual a  $2^n$ . Para obter essa informação acerca do volume, definimos uma função  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}$  tal que  $f(x) = 2x$  e  $\mathcal{M}$  é um conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^n$ .

A partir do Teorema de Minkowski podemos encontrar uma nova constante para estimar o mínimo de uma forma quadrática definida positiva.

**Teorema 3** *Seja  $S > 0$  e  $\mu(S)$  o seu mínimo, então  $\mu(S) \leq \frac{4}{\pi} \cdot \left\{ \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \right\}^{2/n} |S|^{1/n}$  ( $\Gamma$  é a Função Gamma de Euler).*

Agora, somos capazes de comparar as constantes para ver qual oferece a melhor estimativa para  $n$  grande. Do teorema de Hermite,  $c_n = (4/3)^{(n-1)/2}$  e pelo Teorema de Minkowski temos  $c'_n = \frac{4}{\pi} \cdot \left\{ \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \right\}^{2/n}$ . Usando a função log nas duas constantes, obtemos que

- $\log c_n = ((n-1)/2) \cdot \log(4/3) \sim \lambda n$  ( $\lambda > 0$  constante);
- $\log c'_n = \log(4/\pi) + \log\left(\left(\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)\right)^{2/n}\right) \sim \log n$  (usando a fórmula de Stirling, que nos diz que  $\log(\Gamma(x)) \approx x \cdot \log(x)$ ).

**Obs:** O símbolo  $\sim$  denota acima a noção de funções assintoticamente equivalentes, i.e.  $f(x) \sim g(x)$  se  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)/f(x) = 1$ .

Portanto,  $c'_n$  é mais adequada quando trabalhamos com  $n$  grande, pois oferecerá uma melhor aproximação para  $\mu(S)$ .

É interessante notar como duas coisas com contextos matemáticos diferentes podem estar relacionadas, visto que utilizamos o Teorema de Minkowski, uma ferramenta geométrica, para melhorar a estimativa do mínimo de formas quadráticas, que é algo algébrico. A redução de formas quadráticas tem algumas aplicações, entre elas na teoria de pontos racionais em curvas algébricas, na classificação de formas com certos invariantes fixados (o discriminante, por exemplo) e também pode ser usada para explorar relações com ações de grupos de isometrias em geometria hiperbólica. Nosso interesse futuro está voltado para essa última aplicação, queremos estudar como a redução de formas se relaciona com encontrar pontos no domínio fundamental da ação do grupo modular  $PSL(2, \mathbb{Z})$  no plano hiperbólico.

## Referências

- [1] HOFFMAN, K.; KUNZE, R.. **Linear Algebra**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1971.
- [2] RAMANATHAN, K. G.. **Lectures on Quadratic Forms by C.L. Siegel**. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1957.

# Grupos e Geometria

Henrique de Cristo da Fonseca\*  
h237047@dac.unicamp.br<sup>1</sup>

Tiago Jardim da Fonseca (Orientador)  
tfonseca@unicamp.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>IMECC-UNICAMP

**Palavras-chave:** ação de grupo, geometria, grupo de rotação.

## Resumo:

Queremos provar um teorema de natureza geométrica por meio de um argumento algébrico. Mais precisamente, provaremos que os subgrupos finitos de rotação no espaço tridimensional correspondem aos grupos de simetrias dos poliedros regulares, usando ferramental de ação de grupo.

**Teorema 1.** *Todo subgrupo finito de  $SO(3)$  é ou (1) um grupo cíclico; ou (2) um grupo diedral; ou é o grupo de simetrias (3) do tetraedro; ou (4) do octaedro; ou (5) do icosaedro.*

Seja  $G$  um subgrupo finito de  $SO(3)$ . Se  $|G| = 1$ , então  $G$  é cíclico trivialmente. Suponhamos que  $|G| > 1$ . Naturalmente, o grupo  $G$  age sobre  $\mathbb{R}^3$  por multiplicação à esquerda. Como rotações preservam norma, podemos restringir a ação de  $G$  à esfera unitária  $S^2 := \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1\}$ . Mas queremos um invariante mais forte. Cada rotação não trivial  $g \in G \setminus \{1\}$  fixa uma reta contendo a origem, que intersecta  $S^2$  precisamente em dois pontos, os quais chamaremos de **polos** de  $g$ . Queremos restringir a ação de  $G$  ao conjunto de todos os polos,  $P := \{p \in S^2 : gp = p, \text{ para algum } g \in G \setminus \{1\}\}$ . Basta mostrar que  $G$  leva polos em polos. De fato, se  $p$  é polo de  $g$ , então, para todo  $h \in G$ , o ponto  $hp$  é polo de  $hgh^{-1}$ .

Vamos contar o número de rotações não triviais em  $G$ . Por um lado, sabemos que  $G \setminus \{1\}$  tem  $|G| - 1$  elementos. Por outro lado, escolha um polo  $p \in P$ , fixado por  $|\text{Stab}(p)| - 1$  rotações não triviais que também fixam o polo antipodal de  $p$ . Assim, temos

$$2(|G| - 1) = \sum_{p \in P} (|\text{Stab}(p)| - 1). \quad (1)$$

Note que precisamos do fator 2 no primeiro membro pois fizemos dupla contagem das rotações que fixam um polo e seu antípoda.

---

\*Bolsista do PICME.

Agora, vamos explorar como  $G$  age em  $P$ , olhando para suas órbitas. Observe que as órbitas  $O_k$  (indexadas arbitrariamente) dos elementos de  $P$  formam uma partição  $P = \coprod_k O_k$ . Além disso, polos numa órbita  $O_k$  têm estabilizadores de mesma ordem, a qual chamaremos de  $|\text{Stab}_k|$ . Com isso, podemos agrupar os termos do segundo membro da Equação 1 por órbitas, donde

$$2(|G| - 1) = \sum_k |O_k|(|\text{Stab}_k| - 1), \quad (2)$$

pois há  $|O_k|$  polos na órbita  $O_k$ , e o estabilizador de cada um deles tem ordem  $|\text{Stab}_k|$ . O Teorema de Órbita-Estabilizador garante que  $|G| = |O_k||\text{Stab}_k|$ . Substituindo na Equação 2, vem  $2(|G| - 1) = \sum_k (|G| - |O_k|)$ . Dividindo por  $|G|$ , obtemos a fórmula final.

$$2 \left( 1 - \frac{1}{|G|} \right) = \sum_k \left( 1 - \frac{1}{|\text{Stab}_k|} \right) \quad (3)$$

Observe que o primeiro membro é menor que 2 e que cada parcela do segundo membro é maior que  $1/2$ . Portanto podem existir, no máximo, três órbitas (quatro já seria demais, pois o segundo membro ultrapassaria 2).

Agora resta esmiuçar a numerologia dos casos possíveis.

- Se existe uma só órbita, então a Equação 3 fica  $2(1 - 1/|G|) = 1 - 1/|\text{Stab}_1|$ , o que é absurdo porque o segundo membro é menor que 1, mas o primeiro membro não é, já que  $|G| > 1$ .
- Se existem precisamente duas órbitas, então  $2(1 - 1/|G|) = (1 - 1/|\text{Stab}_1|) + (1 - 1/|\text{Stab}_2|)$ , logo  $2/|G| = 1/|\text{Stab}_1| + 1/|\text{Stab}_2|$ . Pelo Teorema de Órbita-Estabilizador, a ordem de um estabilizador divide  $|G|$ , logo  $|\text{Stab}_k| \leq |G|$ ; isso significa que, das somas  $1/|\text{Stab}_1| + 1/|\text{Stab}_2|$ , o mínimo é  $1/|G| + 1/|G| = 2/|G|$ . Logo a única solução possível é  $|\text{Stab}_1| = |\text{Stab}_2| = |G|$ , que acarreta  $|O_1| = |O_2| = 1$ . Ou seja, só há dois polos, que são fixos por  $G$ . Então  $G$  é o grupo das rotações em torno da reta definida por esses polos, que é cíclico.
- Se existem três órbitas, então  $2(1 - 1/|G|) = (1 - 1/|\text{Stab}_1|) + (1 - 1/|\text{Stab}_2|) + (1 - 1/|\text{Stab}_3|)$ , o que equivale a

$$\frac{2}{|G|} = \frac{1}{|\text{Stab}_1|} + \frac{1}{|\text{Stab}_2|} + \frac{1}{|\text{Stab}_3|} - 1. \quad (4)$$

Escolhendo índices tais que  $|\text{Stab}_1| \leq |\text{Stab}_2| \leq |\text{Stab}_3|$ , o menor estabilizador tem dois elementos  $|\text{Stab}_1| = 2$ . De fato, não pode ser menor, pois polos têm estabilizadores não triviais; tampouco pode ser maior, senão  $1/|\text{Stab}_k| \leq 1/3$ , logo o segundo membro da equação acima não seria positivo, absurdo.

Para terminar o terceiro caso, vamos dividir em subcasos.

1. Se  $|\text{Stab}_2| = 2$  também: a Equação 4 fica

$$\frac{2}{|G|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{|\text{Stab}_3|} - 1,$$

donde  $|G| = 2|\text{Stab}_3|$ . Pelo Teorema de Órbita-Estabilizador, segue que  $|O_3| = 2$ . Como essa órbita é formada por apenas dois polos,  $p$  e  $p'$ , todo  $g \in G$  ou fixa

os dois (então  $g$  é rotação em torno da reta  $\ell$  contendo  $p$  e  $p'$ ) ou os permuta (então  $g$  é rotação por um ângulo  $\pi$  em torno de uma reta ortogonal a  $\ell$ ). Em todo caso,  $g$  é uma simetria de um polígono de  $|\text{Stab}_3|$  lados. Além disso, toda simetria desse polígono está em  $G$ , pois sabemos que  $G$  contém tanto as  $|\text{Stab}_3|$  rotações de  $C_{|\text{Stab}_3|}$  em torno de  $\ell$ , como as rotações por  $\pi$  em torno das retas perpendiculares a  $\ell$  passando por um par polos antipodais (totalizando  $|\text{Stab}_3|$  rotações desse tipo). Portanto  $G$  é o grupo diedral  $D_{2|\text{Stab}_3}$ .

- Se  $|\text{Stab}_2| > 2$ : para  $|\text{Stab}_2| \geq 4$ , o segundo membro da Equação 4 seria no máximo  $1/2 + 1/4 + 1/4 - 1 = 0$ , absurdo; logo  $|\text{Stab}_2| = 3$ . E há outra restrição análoga: para  $|\text{Stab}_3| \geq 6$ , teríamos  $1/2 + 1/3 + 1/6 - 1 = 0$ , absurdo; logo  $3 \leq |\text{Stab}_3| \leq 5$ .

Vamos ilustrar o processo para o caso do **tetraedro** (os demais são parecidos).

Para  $(|\text{Stab}_1|, |\text{Stab}_2|, |\text{Stab}_3|) = (2, 3, 3)$ , queremos mostrar que  $G = T$ . Antes de qualquer coisa, vamos descrever nosso plano. É um bom começo mostrar que  $|G| = |T|$ . Além disso, note que o conjunto  $V$  dos vértices do tetraedro e a órbita  $O_3$  têm ambos quatro elementos (Teorema de Órbita-Estabilizador). Nossa estratégia é mostrar que  $O_3 = V$ . Feito isso, teremos vencido, pois  $G$  age na órbita  $O_3 = V$ , donde  $G \subseteq T$ ; a outra inclusão segue facilmente porque já teremos mostrado que  $|G| = |T|$ .

Coloquemos o plano em ação. A Equação 3 nos dá que  $|G| = 12$ , que é justamente a ordem de  $T$ . Dado  $x_3 \in O_3$ , note que seu estabilizador tem três elementos, logo  $\text{Stab}(x_3) = \{1, h, h^2\}$ , em que  $h$  é a rotação por um ângulo  $2\pi/3$  em torno da reta  $\ell_{x_3}$  definida por  $0$  e  $x_3$ . Vamos ver como  $\text{Stab}(x_3)$  age em  $O_3$ . Como  $|O_3| = 4$ , existe um ponto  $gx_3 \in O_3$  diferente de  $x_3$ . Mas aí  $gx_3, hgx_3, h^2gx_3$  são os vértices de um triângulo equilátero num plano  $\sigma$  ortogonal a  $\ell_{x_3}$  (\*); resta mostrar que a distância de  $\sigma$  a  $x_3$  é tal que todas as faces do poliedro formado sejam triângulos equiláteros. Para isso, vamos usar um argumento de simetria. Seja  $d$  a distância de  $\sigma$  a  $x_3$ . Com um pouco de geometria analítica, é possível mostrar que o tetraedro de vértices  $x_3, gx_3, hgx_3, h^2gx_3$  tem arestas com medidas todas iguais se, e somente se, temos  $d = 4/3$ . Por absurdo, suponha que  $d \neq 4/3$ ; nesse caso, as faces que não estão em  $\sigma$  seriam triângulos não equiláteros. Mas aí podemos repetir o argumento que fizemos até agora com  $x_3$  para outro ponto  $h^k gx_3 \in O_3$ , escolhido  $k \in \{0, 1, 2\}$ . Assim, pelo raciocínio que usamos para chegar em (\*), os outros pontos  $h^j gx_3$ , para  $j \neq k$ , serão vértices de um triângulo equilátero, absurdo. Então  $G = T$ , como queríamos.

## Referências

ARTIN, Michael. **Algebra**. Nova Jersey: Pearson, 1991.

MARTINS, Sérgio Tadao; TENGAN, Eduardo. **Álgebra exemplar: Um estudo da Álgebra através de exemplos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. (Projeto Euclides).

SIDNEY), Daniel Chan (UNSW. **Classification of the finite subgroups of SO(3)**. Youtube. 2018. Disponível em:

<https://youtu.be/0c4Kq-VY1qc?si=f15vmUFxzUyJRpM-j>.

# Teorema de reconstrução de Tannaka para álgebras de Hopf

João Gabriel Chiorato\*  
jgchiorato@gmail.com<sup>1</sup>

Marcelo Muniz Silva Alves (Orientador)  
marcelomsa@ufpr.br<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** Álgebra, Categorias, Álgebras de Hopf, Reconstrução de Tannaka.

## Resumo:

Apresentamos a definição e os principais resultados de uma álgebra de Hopf  $H$ . Para a construção desta estrutura, estudamos as definições de álgebras, coálgebras e biálgebras, bem como seus principais resultados. Assim, definimos biálgebras a partir da compatibilidade das estruturas de álgebra e coálgebra. A partir destes resultados, foram estudadas as álgebras de Hopf, bem como seus principais exemplos e resultados clássicos (ver [1]). Também, estudamos os conceitos iniciais sobre módulos sobre uma álgebra.

Além disso, apresentamos alguns resultados que nos permitem recuperar as estruturas de biálgebras e álgebras de Hopf a partir de suas categorias de módulos. Para isso, estudamos conceitos e resultados iniciais de teoria de categorias, bem como estudamos noções preliminares de funtores e transformações naturais. Assim, definimos categorias e funtores monoidais e estudamos um resultado de reconstrução de biálgebras a partir da categoria de módulos à esquerda sobre uma álgebra e um functor monoidal. Definimos categorias monoidais rígidas e mostramos que se  $H$  é uma álgebra de Hopf, então a categoria dos  $H$ -módulos à esquerda é rígida. Assim, apresentamos o teorema de reconstrução de Tannaka para álgebras de Hopf, que nos dá uma relação biunívoca entre álgebras de Hopf e uma categoria monoidal rígida junta de um functor que preserva duais (ver [4]).

## Referências

- [1] FERREIRA, V.; MURAKAMI, L. **Uma introdução às álgebras de Hopf**. Editora Livraria da Física, 2020.
- [2] ALVES, M. M. S.; BATISTA, E. **An introduction to Hopf algebras: A categorical approach**. XXIII Brazilian Algebra Meeting, 2014.

---

\*Bolsista do PIBIC-CNPq

- [3] ETINGOF, P.; GELAKI, S.; NIKSHYCH, D.; OSTRIK, V. **Tensor categories**. American Mathematical Society, 2016.
- [4] VERCRUYSSSE, J.; **Hopf algebras—Variant notions and reconstruction theorems**. 2012, arXiv:1202.3613v1 [math.RA].

# Álgebras de Hopf: a biálgebra tensorial em uma coálgebra e a álgebra de Sweedler

Kaiky Yuji Ishiy\*

kaikyishiy@gmail.com<sup>1</sup>

Fernando Araujo Borges (Orientador)

fndbrg@gmail.com<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná (UFPR)

**Palavras-chave:** álgebras de Hopf, álgebra de Sweedler, álgebras de Taft.

## Resumo:

O objetivo deste trabalho é dar uma introdução às álgebras de Hopf e, em seguida, apresentar o menor exemplo de álgebra de Hopf não comutativa e não cocomutativa, descrito por Sweedler. Serão apresentados os conceitos de álgebra (utilizando produtos tensoriais), coálgebra e biálgebra, a fim de definir álgebra de Hopf.

Uma  $K$ -**álgebra** (associativa e com unidade) é uma tripla ordenada  $(A, m, \mu)$ , em que  $A$  é um  $K$ -espaço vetorial e  $m : A \otimes A \rightarrow A$ ,  $\mu : K \rightarrow A$  são aplicações lineares tais que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes \text{id}} & A \otimes A \\
 \downarrow \text{id} \otimes m & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes A & & \\
 & \nearrow \mu \otimes \text{id} & \downarrow m & \nwarrow \text{id} \otimes \mu & \\
 K \otimes A & & A & & A \otimes K \\
 & \searrow \text{id} & & \swarrow \text{id} & \\
 & & & & A
 \end{array}$$

As aplicações  $m$  e  $\mu$  são chamadas **multiplicação** e **aplicação unidade**, respectivamente.

Observe que a definição de  $K$ -álgebra acima é diferente da usual, na qual  $A$  é um  $K$ -espaço vetorial munido de uma multiplicação bilinear  $\cdot : A \times A \rightarrow A$  de forma que  $A$  seja um anel associativo e com unidade. Mostra-se que ambas são equivalentes, utilizando-se a relação  $m(a \otimes b) = a \cdot b$ . A definição via produtos tensoriais, no entanto, tem importância fundamental neste trabalho, pois ao ser dualizada, fornece uma nova estrutura: a de coálgebra.

Uma  $K$ -**coálgebra** (com counidade) é uma tripla ordenada  $(C, \Delta, \varepsilon)$ , em que  $C$  é um  $K$ -espaço vetorial e  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ ,  $\varepsilon : C \rightarrow K$  são aplicações lineares tais que

\*Bolsista do PET Matemática - UFPR.

os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
 \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \otimes \text{id} \\
 C \otimes C & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta} & C \otimes C \otimes C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & C & \\
 \cong \swarrow & & \searrow \cong \\
 K \otimes C & & C \otimes K \\
 \varepsilon \otimes \text{id} \swarrow & \downarrow \Delta & \searrow \text{id} \otimes \varepsilon \\
 & C \otimes C &
 \end{array}$$

As aplicações  $\Delta$  e  $\varepsilon$  são chamadas **comultiplicação** e **counidade**, respectivamente.

A partir da definição usual de morfismos de álgebras (transformações lineares que também são homomorfismos de anéis), define-se morfismos de álgebras utilizando produtos tensoriais:

Sejam  $(A, m_A, \mu_A)$  e  $(B, m_B, \mu_B)$   $K$ -álgebras. Uma aplicação linear  $f : A \rightarrow B$  é um **morfismo de álgebras** se os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{m_A} & A \\
 \downarrow f \otimes f & & \downarrow f \\
 B \otimes B & \xrightarrow{m_B} & B
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & K & \\
 \mu_A \swarrow & & \searrow \mu_B \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Dualizando-se a definição acima, obtém-se a definição de morfismo de coálgebras:

Sejam  $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$  e  $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$   $K$ -coálgebras. Uma aplicação linear  $f : C \rightarrow D$  é um **morfismo de coálgebras** se os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{f} & D \\
 \downarrow \Delta_C & & \downarrow \Delta_D \\
 C \otimes C & \xrightarrow{f \otimes f} & D \otimes D
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{f} & D \\
 \Delta_C \swarrow & & \searrow \Delta_D \\
 & K &
 \end{array}$$

Uma  $K$ -**biálgebra** é uma quintupla ordenada  $(H, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$  tal que  $(H, m, \mu)$  seja uma álgebra, e  $(H, \Delta, \varepsilon)$  seja uma coálgebra, satisfazendo uma das seguintes condições equivalentes:

1.  $m$  e  $\mu$  são morfismos de coálgebras;
2.  $\Delta$  e  $\varepsilon$  são morfismos de álgebras.

Se  $C$  é uma  $K$ -coálgebra e  $A$  é uma  $K$ -álgebra, então  $\text{Hom}(C, A)$  é uma álgebra com o **produto de convolução**, definido por  $f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$ .

Uma **álgebra de Hopf** é uma biálgebra  $(H, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$  em que  $\text{id}_H$  é invertível em  $\text{Hom}(H, H)$  com o produto de convolução  $*$ . O inverso de  $\text{id}_H$  é chamado **antípoda** para  $H$ , e usualmente denotado por  $S$ .

A **álgebra tensorial** em um  $K$ -espaço vetorial  $V$  é um par  $(\iota, T(V))$  que satisfaz a seguinte propriedade universal:

1.  $T(V)$  é uma  $K$ -álgebra e  $\iota : V \rightarrow T(V)$  é uma aplicação linear.

2. Se  $A$  é uma  $K$ -álgebra e  $f : V \rightarrow A$  é uma aplicação linear, então existe uma aplicação linear  $F : T(V) \rightarrow A$  dada por  $F \circ \iota = f$ .

Se  $C$  é uma  $K$ -coálgebra, então o par  $(\iota, T(C))$  definido acima satisfaz:

1.  $T(C)$  é uma  $K$ -biálgebra e  $\iota : C \rightarrow T(C)$  é um morfismo de coálgebras.
2. Se  $A$  é uma  $K$ -biálgebra e  $f : C \rightarrow A$  é um morfismo de coálgebras, então existe um morfismo de biálgebras  $F : T(C) \rightarrow A$  dado por  $F \circ \iota = f$ .

Nessas condições,  $T(C)$  é uma **biálgebra tensorial** na coálgebra  $C$ .

Se  $A$  é uma  $K$ -biálgebra, então existe uma  $K$ -coálgebra  $C$  e um morfismo sobrejetor  $F : T(C) \rightarrow A$ . Em particular, toda biálgebra é o quociente de uma biálgebra tensorial.

A **álgebra de Sweedler** sobre  $K$  é a álgebra dada pelo quociente da álgebra livre  $K\langle z_1, z_2 \rangle$  pelo ideal  $I = \langle z_1^2 - 1, z_2^2, z_1 z_2 + z_2 z_1 \rangle$ . Denota-se  $H_4 = K\langle z_1, z_2 \rangle / I$ , e também  $g = z_1 + I, x = z_2 + I$ . Em  $H_4$ , valem as relações

$$g^2 = 1, x^2 = 0, gx = -xg.$$

O conjunto  $\{1, g, x, gx\}$  forma uma base de  $H_4$  como  $K$ -espaço vetorial, e portanto  $H_4$  possui dimensão 4. A terna  $(H_4, m, \mu, \Delta, \varepsilon, S)$  é uma álgebra de Hopf, em que a aplicação linear  $S : H_4 \rightarrow H_4$  é definida por

$$S(1) = 1, S(g) = g, S(x) = -gx, S(gx) = -xg.$$

Se  $K$  possui característica  $\neq 2$ , então  $H_4$  é uma álgebra de Hopf não comutativa e não cocomutativa.

A álgebra de Sweedler é um caso particular de **álgebras de Taft**, que são dadas pelo quociente da álgebra livre  $K\langle z_1, z_2 \rangle$  pelo ideal  $I = \langle z_1^n - 1, z_2^n, z_1 z_2 - q z_2 z_1 \rangle$ . Denota-se  $H_{n,q} = K\langle z_1, z_2 \rangle / I$ , e também  $g = z_1 + I, x = z_2 + I$ . Em  $H_{n,q}$ , valem as relações

$$g^n = 1, x^n = 0, gx = qxg.$$

O conjunto  $\{g^i x^j \mid 0 \leq i, j \leq n-1\}$  forma uma base de  $H_{n,q}$  como  $K$ -espaço vetorial, e portanto  $H_{n,q}$  possui dimensão  $n^2$ .

## Referências

- [1] FERREIRA, V. O.; MURAKAMI, L. S. I. **Uma introdução às álgebras de Hopf**. Editora Livraria da Física, 2020.
- [2] RADFORD, D. E. **Hopf algebras**. World Scientific, 2011.

# Álgebras e Superálgebras de Jordan Excepcionais

Lucas Cabral Port\*

lucas.cabral@ufpr.br<sup>1</sup>

Profa. Maria Eugenia Martin (Orientadora)

eugenia@ufpr.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>UFPR

**Palavras-chave:** álgebras de Jordan, superálgebras de Jordan, superálgebra de Jordan excepcional.

**Resumo:** A seguir, introduziremos as definições básicas necessárias para contextualizar o problema tratado neste projeto. As referências principais para os tópicos discutidos são [1], [2] e [3].

Seja  $\mathbb{K}$  um corpo de char( $\mathbb{K}$ )  $\neq 2$ . Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra de Jordan  $(J, \cdot)$  é uma  $\mathbb{K}$ -álgebra comutativa que satisfaz a identidade de Jordan:

$$(a^2 \cdot b) \cdot a = a^2 \cdot (b \cdot a) \text{ para todo } a, b \in J. \quad (1)$$

Dada uma  $\mathbb{K}$ -álgebra associativa (não necessariamente comutativa)  $(A, \cdot)$  podemos definir no espaço vetorial subjacente a  $A$  uma nova operação de produto  $\odot : A \times A \rightarrow A$  dada por

$$a \odot b = \frac{1}{2}(a \cdot b + b \cdot a) \text{ para todo } a, b \in A. \quad (2)$$

Uma conta direta mostra que  $(A, \odot)$  é uma álgebra de Jordan e a denotaremos por  $A^+$ . Essa simples construção da origem a uma pergunta natural: toda álgebra de Jordan é isomorfa a uma subálgebra de uma álgebra do tipo  $A^+$  onde  $A$  é uma  $\mathbb{K}$ -álgebra associativa? É conhecido que para o caso de álgebras de Lie a resposta é positiva mas isso não acontece nas álgebras de Jordan, veja [1].

**Definição:** Uma  $\mathbb{K}$ -álgebra de Jordan  $J$  que é isomorfa a uma subálgebra de  $A^+$ , onde  $A$  é uma  $\mathbb{K}$ -álgebra associativa, é dita uma álgebra de Jordan **especial**. As álgebras de Jordan que não são especiais são denominadas **excepcionais**.

Analogamente, define-se *superálgebra* de Jordan especial e excepcional. A saber,

**Definição:** Uma **superálgebra de Jordan**  $J = J_0 + J_1$  é uma álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada, i.e.  $J_0$  e  $J_1$  são subespaços de  $J$  que verificam  $J_i \cdot J_j \subseteq J_{i+j}$  para todo  $i, j \in \mathbb{Z}_2$ , a qual satisfaz as condições de supercomutatividade  $a \cdot b = (-1)^{|a||b|} b \cdot a$  e de superidentidade

---

<sup>1</sup>Voluntário- PVA

de Jordan

$$(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) + (-1)^{|b||c|}(a \cdot c) \cdot (b \cdot d) + (-1)^{|b||c|+|b||d|+|c||d|}(a \cdot d) \cdot (b \cdot c) = \\ ((a \cdot b) \cdot c) \cdot d + (-1)^{|c||d|+|b||c|}((a \cdot d) \cdot c) \cdot b + (-1)^{|a||b|+|a||c|+|a||d|+|c||d|}((b \cdot d) \cdot c) \cdot a,$$

para todos  $a, b, c, d \in J_{\bar{0}} \cup J_{\bar{1}}$ , em que  $|a| = i$  se  $a \in J_{\bar{i}}$ . Uma superálgebra de Jordan é dita **especial** se for uma subálgebra de uma álgebra associativa  $A = A_{\bar{0}} + A_{\bar{1}}$ ,  $\mathbb{Z}_2$ -graduada com novo produto  $\odot$  definido por

$$a \odot b = \frac{1}{2} (a \cdot b + (-1)^{|a||b|} b \cdot a) \text{ para todo } a, b \in A_{\bar{0}} \cup A_{\bar{1}}$$

e é dita **excepcional** caso contrário.

A motivação deste trabalho se baseia em responder ao problema de determinar a dimensão minimal de uma álgebra de Jordan *excepcional*. Este problema, foi apresentado em “Dniester notebook: unsolved problems in the theory of rings and modules” por H. Petersson e A. M. Slin’ko, veja [4]. Em particular, iremos apresentar os avanços quanto a resolução de uma versão análoga deste problema para superálgebras de Jordan que apareceu pela primeira vez no artigo [5] de I. Shestakov, M. C. López-Díaz e S. Sverchkov. Neste artigo, os autores construíram um exemplo de uma superálgebra de Jordan excepcional de dimensão 7. Este é o exemplo de menor dimensão que se conhece até o presente.

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é apresentar a fundamentação teórica para encontrar e classificar todas as superálgebras de Jordan de dimensão pequena e verificar se elas são especiais ou excepcionais até determinar a dimensão minimal. Atualmente é conhecida a classificação completa das superálgebras de Jordan de dimensão menor ou igual a 4, (veja [6] e [7]).

## Referências

- [1] JACOBSON, N. **Structure and representations of Jordan algebras**. Volume 39 of American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, 1968.
- [2] MARTIN, M. E. **Deformações e isotopias de álgebras de Jordan**. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013. doi:10.11606/T.45.2013.tde-10102013-183947. Acesso em: 2024-09-24.
- [3] MARTÍNEZ, C. e ZELMANOV, E. **Representation theory of Jordan Superalgebras I**. Transactions of the American Mathematical Society, 362(2), 815–846, 2010.
- [4] FILIPOV, V. T.; KHARCHENKO, V. K. e SHESTAKOV, I. **Dniester Notebook: unsolved problems in the theory of rings and modules**, Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences Siberian Branch, Novosibirsk, 4<sup>a</sup> ed., 1993.
- [5] LÓPEZ-DÍAZ, M. C.; SHESTAKOV, I. e SVERCHKOV, S. **On speciality of Bernstein Jordan algebras**. Communications in Algebra, v. 28, n. 9, p. 4375-4387, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/00927870008827094>. Acesso em: 12 ago. 2024.

- [6] MARTIN, M. E. **Classification of three-dimensional Jordan superalgebras.** arXiv:1708.01963, pp. 1–15, 2017.
- [7] MARTIN, M. E. **On speciality of four-dimensional Jordan superalgebras.** Preprint.

# Dual finito e Álgebras de Hopf

Samuel Adam Trindade de Souza\*  
samuel.trindadesouz@gmail.com<sup>1</sup>

Marcelo Muniz Silva Alves (Orientador)  
marcelomsa@ufpr.br<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bacharelado em Matemática - UFPR

<sup>2</sup>Professor no Departamento de Matemática - UFPR

**Palavras-chave:** Álgebra, Álgebras de Hopf, Dual finito.

## Resumo:

Neste estudo, nos concentramos em analisar a definição, os resultados e os exemplos centrais de álgebras de Hopf. Para poder abordar o tema, foi necessário primeiro compreender o conceito de produto tensorial, que estrutura todos os seguintes objetos do estudo.

Em seguida, definimos o que são álgebras, coálgebras e biálgebras, além de suas principais propriedades e exemplos mais importantes. Ainda nesse segmento, seguindo o texto de [1] e [2], vimos que, se  $C$  e  $D$  são coálgebras e  $f : C \rightarrow D$  é um morfismo de coálgebra, então as funções lineares de  $C$  para  $\mathbb{K}$ , ou  $C^*$ , admite estrutura de álgebra induzida pela estrutura de  $C$ , chamada de *álgebra dual*, e  $f^* : D^* \rightarrow C^*$  é um morfismo de álgebra.

Além disso, se  $A$  e  $B$  são álgebras de dimensão finita e  $f : A \rightarrow B$  é um morfismo de álgebra, então  $A^*$  admite estrutura de coálgebra induzida pela estrutura de  $A$ , chamada de *coálgebra dual*, e  $f^* : B^* \rightarrow A^*$  é um morfismo de coálgebras.

As distinções entre os dois casos justificam o estudo do *dual finito* de uma álgebra. Dada  $A$  álgebra, o dual finito de  $A$ , denotado por  $A^\circ$ , é definido como o subespaço vetorial de  $A^*$  tal que  $\forall f \in A^*$  existe um ideal  $I \subset \ker(f)$  com  $\dim(\frac{A^*}{I})$  finita. Com essa definição mostramos que  $A^\circ$  estende a construção da coálgebra dual para álgebras de dimensão infinita, ou seja, se  $A$  e  $B$  são álgebras de dimensão infinita e  $f : A \rightarrow B$  é um morfismo de álgebra, o dual finito de  $A$ , ou  $A^\circ$ , é o maior subespaço de  $A^*$  que admite estrutura de coálgebra induzida pela estrutura de  $A$ , e  $f^\circ = f^*|_{B^\circ} : B^\circ \rightarrow A^\circ$  é um morfismo de coálgebras.

Considerando os tópicos já mencionados, seguimos [1] e [3], onde estudamos o caso do dual finito  $(\mathbb{K}G)^\circ$  para um grupo  $G$  de ordem infinita. Esta álgebra de Hopf é, a menos de isomorfismo, a *álgebra das funções de representações de  $G$*  e é denotada por  $R_{\mathbb{K}}(G)$ .

---

\*Bolsista do PET-Matemática.

Neste caso, há uma interpretação em termos de representações do grupo  $G$ : um funcional  $f$  pertence a  $R_{\mathbb{K}}(G)$  se, e somente se, existir uma representação  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ , onde  $V$  é um espaço de dimensão finita, juntamente com um vetor  $v \in V$  e um funcional linear  $\phi \in V^*$ , tais que  $f(g) = \phi(\rho(g)v)$  para todo  $g \in G$ . Por fim, mostramos que, quando  $H$  é uma biálgebra, o espaço  $H^\circ$  também é uma biálgebra, e que  $H^\circ$  se torna uma álgebra de Hopf quando  $H$  é uma álgebra de Hopf.

## Referências

- [1] DĂSCĂLESCU, S.; NĂSTĂSESCU, C.; RAIANU, Ș. **Hopf algebras**: an introduction. New York: Marcel Dekker, 2001.
- [2] FERREIRA, V. O.; MURAKAMI, L. S. I. **Introdução às álgebras de Hopf**. 2019.
- [3] TIMMERMANN, T. **An invitation to quantum groups and duality**: from Hopf algebras to multiplicative unitaries and beyond. Zürich: European Mathematical Society, 2008.

# *Análise Matemática*

## *Comissão Científica:*

Prof. Dr. Alexandre Kirilov  
Prof. Dr. Fernando de Ávila Silva  
Prof. Dr. Jurandir Ceccon  
Prof. Dr. Manuel Jesus Cruz Barreda  
Prof. Dr. Pedro Danizete Damázio  
Prof. Dr. Raúl Prado Raya  
Prof. Dr. Ricardo Paleari da Silva  
Prof. Dr. Wagner Augusto Almeida de Moraes

# A desigualdade triangular no espaço $l^p$

Amanda Carolina Coelho\*  
amandacarolinacoelho@gmail.com<sup>1</sup>

Felipe Vieira (Orientador)  
f.vieira@ufsc.br<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Universidade Federal de Santa Catarina - campus Blumenau

**Palavras-chave:** espaço métrico, desigualdade triangular, Hölder, Minkowski.

## Resumo:

Neste trabalho nos dedicamos a estudar o espaço  $l^p$ , com maior destaque na importância das inequações de Hölder e Minkowski na demonstração da desigualdade triangular.

Dado um número real  $p \geq 1$ , os elementos do espaço  $l^p$  são, por definição, seqüências  $x = (x_j) = (x_1, x_2, \dots)$  de números reais tais que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty$$

Sobre  $l^p$ , dados elementos  $x$  e  $y$ , definimos

$$d(x, y) = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p \right)^{1/p}$$

Para que  $(l^p, d)$  seja um espaço métrico é necessário que ele satisfaça, dados elementos  $x, y, z$ , os seguintes axiomas:

(M1)  $d$  tem valor real, finito e positivo.

(M2)  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ .

(M3)  $d(x, y) = d(y, x)$ .

(M4)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ . (**Desigualdade Triangular**)

O maior desafio é demonstrar a desigualdade triangular e, para isso, utilizamos a desigualdade de Hölder

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j| \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^q \right)^{1/q}$$

---

\*Estudante voluntária do Programa de Iniciação Científica.

onde  $p > 1$  e

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

além da desigualdade de Minkowski

$$\left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j| \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^q \right)^{1/q}$$

em que  $x = (x_j)$  e  $y = (y_j)$ .

Estas duas são de suma importância no estudo do espaço  $l^p$  e suas distintas aplicações, e com elas conseguimos montar um passo-a-passo para a demonstração da desigualdade triangular em  $l^p$ .

Este estudo foi motivado pela participação no projeto de Iniciação Científica em Análise Funcional, que analisa o livro "Introductory Functional Analysis with Applications" de Kreyszig em 2024. O projeto tem aprofundado meus conhecimentos teóricos e desenvolvido habilidades críticas de análise e interpretação matemática.

## Referências

- [1] ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. 10. ed., Porto Alegre: Bookman, 2014.
- [2] ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear: com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- [3] KREYSZIG, Erwin. **Introductory Functional Analysis: with Applications**. New York: Wiley, 1989.
- [4] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. 5. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

# Números e Polinômios de Bernoulli: Múltiplas Conexões e Aplicações

Ana Caroline da Silva\*  
23000409@uepg.br<sup>1</sup>

Marciano Pereira (Orientador)  
marciano@uepg.br<sup>2</sup>

Marcos Calçada (Orientador)  
mcalcada@uepg.br<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG

**Palavras-chave:** Números de Bernoulli, Polinômios de Bernoulli, Função Zeta.

## Resumo:

Este trabalho teve como objetivo realizar um estudo dos números e polinômios de Bernoulli, explorar suas múltiplas conexões com as conhecidas funções Zeta, Gama e Teta, bem como fazer importantes aplicações na Teoria dos Números. Investigaram-se e analisaram-se as diferentes maneiras de introduzir e caracterizar os polinômios de Bernoulli e, posteriormente, obtiveram-se os Números de Bernoulli. Além disso, calcularam-se as séries de Fourier para os polinômios de Bernoulli, que permitiram relacionar a função Zeta com números primos e com os números de Bernoulli; estudaram-se as séries de potências que geram os polinômios e os números de Bernoulli, o que por sua vez permitiram obter propriedades de simetria para esses polinômios e a expansão de Euler-Maclaurin, a qual foi empregada em algumas aplicações. Para tanto, usou-se as ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral e noções de convergência de séries.

## Introdução:

Os números e polinômios de Bernoulli, descobertos independentemente pelo matemático suíço Jacob Bernoulli e pelo japonês Seki Takakazu no século XVIII, formam uma vasta rede de conexões matemáticas que ainda desperta grande interesse na matemática moderna. Neste resumo, exploramos as definições e as caracterizações dos números e polinômios de Bernoulli, bem como as suas múltiplas conexões e aplicações. Por fim, destacaremos sua importância em áreas como análise e teoria dos números.

---

\*Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - PIBIC e aluna do curso de Bacharelado em Matemática Aplicada.

### Principais Resultados:

A seguir, exploramos as definições e propriedades fundamentais relacionadas aos números e polinômios de Bernoulli, bem como algumas de suas principais aplicações e conexões.

### Números de Bernoulli:

Os números de Bernoulli, denotados por  $B_m$ , com  $m \geq 0$ , são definidos por meio da função geradora:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \frac{B_m}{m!}. \quad (1)$$

Além disso, esses números podem ser determinados por meio de uma relação de recorrência. Tomando-se, inicialmente, que  $B_0 = 1$ , para valores de  $m \geq 1$ , a recorrência é dada por

$$B_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+1}{j} B_j. \quad (2)$$

É importante destacar que, para naturais ímpares  $m$  maiores do que 1, temos  $B_m = 0$ . Isto é, todos os números de Bernoulli de índice ímpar, exceto  $B_1$ , são nulos [1] e [3].

### Polinômios de Bernoulli:

Os polinômios de Bernoulli, denotados por  $B_m(x)$ , são definidos pela série de potência

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m(x)t^m}{m!}, \quad (3)$$

onde  $t \in (-2\pi, 2\pi)$  e  $t \neq 0$ . Esses polinômios são os únicos que satisfazem as seguintes propriedades:

$$B_0(x) = 1, \quad B'_m(x) = mB_{m-1}(x) \quad \text{e} \quad \int_0^1 B_m(x) dx = 0.$$

Há uma conexão direta entre os polinômios e os números (2) por meio de

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k x^{m-k}. \quad (4)$$

É importante salientar que  $B_m = B_m(0)$ .

Os polinômios de Bernoulli  $B_1(x)$  e  $B_m(x)$ , para  $m$  ímpar, usando resultados conhecidos das séries de Fourier, podem ser escritos como uma série de Fourier em senos, enquanto  $B_m(x)$ , para  $m$  par, possui a série de Fourier em cossenos [4].

### Conexões:

Os números de Bernoulli estão presentes em diversas expansões de Taylor de funções trigonométricas. Por exemplo, eles aparecem nas expansões das funções  $x \coth(x)$  e  $z \cot(z)$  [2] e [3]. Além disso, os números de Bernoulli estão presentes na função Zeta de Riemann para valores  $m$  par, com  $m \geq 2$ , bem como possuem uma

relação com a função Gama [3] e [4].

### Aplicações:

Dada uma função  $f$  definida num intervalo  $[a, b]$ , onde  $a$  e  $b$  são naturais e  $f \in C^m([a, b])$ , a soma dos valores de  $f$  nos inteiros do intervalo  $[a, b]$  possui a seguinte aproximação, a qual é chamada de Fórmula de Euler-Maclaurin,

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{i=1}^m \frac{B_i}{i!} (f^{(i-1)}(b) - f^{(i-1)}(a)) + R_m. \quad (5)$$

Utilizando a Fórmula de Euler-Maclaurin, obtivemos uma expressão para a constante de Euler-Mascheroni  $\gamma$  em termos dos números de Bernoulli [3], encontramos uma aproximação para o fatorial de  $n$ , para  $n$  grande [3], e provamos a lei de simetria da função Teta de Jacobi [4].

### Conclusão:

Os números e polinômios de Bernoulli, descobertos independentemente por Jacob Bernoulli e Seki Takakazu, formam sequências em  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{Q}[x]$ , respectivamente. Suas aplicabilidades se estendem desde expansões de séries até conexões profundas com a função Zeta de Riemann. Portanto, os números e polinômios de Bernoulli são essenciais em diversas aplicações teóricas e práticas, justificando seu estudo contínuo.

### Referências

- [1] APOSTOL, T. M. An elementary view of Euler's summation formula. **The American Mathematical Monthly**, v. 106, n. 5, p. 409–418, 1999.
- [2] BROCKVELD, P. **Os números e Bernoulli como um exemplo de relação entre o discreto e o contínuo**. 2021. Dissertação (Mestrado PROFMAT), UFSC, Florianópolis (SC), 2021.
- [3] LARSON, N. D. **The Bernoulli number: a brief primer**. Monografia, Whitman College, 2019.
- [4] MIRKOSKI, M. L. **Os números e polinômios de Bernoulli**. 2018. Dissertação (Mestrado PROFMAT), UEPG, Ponta Grossa (PR), 2018.

# O fenômeno J. W. Gibbs

Camilly Silva dos Anjos\*  
camillyanjos@ufpr.br<sup>1</sup>

Prof. Alexandre Kirilov (Orientador)  
akirilov@ufpr.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná - UFPR

**Palavras-chave:** Séries de Fourier, Fenômeno de Gibbs, História da Ciência.

## Resumo:

A análise de Fourier oferece ferramentas e técnicas fundamentais para o estudo de equações diferenciais parciais, com aplicações em processamento de sinais, condução de calor e várias outras áreas da física e engenharia.

Este projeto iniciou-se com o estudo do método de separação de variáveis, introduzido por Fourier, para problemas de valor de contorno envolvendo equações do calor e da onda. A partir dessa abordagem, fica evidenciado a Série de Fourier na forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right],$$

com os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx, \quad n \geq 1, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Na sequência passamos ao estudo da teoria sobre a convergência das Séries de Fourier para funções periódicas e suas propriedades, nas quais fica demonstrado que se uma função é diferenciável por partes, então sua Série de Fourier converge pontualmente para a média de seus limites laterais neste ponto. Em particular, para funções diferenciáveis, a Série de Fourier converge para a própria função.

No caso particular em que a função apresenta uma descontinuidade do tipo salto, observa-se que as somas parciais da Série de Fourier nas proximidades dessa descontinuidade exibem um fenômeno oscilatório muito característico, que fica evidentes para qualquer observador.

---

\*Programa de voluntariado acadêmico da UFPR

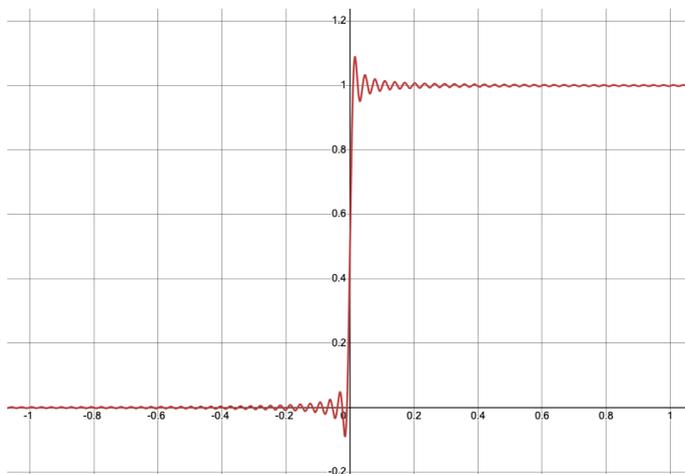


Figura 1: Fenômeno de Gibbs para a função de Heaviside com  $n = 100$ .

Esse fenômeno é conhecido como Fenômeno de Gibbs, em homenagem ao cientista americano Josiah W. Gibbs (1839–1903), cujas contribuições teóricas foram fundamentais para a física, química e matemática. Gibbs colaborou com Maxwell e Boltzmann na criação da mecânica estatística, fez contribuições cruciais para a termodinâmica e foi elogiado por Albert Einstein como “a maior mente na história americana”.

Neste trabalho, falaremos um pouco mais das contribuições de J. W. Gibbs para a ciência e provaremos que, embora a convergência pontual ocorra, a diferença absoluta entre a função e a soma parcial da série sempre possui um ponto no qual tal diferença é de aproximadamente 9% da amplitude do salto.

## Referências

- [1] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- [2] BOYGE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- [3] OPPERMANN, A. **Conheça J. Willard Gibbs: o mais brilhante João-Ninguém**. Disponível em: <https://super.abril.com.br/ciencia/josiah-willard-gibbs-o-mais-brilhante-joao-ninguem/>. Acessado em: 04/09/2024.

# Cálculo Fracionário e Sua aplicação na Modelagem do Decaimento do Césio-137

Daniel Thiago Ivanchechen\*  
daniel.ivanchechen@ufpr.br <sup>1</sup>

Alexandre Kirilov (Orientador)  
akirilov@ufpr.br <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná - UFPR

**Palavras-chave:** Cálculo fracionário. Integral de Riemann-Liouville. Derivada de Caputo.

## Resumo:

O Cálculo de Ordem Arbitrária, atualmente conhecido como Cálculo Fracionário, oferece métodos e ferramentas para o cálculo de derivadas e integrais de ordens não inteiras, mantendo a noção de ordem como o número de vezes que se realiza uma derivação ou integração, no caso de ordens inteiras. Essa abordagem expande o cálculo tradicional ensinado nos cursos superiores e foi mencionada pela primeira vez em 1695, com o cálculo da derivada de meia ordem apresentada por Leibniz e l'Hôpital. Além deles, matemáticos como Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, e Caputo desempenharam papéis fundamentais no desenvolvimento do Cálculo Fracionário.

Este trabalho busca traçar a evolução do cálculo de ordem não inteira, com o objetivo de obter formulações modernas que generalizem as expressões para derivadas e integrais de ordens arbitrárias. Dada a existência de diferentes abordagens para o cálculo fracionário, é importante destacar que nosso estudo se baseia na teoria da integral de Riemann-Liouville e a Derivada de Caputo.

Nossa investigação começou com o estudo das funções Gamma, Beta e de Mittag-Leffler de dois parâmetros, descritas abaixo:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0,$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0$$

e

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0$$

---

\*Bolsista do Programa PICME, Voluntário do PET.

e de suas principais propriedades, obtendo assim as ferramentas fundamentais para o cálculo das integrais repetidas de Cauchy, as quais surgem naturalmente na teoria e são essenciais para a compreensão de suas fórmulas e aplicações.

Na sequência passamos ao Cálculo das integrais repetidas de Cauchy, obtendo a integral de Riemann-Liouville

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0, \quad \text{Re}(\alpha) > 0$$

e da derivada de Caputo de ordem  $\alpha \in (0, 1)$

$${}^C D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] dt, \quad 0 < \alpha < 1$$

obtendo resultados como a integral de meia ordem da função trigonométrica  $\text{sen}(x)$

$$I^{\frac{1}{2}}[\text{sen}(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\frac{3}{2}}}{\Gamma(2k+\frac{5}{2})}$$

e a derivada de meia ordem de uma função polinomial qualquer

$${}^C D^{\frac{1}{2}}[cx^n] = c \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} x^{n-\frac{1}{2}}, \quad c, n \in \mathbb{R}$$

com todos os resultados obtidos através do desenvolvimento das expressões mencionadas anteriormente, utilizando as técnicas conhecidas do cálculo tradicional.

Após o estudo dessas bases teóricas, passamos a explorar suas aplicações. Uma dessas aplicações é a modelagem do decaimento radioativo do Césio-137, elemento relacionado ao trágico episódio ocorrido em Goiânia, em 1987. Esse acidente resultou do manuseio indevido de um equipamento de radioterapia abandonado, que ainda continha Césio-137, levando à morte de quatro pessoas. A pesquisa busca, portanto, utilizar o Cálculo Fracionário para entender melhor alguns dos problemas relacionados ao decaimento radioativo deste elemento, em comparação com o modelo clássico usual.

## Referências

- [1] ZEISER, Mateus Henrique. **INTRODUÇÃO AO CÁLCULO FRACIONÁRIO COM APLICAÇÕES**. Santa Catarina: UFFS, 2023.
- [2] Das, s. **Kindergarten of Fractional Calculus**:. Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing, 2020.

# O espaço métrico discreto

Eduarda Caroline Klug\*  
carolineeduardaklug@gmail.com<sup>1</sup>

Felipe Vieira (Orientador)  
f.vieira@ufsc.br<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Universidade Federal de Santa Catarina - campus Blumenau

**Palavras-chave:** espaços métricos, espaço discreto, métrica.

## Resumo:

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar algumas propriedades interessantes dos espaços métricos discretos. Esses espaços desempenham um papel importante na ilustração de alguns conceitos fundamentais, ajudando em construções teóricas e exemplos. Além disso, desempenham um papel interessante na construção de contra-exemplos, o que nos ajuda a construir uma base importante para estudarmos estruturas mais complicadas da Análise Funcional.

Um espaço métrico é uma estrutura matemática formada por um conjunto  $X$  e uma função real  $d$  chamada métrica. Para que  $(X, d)$  seja considerado um espaço métrico, a função  $d$  deve satisfazer os seguintes axiomas para todo  $x, y, z \in X$ :

(M1)  $d$  tem valor real, finito e positivo.

(M2)  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ .

(M3)  $d(x, y) = d(y, x)$ .

(M4)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Já o espaço métrico discreto é um exemplo específico, onde a métrica  $d$  é definida da seguinte forma:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y, \\ 0, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Ou seja,  $d$  toma o valor 1 para qualquer par de pontos distintos e 0 para pares de pontos idênticos. Perceba, imediatamente, que essa métrica cria uma estrutura onde todos os pontos estão “isolados” uns dos outros.

---

\*Estudante voluntária do Programa de Iniciação Científica

Dentre as diversas propriedades que um espaço métrico discreto  $X$  satisfaz, podemos começar entendendo as bolas abertas. Por definição, uma bola em um espaço métrico é o conjunto de pontos que estão a uma distância menor que um número real  $r$  de um ponto fixo  $x_0$ . Assim, perceba que tal bola pode ter apenas dois resultados:

$$B(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\}, & \text{se } r < 1, \\ X, & \text{se } r \geq 1. \end{cases}$$

Com essa consideração sobre as bolas no espaço métrico discreto  $X$ , podemos perceber que todo subconjunto de  $X$  é aberto e fechado ao mesmo tempo.

Por conta de tal propriedade, podemos também estudar a separabilidade de  $X$ . Relembre que um espaço métrico é separável quando possui um subconjunto enumerável denso. Assim, se  $X$  é um espaço métrico discreto, podemos mostrar que ele é separável se, e somente se, ele é contável.

Outra importante consequência sobre  $X$  é que, diferentemente do conjunto dos números reais com a métrica usual do módulo, nem todo subconjunto fechado e limitado de  $X$  é compacto; basta considerar o próprio  $X$  se ele for infinito.

Também falaremos um pouco sobre as sequências em um espaço métrico discreto  $X$ . Particularmente, veremos que uma sequência em  $X$  é de Cauchy se, e somente se, ela eventualmente se torna constante. Da mesma forma, essa condição é necessária e suficiente para que uma sequência em  $X$  seja convergente.

Por fim, veremos que qualquer função cujo domínio seja um espaço métrico discreto – e cujo contradomínio seja qualquer outro espaço métrico — é contínua.

Este estudo, realizado como parte de um projeto de Iniciação Científica, teve como base o livro *“Introductory Functional Analysis with Applications”* do Kreyszig. A investigação das propriedades dos espaços métricos discretos aprofundou conceitos fundamentais da Análise Funcional, evidenciando a importância desses espaços na construção de exemplos e contraexemplos quanto na fundamentação teórica.

## Referências

- [1] ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. 10. ed., Porto Alegre: Bookman, 2014.
- [2] ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear: com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- [3] KREYSZIG, Erwin. **Introductory Functional Analysis: with Applications**. New York: Wiley, 1989.
- [4] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. 5. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

# Espaços $L^p$ e Soluções Fracas Para Equações Diferenciais

Elissandro Antonio Sikora\*

elissandrosikora@ufpr.br<sup>1</sup>

Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)

wagnermoraes@ufpr.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná - UFPR

**Palavras-chave:** Medida, Integral de Lebesgue, Espaços  $L^p$ .

## Resumo:

A partir das ideias naturais do que seria o “tamanho” de conjuntos, as medidas são funções  $\mu$  definidas em uma  $\sigma$ -Álgebra que preservam propriedades intuitivas nesse contexto, a saber:

(i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;

(ii)  $\mu(E) \geq 0$ , para todo conjunto  $E$ ;

(iii)  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$ , se a sequência  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  for disjunta.

Em particular, neste trabalho foi estudada a medida de Lebesgue, que generaliza a noção de comprimento de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ .

Com o auxílio da teoria da medida e o estudo de funções mensuráveis (funções que são suficientemente bem-comportadas) estabelecemos a definição da integral de Lebesgue, definida primeiramente para funções simples (combinações lineares de funções características de conjuntos mensuráveis) e, posteriormente, para funções mensuráveis e não-negativas. Por último, definimos tal integral para funções mensuráveis, da seguinte forma:

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

em que  $f^+ = \sup\{f, 0\}$  e  $f^- = \sup\{-f, 0\}$ , ou seja  $f = f^+ - f^-$ . Dizemos que uma função é integrável quando  $\int f \, d\mu$  for finito.

A integral de Lebesgue coincide com a de Riemann para funções limitadas e não negativas definidas em domínios limitados, mas nos possibilita integrar também outras funções que não são Riemann integráveis, como por exemplo a função de Dirichlet:

---

\*Bolsista PET-Matemática UFPR

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

A partir daí, surgem resultados importantes na teoria da integração, como o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

O conjunto das funções integráveis forma um espaço vetorial com as operações usuais de adição de funções e multiplicação por escalar. Uma forma natural de definir uma norma nesse espaço é através da expressão

$$\|f\| = \int |f| d\mu.$$

Embora essa expressão satisfaça as propriedades da desigualdade triangular e da homogeneidade, ocorre que funções não nulas podem ter norma igual a zero, ou seja, a integral de seu módulo pode ser zero. Para contornar essa situação, introduzimos uma relação de equivalência: duas funções são equivalentes se diferirem apenas em um conjunto de medida nula. Assim, o espaço quociente resultante é um espaço normado, denotado por  $L^1$ .

Após a definição do espaço  $L^1$ , podemos generalizar para os chamados espaços  $L^p$ , em que  $1 \leq p < \infty$ . O espaço  $L^p$  é formado por funções  $f$  tais que  $|f|^p \in L^1$ , ou seja, funções cuja  $p$ -ésima potência é integrável. A norma nesse espaço é definida por

$$\|f\|_p = \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Esses espaços  $L^p$  possuem diversas propriedades importantes. Por exemplo, todos eles são espaços de Banach, o que significa que toda sequência de Cauchy em  $L^p$  é convergente em relação à norma.

Um caso particularmente relevante é quando  $p = 2$ , pois a norma em  $L^2$  provém de um produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int fg d\mu.$$

Assim, o fato de  $L^2$  ser um espaço de Hilbert confere a ele uma estrutura que possibilita o uso de diversos conceitos e resultados da Análise Funcional, como o estudo de operadores lineares, operadores adjuntos e o Teorema de Representação de Riesz.

Por fim, abordamos o conceito de solução fraca para equações diferenciais. Mais precisamente, dado um operador diferencial  $L$  e  $f \in L^2$ , dizemos que  $u \in L^2$  é uma solução fraca da equação  $Lu = f$  se

$$\langle f, \psi \rangle = \langle u, L^* \psi \rangle,$$

para todo  $\psi \in C_0^\infty$ , em que  $L^*$  é o operador adjunto de  $L$  e  $C_0^\infty$  é o espaço das funções suaves com suporte compacto. Mostraremos que, se  $\Omega$  for um domínio limitado e  $f \in L^2(\Omega)$ , então, para qualquer operador diferencial  $L$  com coeficientes constantes, a equação  $Lu = f$  admite uma solução fraca  $u \in L^2(\Omega)$ .

## Referências

- [1] BARTLE, R.G. **The elements of integration**. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1966.
- [2] FITZPATRICK, P., ROYDEN, H. **Real Analysis**. Prentice Hall, 2010.
- [3] MARQUES, M. **Teoria da Medida** São Paulo: Editora Unicamp, 2009.
- [4] SHAKARCHI, R.; STEIN, E. M. **Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces**. Princeton University Press, 2005.

# O fatorial de $1/2$

Henrique Cuco\*

henriquecuco04@gmail.com<sup>1</sup>

Felipe Vieira (Orientador)

f.vieira@ufsc.br<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Universidade Federal de Santa Catarina - campus Blumenau

**Palavras-chave:** Função Gama, Fatorial, Integral.

## Resumo:

A Função Gama é uma função que generaliza o fatorial para um domínio maior do que apenas os números naturais e o zero. Ela é dada da seguinte forma:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$$

Nosso foco é analisar as restrições para sua unicidade - visto que há mais funções que generalizam o fatorial - e calcular o "fatorial" de  $1/2$ .

Dizemos que uma função  $G$  generaliza o fatorial quando ela satisfaz o seguinte:

$$\begin{cases} G(n+1) = n! & \forall n \in \mathbb{N} \cup 0 \\ G(x+1) = xG(x) & \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-, \end{cases}$$

Como mencionado, existem diversas funções que conseguem obedecer estas regras; por isso, adicionamos mais uma restrição para conseguir provar que a Função Gama será a única generalização do fatorial. Tal restrição é que  $\ln \Gamma(x)$  seja convexa.

Para, de fato, mostrarmos que a Função Gama satisfaz tal restrição, veja que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} (\ln \Gamma(x)) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) \\ &= \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2}, \end{aligned}$$

O denominador dessa equação,  $(\Gamma(x))^2$ , é obviamente positivo. Já no numerador,

---

\*Bolsista do PICME

<sup>1</sup>Também é possível calcular a função Gama de números complexos, porém, nessa pesquisa, ainda não o fizemos.

utilizando da inequação de Cauchy-Schwarz, temos:

$$\begin{aligned} (\Gamma'(x))^2 &= \left( \int_0^\infty (e^{-t/2} t^{(x-1)/2}) (e^{-t/2} t^{(x-1)/2} \ln(t)) dt \right)^2, \\ &\leq \left( \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left( \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\ln(t))^2 dt \right) \\ &\leq \Gamma(x) \Gamma''(x). \end{aligned}$$

Com isso, pode-se garantir que:

$$\frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} \geq 0.$$

Ou seja,  $\ln\Gamma(x)$  é convexa e podemos provar que  $\Gamma(x)$  é a única que obedece a tais três restrições.

Além disso, um valor especial para se calcular da o fatorial, ou a Função Gama, é em  $x = 1/2$ . Aplicando uma mudança de variáveis, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du. \end{aligned} \tag{1}$$

Mas perceba que:

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du \right)^2 &= \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du \right) \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-v^2} dv \right) \\ &= \iint_{\mathbb{R}} e^{-(u^2+v^2)} du dv, \end{aligned} \tag{2}$$

que em coordenadas polares fica:

$$\begin{aligned} (2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{2} d\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Como  $e^{-u^2}$  é uma função par, temos que:

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Assim, finalmente retornando para a equação (1):

$$\Gamma(1/2) = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

E, como um bônus, vemos que a generalização do fatorial nos presenteia com uma certa conexão com o número  $\pi$ .

## Referências

- [1] STEWART, James. **Cálculo**, vol. 2. Cengage Learning, 2022.
- [2] ARAÚJO, Aldrovando. **Fundamentos da Matemática**, vol. 2. UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.
- [3] SEBAH, Pascal, GOURDON, Xavier. **Introduction to the Gamma Function**. Notas de aula. Disponível em:  
<https://scipp.ucsc.edu/~haber/archives/physics116A10/gamma.pdf>
- [4] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**, vol. 1. IMPA, 2014.
- [5] BONELLI, R. C. **Desigualdades matemáticas e aplicações**. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP, 2017.
- [6] VIEIRA, Felipe, DE CARVALHO, Rafael Aleixo. **Elementos de Aritmética e Álgebra**. 2002.

# Uma introdução à Análise de Fourier em $SU(2)$

Isabele Andrade Vichinieski\*  
isavichinieski@gmail.com<sup>1</sup>

Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)  
wagnermoraes@ufpr.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná - UFPR

**Palavras-chave:** grupo especial unitário, Análise de Fourier, ângulos de Euler.

## Resumo:

O trabalho inicia-se com o estudo das propriedades gerais de  $SU(2)$ , o grupo das matrizes  $2 \times 2$  especiais unitárias, definido como

$$SU(2) = \{u \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : \det(u) = 1 \text{ e } u^*u = I\}.$$

É possível verificar que todo elemento  $u \in SU(2)$  pode ser escrito da forma

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \text{ em que } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ e } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

O objetivo do estudo é a Análise de Fourier no  $SU(2)$ , focando no estudo das representações de  $SU(2)$  e nas propriedades de funções definidas no grupo. Para isso, é necessário entender como as operações se dão em  $SU(2)$ , além de estabelecer as noções de derivadas e integrais de funções definidas neste grupo. As relações entre a Álgebra de Lie no  $SU(2)$  e alguns campos de vetores especiais de  $SU(2)$  nos auxiliarão na investigação de propriedades de equações diferenciais no grupo.

Baseando-se no homeomorfismo fornecido de  $SU(2)$  para a esfera unitária euclidiana de  $\mathbb{C}^2$  e na identificação de  $\mathbb{C}^2$  com a esfera unitária euclidiana  $\mathbb{S}^3$  de  $\mathbb{R}^4$ , é possível parametrizar o grupo das matrizes  $2 \times 2$  especiais unitárias através dos ângulos de Euler no  $SU(2)$ . Os ângulos de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$  dos intervalos de parâmetros  $0 \leq \phi < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $-2\pi \leq \psi < 2\pi$  correspondem ao elemento do grupo

$$u(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2})e^{i(\phi+\psi)/2} & i \sin(\frac{\theta}{2})e^{i(\phi-\psi)/2} \\ i \sin(\frac{\theta}{2})e^{-i(\phi-\psi)/2} & \cos(\frac{\theta}{2})e^{-i(\phi+\psi)/2} \end{pmatrix} \in SU(2).$$

Uma das maneiras de compreender as operações no grupo  $SU(2)$  é através de um estudo do espaço quatérnio  $(\mathbb{H})$ , que é uma  $\mathbb{R}$ -álgebra associativa que, quando pensada como espaço vetorial, possui  $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  como base canônica. Neste espaço,  $\mathbf{1} \in \mathbb{H}$  é a unidade e as seguintes multiplicações estão impostas:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1} = \mathbf{ijk}.$$

---

\*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME

A aplicação  $x = (x_m)_{m=0}^3 \mapsto x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$  identifica  $\mathbb{R}^4$  com  $\mathbb{H}$ . Além disso, podemos induzir na esfera unitária  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$  uma estrutura de grupo.

Com isso, é possível definir um homomorfismo bijetor  $\mathbb{S}^3 \rightarrow SU(2)$ :

$$x \mapsto u(x) = \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_1 + ix_2 \\ -x_1 + ix_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

com  $\det u(x) = \|x\|_{\mathbb{H}}^2 = |x|^2 = 1$  e, portanto,  $\mathbb{S}^3 \cong SU(2)$ .

Desse modo, considerando a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^4$ , podemos deduzir a fórmula para a integral de Haar de  $SU(2)$  utilizando coordenadas polares para obter:

$$f \mapsto \int_{SU(2)} f(x) dx = \frac{1}{16\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi f(u(\phi, \theta, \psi)) \sin(\theta) d\phi d\theta d\psi.$$

Para um elemento  $X \in \mathfrak{su}(2)$ , definimos o operador derivada  $D_X$  por

$$D_X f(u) = \left. \frac{d}{dt} f(u \exp(tX)) \right|_{t=0},$$

no qual  $\exp$  denota a exponencial de uma matriz.

Por fim, investigaremos propriedades de equações diferenciais da forma

$$D_X f(u) + kf(u) = g(u),$$

em que  $k \in \mathbb{C}$  e  $g \in C^\infty(SU(2))$ .

## Referências

- [1] COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian; **Um Curso de Álgebra Linear**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2020.
- [2] HALL, Brian; **Lie Groups, Lie Algebras, and representations: An Elementary Introduction**. Springer International Publishing Switzerland 2003, 2015.
- [3] RUZHANSKY, Michael; TURUNEN, Ville. **Pseudo-Differential Operators and Symmetries: Background Analysis and Advanced Topics**. Basel: Birkhäuser, v.2, 2010.
- [4] RUZHANSKY, Michael, TURUNEN, Ville, WIRTH, Jens. Hörmander Class of Pseudo-Differential Operators on Compact Lie Groups and Global Hypocoellipticity. **Journal of Fourier Analysis and Applications** 20, 476–499, 2014.

# Introdução aos espaços de Lebesgue com expoente variável

Isac Messias Michelin  
isacmicic@gmail.com<sup>1</sup>

Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)  
wagnermoraes@ufpr.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** Espaços de Banach, Espaços de Lebesgue.

## Resumo:

Os espaços de Lebesgue  $L^p$  desempenham um papel crucial na análise funcional e no estudo de equações diferenciais parciais (EDPs). Para  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $1 \leq p < +\infty$ , o espaço  $L^p(\Omega)$  é composto por todas as funções mensuráveis  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que a  $p$ -ésima potência de seu valor absoluto seja integrável, ou seja, em relação à medida de Lebesgue,

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Esses espaços possuem características interessantes, como:

- $L^p$  são espaços vetoriais;
- Se  $p$  e  $q$  são conjugados, isto é, se  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , então  $[L^p]^* = L^q$  e vale a desigualdade de Hölder:  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ , para todo  $f \in L^p$  e  $g \in L^q$ ;
- $L^p$  são espaços de Banach, ou seja, espaços vetoriais normados completos, isto é, em que toda sequência de Cauchy converge.

Esses espaços fornecem a base para estudar operadores lineares, dualidade e várias técnicas, como interpolação, que são essenciais para resolver problemas em diferentes contextos matemáticos. Em particular, as EDPs encontram no formalismo dos espaços  $L^p$  um ambiente ideal para a formulação e resolução de problemas envolvendo a existência, unicidade e regularidade de soluções. Esses espaços permitem trabalhar com funções mais gerais, muitas vezes menos regulares.

Existem funções que pertencem a  $L^{p_n}((a_n, b_n))$ , de modo que  $\bigcup (a_n, b_n) = \mathbb{R}$ , mas que, mesmo assim, não existe  $p$  tal que essas funções pertençam a  $L^p(\mathbb{R})$ . Ou seja, existem funções que, localmente, pertencem a  $L^{p_n}((a_n, b_n))$ , sobre um intervalo  $(a_n, b_n)$ , mas que não pertencem a nenhum espaço  $L^p(\mathbb{R})$  sobre toda a reta real. Um exemplo dessas funções é  $f(x) = |x|^{-\frac{1}{3}}$ . Essas funções não são o foco deste estudo, mas, a partir de casos como este, surge a seguinte pergunta: ao substituir o

expoente  $p$  por uma função  $p(\cdot)$ , o espaço resultante  $L^{p(\cdot)}$  apresenta semelhanças com os espaços  $L^p$ ? Mais precisamente, fixada uma função contínua  $p : \Omega \rightarrow (1, +\infty)$ , quais são as propriedades das funções  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfazem

$$\int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx < +\infty?$$

Este trabalho tem como objetivo investigar os espaços  $L^{p(\cdot)}$ , bem como demonstrar que, sob determinadas condições, as propriedades mencionadas acima dos espaços de Lebesgue são preservadas.

## Referências

- [1] BAZÁN, A.; PEREIRA, A. F.; FERNANDEZ, C. S. **Introdução aos espaços de Banach**. Rio de Janeiro: Editora do IMPA, 2023.
- [2] CRUZ-URIBE, D. V.; FIORENZA, A. **Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis**. Basel: Springer, 2013.
- [3] ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, P. **Real Analysis**. Prentice Hall, 2010.

# Números Metálicos

Isadora Benvenuti Langer\*

isadorabenvenuttilanger@gmail.com<sup>1</sup>

Marciano Pereira (Orientador)

marciano@uepg.br<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Centro Estadual de Educação Profissional de Ponta Grossa

<sup>2</sup>Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG

**Palavras-chave:** Equações quadráticas, frações contínuas, sequências de Fibonacci generalizadas.

**Resumo:** Os Números Metálicos foram introduzidos pela matemática argentina Vera W. de Spinadel [4], e são pouco conhecidos, exceto pelo famoso Número de Ouro. Porém, essa família possui outros integrantes, que possuem propriedades, características e aplicações interessantes.

Neste trabalho investigamos tal família de números metálicos, um conjunto de números, cujo nome foi cunhado pela professora Vera Spinadel, que por definição são as raízes positivas de uma equação quadrática com coeficientes especiais, a saber, a equação quadrática  $x^2 - px - q = 0$ , em que  $p, q \in \mathbb{N}$ , sendo  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números Naturais positivos [4]. Os elementos dessa família são denotados por  $\sigma_{p,q}$ . A investigação foi feita principalmente por meio de dissertações do PROFMAT, voltadas à Educação Básica, bem como mediante artigos relacionados ao tema e, neste contexto, foram explorados conceitos de frações contínuas [1], relações de recorrência [2], radicais contínuos [2], polígonos regulares e construções geométricas [3].

Citamos o membro mais famoso dessa família, o número de Ouro  $\sigma_{1,1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , seguido do número de Prata  $\sigma_{2,1} = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ , Bronze  $\sigma_{3,1} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ , Cobre  $\sigma_{1,2} = 2$ , Níquel  $\sigma_{1,3} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$  e Platina  $\sigma_{2,2} = \frac{2 + \sqrt{12}}{2}$ , entre outros. Por se originarem de equações quadráticas, os números metálicos são ou um irracional quadrático, ou seja, uma raiz real da equação que não é um quadrado perfeito (como é o caso dos números de Ouro, Prata, Bronze, Níquel e Platina), ou um número inteiro (como é o caso do número de Cobre) [5].

Os números metálicos têm, além da forma mencionada acima, expressões em frações contínuas. Por exemplo, a representação do número de Prata em frações

---

\*Aluna do Ensino Médio, medalhista da OBMEP e voluntária do Programa de Iniciação Científica Júnior - PIBIC JR.

contínuas é dada por

$$\sigma_{1,2} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Além disso, os números metálicos estão associados a retângulos metálicos, isto é, a razão entre dois de seus lados adjacentes é igual ao número metálico, os quais possuem uma construção geométrica [2] e [3]. Uma característica muito interessante dos retângulos metálicos, exclusiva dos retângulos provenientes dos números metálicos do tipo  $\sigma_{p,1}$ , é que eles mantêm sua proporção infinitamente, isto é, dado o retângulo metálico original, o retângulo lateral (gerado a partir da retirada de  $p$  quadrados de lado igual à menor medida do retângulo metálico) é semelhante ao retângulo metálico original, o que destaca uma propriedade fractal nestas figuras.

Outra relação interessante dos números metálicos é com as sequências de Fibonacci generalizadas de segunda ordem  $F_{n+2} - pF_{n+1} - qF_n = 0$ , que por sua vez, geram uma equação de segundo grau na forma  $x^2 - px - q = 0$ , cuja raiz positiva é um número metálico. Pode-se provar [4] que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \sigma_{p,q}.$$

Por fim, nesta investigação relacionamos os números metálicos com radicais contínuos [2], estudamos algumas situações em que alguns números metálicos podem ser obtidos como a razão entre as medidas da diagonal e do lado de um polígono regular [3], e a ideia de área metálica  $A_{p,q}$ , como sendo a área delimitada no primeiro quadrante pela parábola  $g(x) = x^2$  e pela reta  $f(x) = px + q$  [3].

Com este trabalho pudemos perceber o número de ouro como um elemento particular de uma classe de números mais gerais, os números metálicos, e que estes têm diversas ligações com outros conteúdos matemáticos, tanto no contexto algébrico quanto geométrico, tornando-se uma investigação bastante rica de conhecimentos matemáticos.

## Referências

- [1] ARAÚJO, J. J. V. **As Frações Contínuas e os Números Metálicos**. Dissertação (Mestrado PROFMAT), UFPB, João Pessoa (PB), 2015.
- [2] HUBER, A. V. **Números Metálicos**. Dissertação (Mestrado PROFMAT), UFSM, Santa Maria (RS), 2019.
- [3] OLIVEIRA, J. S. **Um breve estudo sobre os Números Metálicos**. Dissertação (Mestrado PROFMAT), UFSJ, Ouro Branco (MG), 2019.
- [4] SPINADEL, V. W. La familia de números metálicos. **Cuadernos del CIMBAGE**, n. 6, 2003, pp. 17-44.
- [5] VINAGRE, F. **Números Metálicos**. Escola Secundária de Azambuja. Azambuja: 2014.

# Teorema de Baire, a não enumerabilidade dos reais, e a existência de funções contínuas não deriváveis

Júlia Pscheidt\*

juliapscheidt@gmail.com <sup>1</sup>

Alexandre N. Oliveira-Sousa (Orientador)

alexandre.n.o.sousa@ufsc.br <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Santa Catarina

**Palavras-chave:** espaços completos, conjuntos densos, conjuntos magros.

## Resumo:

No estudo de espaços topológicos, surge a noção de subconjuntos densos. Diametralmente oposto a esse conceito, existe a ideia de conjuntos magros, que seriam insignificantes no espaço, ou ainda o análogo a conjuntos de medida nula na Análise. [2]

Assim, define-se conjuntos magros como aqueles que são união enumerável de conjuntos cujo fecho tem interior vazio. Equivalentemente, são conjuntos contidos na união enumerável de conjuntos fechados de interior vazio. Esses conjuntos são ditos de primeira categoria. Todos os outros conjuntos que não satisfazem a essa condição são ditos de segunda categoria. [3]

O Teorema das Categorias de Baire pode ser, então, enunciado no âmbito de espaços métricos completos como:

**Teorema das Categorias de Baire:** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo.

(1) Sejam  $U_n \in X$  abertos densos em  $X$  para todo  $n$ . Então  $\bigcap A_n$  é denso em  $X$ .

(2) Sejam  $F_n \in X$  fechados não vazios tais que  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ . Então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $F_{n_0}$  tem interior não vazio. Ou seja, um espaço métrico completo não pode ser união enumerável de fechados magros. [1]

As duas formulações são equivalentes, mas cada uma torna possível diferentes aplicações.

O primeiro enunciado é útil para a construção de argumentos de existência. Nesse sentido, se procuramos por algum elemento do espaço que tenha propriedades específicas, podemos tomar conjuntos abertos e densos de pontos que tenham propriedades arbitrariamente próximas àquela que buscamos. O teorema de Baire nos dirá, então, que existe pelo menos um elemento com as propriedades desejadas. Este

---

\*Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática UFSC.

argumento é desenvolvido na prova de que existem funções contínuas que não são deriváveis em nenhum ponto.

Já a segunda formulação é aplicada, por exemplo, na prova de que o conjunto dos números reais não é enumerável. Como  $\mathbb{R}$  é a união dos conjuntos unitários (e fechados) dos seus pontos, caso fosse enumerável teríamos que algum desses conjuntos unitários teria interior não vazio, o que é um absurdo.

## Referências

- [1] KUMARESAN, S. **Topology of metric spaces**. Mumbai: Alpha Science International, 2005.
- [2] LIMA, E.L. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [3] WILLARD, S. **General topology**. Mineola: Dover, 2004.

# Introdução à Teoria das Distribuições

Leonardo Cortez do Nascimento\*

leonardo.cortez.0111@gmail.com<sup>1</sup>

Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)

wagnermoraes@ufpr.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná - UFPR

**Palavras-chave:** Distribuições, Funções Generalizadas, Distribuições Temperadas.

## Resumo:

A Teoria das Distribuições lida com uma extensão do conceito de função e permite a análise de fenômenos que não podem ser descritos adequadamente por funções convencionais. Um exemplo é o conhecido Delta de Dirac, que pode representar fisicamente um impulso, i.e., uma força muito forte aplicada em um período muito curto de tempo. O Delta de Dirac, denotado por  $\delta$ , é definido através das seguintes propriedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

É perceptível que o Delta de Dirac não é uma função comum, e foi inspirado nele que o francês Laurent Schwartz, por volta de 1940, formalizou a teoria das distribuições (ou funções generalizadas), ganhando inclusive uma medalha Fields por isso.

O objetivo deste trabalho é compreender desde as funções teste, pertencentes ao espaço  $\mathcal{C}_0^\infty$ , e o espaço  $\mathcal{D}'$  das distribuições, até as funções de Schwartz e as distribuições temperadas. A motivação principal vem do fato que, a partir das distribuições de Schwartz, conseguimos realizar uma análise mais ampla dos chamados Operadores Diferenciais Parciais Lineares (ODPL).

Enunciamos a seguir a ideia proposta por Schwartz para generalizar o conceito de função.

**Definição 1:** Dado um aberto  $X \subset \mathbb{R}^n$ , uma distribuição é um funcional linear sobre o conjunto das funções suaves e com suporte compacto  $u : \mathcal{C}_0^\infty(X) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $u$  é contínuo.

---

\*Bolsista do Programa PET-Matemática

**Definição 2:** Dizemos que  $u$  é contínuo se, para todo compacto  $K \subset X$ , existem constantes  $C$  e  $k$  tais que:

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(K).$$

Na definição acima,  $\alpha$  denota um multi-índice, ou seja,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ . O conjunto das distribuições definidas em  $X$  é denotado por  $\mathcal{D}'(X)$ .

A principal propriedade das distribuições é que elas são SEMPRE diferenciáveis. Essa propriedade é especialmente importante no estudo dos ODPL, onde as soluções podem não ser diferenciáveis de maneira clássica em todos os pontos. Com as distribuições, é possível resolver operadores que envolvem soluções com singularidades ou comportamentos irregulares, ampliando assim o conjunto de problemas que podem ser tratados analiticamente. Essa característica se deve à definição de derivada em distribuições, enunciada a seguir.

**Definição 3:** Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $u \in \mathcal{D}'(X)$  e  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ . Definimos a derivada distribucional como:

$$\partial^\alpha u(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(X).$$

De acordo com a definição acima, é de imediata constatação a diferenciabilidade das distribuições.

Outra importante ferramenta no estudo dos ODPL é a Transformada de Fourier, uma vez que esta “aniquila” as derivadas presentes em uma equação diferencial. Para uma dada função  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , a transformada de Fourier da função  $f$  é dada por:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x;\xi)} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Quando lidamos com a Transformada de Fourier, geralmente estamos interessados na sua forma bijetiva, ou seja, queremos “ir e voltar” livremente pelos espaços de funções. Por isso, introduzimos o espaço das funções com decaimento rápido, conhecido como espaço de Schwartz:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{C}^\infty : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

Nesse espaço, a Transformada de Fourier é bem definida e é uma aplicação bi-jetiva. A partir disso, conseguimos definir uma nova classe de distribuições, na qual podemos trabalhar com a transformada de Fourier.

**Definição 4:** Uma distribuição temperada é um funcional linear contínuo definido sobre o espaço das funções de Schwartz. O espaço das distribuições temperadas é denotado por  $\mathcal{S}'$ . Assim, para um dado aberto  $X \subset \mathbb{R}^n$ , temos:

$$\mathcal{S}'(X) := \{u : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Munidos das ferramentas provenientes tanto da Teoria das Distribuições quanto da Análise de Fourier, somos capazes de definir o conceito de transformada de Fourier de uma distribuição.

**Definição 5:** Dados um aberto  $X \subset \mathbb{R}^n$  e uma distribuição  $u \in \mathcal{S}'(X)$ , definimos a transformada de Fourier da distribuição  $u$  da seguinte forma:

$$\hat{u} : \mathcal{S}'(X) \rightarrow \mathbb{C}$$
$$\hat{u}(\varphi) := u(\hat{\varphi}), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(X).$$

Esse trabalho se propõe a ser o primeiro passo em direção ao estudo dos Operadores Diferenciais Parciais Lineares. Nesse sentido, o estudo das distribuições serve como uma base sólida para projetos futuros, oferecendo uma compreensão dos conceitos fundamentais que sustentam a análise desses operadores.

## Referências

- [1] HÖRMANDER, L. **The Analysis of Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis**. 2. ed. Berlim: Springer-Verlag, 1990.
- [2] MITREA, D. **Distributions, Partial Differential Equations, and Harmonic Analysis**. 2. ed. Suíça: Springer, 2018.

# Os irmãos anômalos do conjunto $\mathbb{R}$

Leonardo Ferreira Bielinski\*

bielinskilf@gmail.com<sup>1</sup>

Giuliano Gadioli la Guardia<sup>†</sup>

gguardia@uepg.br<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Estadual de Ponta Grossa

Setembro de 2024

**Palavras-chave:** números p-ádicos, reais p-ádicos.

## 1 Introdução

O espaço métrico  $\mathbb{R}$  pode ser construído a partir do completamento de  $\mathbb{Q}$  munido da métrica advinda da *avaliação usual*  $|\cdot|_{\infty} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definida por  $|r|_{\infty} := \text{sgn}(r) \cdot r$ . Uma pergunta que pode então se levantar é: o que acontece se completarmos  $\mathbb{Q}$  munido de uma métrica advinda de outra *avaliação*? É o que esse texto pretende responder.

**Definição:** Uma *avaliação* em um corpo  $K$  é um mapa  $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  tal que  $\forall x, y \in K$ , vale que  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,  $|xy| = |x||y|$  e  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

**Definição:** Dado um corpo  $K$ , a *avaliação trivial* em  $K$  é a avaliação  $|\cdot|_{\text{triv}} = \mathbb{1}_{K^*} : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , onde  $\mathbb{1}_A : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  é a função característica de  $A \subset X$  e  $K^* = K - \{0\}$ .

É fácil verificar que dada uma avaliação  $|\cdot|$  em  $K$ , pode-se fabricar a *métrica induzida* por  $|\cdot|$  em  $K$  pondo  $d(x, y) := |x - y|$ . A noção de métrica é suficiente para o conceito de completamento por sequências de Cauchy.

**Definição:** Definimos a *avaliação p-ádica* em  $\mathbb{Q}$ ,  $|\cdot|_p$ , pondo  $|0|_p := 0$  e  $|a/b|_p := p^{-\text{ord}_p(a/b)}$  para  $a, b \in \mathbb{Z}^*$ , onde  $\text{ord}_p(a/b) := \max\{n \in \mathbb{N}_0 : p^n | a\} - \max\{n \in \mathbb{N}_0 : p^n | b\}$ .

**Definição:** Duas métricas  $d_1, d_2$  são ditas *equivalentes* se dada uma sequência  $S$ ,  $S$  é de Cauchy com respeito a  $d_1$  se, e somente se, for de Cauchy com respeito a  $d_2$ . Mais ainda, duas avaliações são ditas *equivalentes* se induzem métricas equivalentes.

Vale [2] o seguinte teorema de classificação:

---

\*Bolsista PICME.

†Orientador.

**Teorema (Ostrowski):** Dada uma avaliação  $\nu : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , então  $\nu$  é equivalente a exatamente uma das seguintes avaliações não equivalentes duas a duas: ou a avaliação usual  $|\cdot|_{\infty}$ , ou a avaliação trivial  $|\cdot|_{\text{triv}}$ , ou uma avaliação  $p$ -ádica  $|\cdot|_p$ , com  $p$  primo.

Com isso em mãos, vejamos as possibilidades:

1. Se  $d_{\infty}$  é uma métrica equivalente à induzida pela avaliação usual  $|\cdot|_{\infty}$  em  $\mathbb{Q}$ , então o completamento de  $\mathbb{Q}$  segundo essa métrica,  $(\mathbb{Q}, d_{\infty})$ , é isométrico a  $\mathbb{R}$  munido de sua métrica usual.
2. Se  $d_{\text{triv}}$  é uma métrica equivalente à induzida pela avaliação trivial  $|\cdot|_{\text{triv}}$  em  $\mathbb{Q}$  e  $S = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$  é de Cauchy segundo  $d_{\text{triv}}$ , temos que para  $\varepsilon = 1$ , existe  $M$  tal que  $\forall m, n \geq M$ , vale  $d_{\text{triv}}(r_m, r_n) < 1 \Rightarrow |r_m - r_n|_{\text{triv}} = 0 \Rightarrow r_m = r_n = r_M$ , donde  $S$  é estacionária e, portanto, converge (para  $r_M$ ), tornando  $(\mathbb{Q}, d)$  completo. Dessa forma, o completamento de  $\mathbb{Q}$  segundo essa métrica,  $(\mathbb{Q}, d_{\text{triv}})$ , é isométrico ao próprio  $(\mathbb{Q}, d_{\text{triv}})$ .
3. Se  $d_p$  é uma métrica equivalente à induzida pela avaliação usual  $|\cdot|_p$  em  $\mathbb{Q}$  (e é esse o cenário em que estamos interessados), então  $(\mathbb{Q}, d_p)$  não é completo, e o completamento de  $\mathbb{Q}$  segundo  $d_p$ ,  $(\overline{\mathbb{Q}}, p)$ , é denotado por  $\mathbb{Q}_p$  e é denominado *corpo  $p$ -ádico*.

Justificando a nomenclatura, pode-se conferir a  $\mathbb{Q}_p$  uma estrutura de corpo e mostrar que inclusão natural  $i : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ ,  $i(r) := [(r)_{k=1}^{\infty}]$ , é um homomorfismo injetor de corpos que preserva  $d_p$  no seguinte sentido:  $d_p(r, s) = d_p(i(r), i(s))$ . Aqui abusa-se de notação ao usar  $d_p$  para também denotar a métrica do completamento  $(\overline{\mathbb{Q}}, d_p)$ .

## 2 As diversas anomalias de $\mathbb{Q}_p$

O termo “irmãos” no título se refere aos corpos  $\mathbb{Q}_p$ . Doravante esse texto se restringirá a listar, sem provas, diversas das tais “anomalias” que um corpo  $p$ -ádico  $\mathbb{Q}_p$  exhibe. As provas podem ser encontradas nas referências [1] e [2].

### 2.1 Anomalia arquimediana

**Definição:** Um corpo  $K$  munido de uma avaliação  $|\cdot|$  é dito *não-Arquimediano* se para todo  $x, y \in K$ ,  $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ . Nesse caso a avaliação  $|\cdot|$  também é dita *não-Arquimediana*.

Não é difícil verificar que  $|\cdot|_p$ , definida tanto em  $\mathbb{Q}_p$  quanto na restrição  $\mathbb{Q}$  é não-Arquimediana, tornando  $\mathbb{Q}_p$  um corpo não-Arquimediano.

**Teorema:** Em um corpo não-Arquimediano  $K$ , se  $|x| \neq |y|$ , então  $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$ .

### 2.2 Anomalias geométricas

Como corolário do último teorema da subseção anterior, temos:

**Corolário:** Dados três pontos distintos  $x, y, z \in K$ , existem  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \{x, y, z\}$

tais que  $|a_1 - b_1| = |a_2 - b_2|$ , isto é, todo triângulo é isósceles.

**Teorema:** Todo ponto na bola  $B(c, r) := \{x \in K : |x - c| < r\}$  é um centro, isto é, para todo  $c' \in B(c, r)$ , vale que  $B(c', r) = B(c, r)$ .

**Corolário:** Dadas duas bolas  $B_1 = B(p_1, r_1)$  e  $B_2 = B(p_2, r_2)$  com  $r_1 \leq r_2$ , então ou  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  ou  $B_1 \subset B_2$ .

### 2.3 Anomalias de análise

**Teorema:** Uma sequência  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  em um corpo não-Arquimediano  $K$  é de Cauchy se, e somente se,  $|x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

**Teorema:** Em um corpo não-Arquimediano completo  $K$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  converge se, e somente se,  $x_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Observe que as anomalias estão nas “voltas” dos teoremas, uma vez que as “idas” também ocorrem em  $\mathbb{R}$ .

**Teorema:** Se  $|\cdot|$  é uma avaliação não-Arquimediana de  $K$  e  $\overline{K}$  é o completamento de  $K$ , então  $|K| = |\overline{K}|$ . Em particular,  $|\mathbb{Q}_p|_p = |\mathbb{Q}|_p = \{|p|_p^k\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{0\}$ .

### 3 Representação

Os elementos de  $\mathbb{Q}_p$  como classes de equivalência de seqüências de Cauchy seguindo uma métrica não usual são complicados para se operar.

Assim como podemos representar um número real  $x$ , de maneira única, como  $x = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$ , onde  $a_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $a_k \in \{0, \dots, 9\}$ , tais que não existe  $M$  tal que para  $k \geq M$ , vale que  $a_k = 9$  (1.000... = 0.999..., por exemplo, violaria a unicidade), podemos representar de maneira única os  $p$ -ádicos da seguinte forma:

**Teorema:** Dado  $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$ , existe um único  $n = n(\alpha) \in \mathbb{Z}$  tal que  $|\alpha|_p = |p|_p^n$  e uma única seqüência  $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$  de *coeficientes* em  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, \dots, p-1\}$  tais que  $\alpha = \sum_{k=n}^{\infty} a_k p^k$ .

**Definição:** Define-se o *anel dos inteiros  $p$ -ádicos*,  $\mathbb{Z}_p$ , como sendo o sub-anel de  $\mathbb{Q}_p$  dado por  $\mathbb{Z}_p = \{\alpha \in \mathbb{Q}_p^* : n(\alpha) \geq 0\} \cup \{0\} = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k : \forall k \geq 0, a_k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ . É claro que pode-se identificar  $\mathbb{Z}_p$  com  $\prod_{k=0}^{\infty} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ .

**Teorema:** Dado  $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$ , temos que  $\alpha$  é racional se, e somente se, a seqüência de seus coeficientes é, eventualmente, periódica.

### Referências

- [1] NATARAJAN, P. N. **An Introduction to Ultrametric Summability Theory.** [s.l.] Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] KOBLITZ, N.  **$p$ -adic Numbers,  $p$ -adic Analysis, and Zeta-Functions.** [s.l.] Springer Science & Business Media, 1996.

# O Teorema de Sharkovsky e suas Consequências

Lucas Bisoni\*

Licenciatura em Matemática

lucas.bisoni@ufpr.br<sup>1</sup>

Prof. Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)

Departamento de Matemática

wagnermoraes@ufpr.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná (UFPR)

**Palavras-chave:** dinâmica discreta, iteração, ciclos, teorema de Sharkovsky.

## Resumo:

Em 1975, Tien-Yien Li e James A. Yorke introduziram no estudo dos sistemas dinâmicos discretos o conceito de caos, através da publicação de seu artigo *Period Three Implies Chaos* (ver [4]), que versa sobre a existência de pontos periódicos para funções definidas em intervalos fechados. De fato, seu principal resultado consiste no seguinte:

**Teorema 1 (de Li-Yorke):** Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo fechado e  $f : I \rightarrow I$  uma função contínua. Se  $f$  possuir um ponto 3-periódico, então  $f$  terá um ponto  $k$ -periódico, para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

A publicação desse surpreendente teorema teria sido um dos marcos iniciais que estimularam as investigações sobre a dinâmica de funções contínuas na reta.

Entretanto, em 1964, onze anos antes do trabalho de Li e Yorke, já fora publicado um artigo na revista *Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal* intitulado *Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself*, de autoria do matemático soviético Oleksandr Mikolaiovich Sharkovsky, que não só demonstrava o teorema acima, como também o caracterizava enquanto caso particular de um resultado mais geral. Este outro trabalho, enviado para publicação quando Oleksandr tinha apenas 25 anos, ficou conhecido como Teorema de Sharkovsky.

Nesse sentido, nosso objetivo será enunciar e apresentar uma demonstração do Teorema de Sharkovsky, suscitando algumas discussões sobre o comportamento de funções em intervalos fechados.

Para tanto, faz-se necessário definir o conceito de ordem de Sharkovsky. Seja  $\triangleright$  uma relação de ordem no conjunto dos naturais, sendo que  $a \triangleright b$  denota “ $a$  maior

---

\*Voluntário do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).

que  $b^n$ . Primeiro, devem ser considerados todos os ímpares, a partir do 3 e de forma crescente. Estes serão os maiores elementos dessa nova ordenação. A sequência continua com o produto dos ímpares considerados anteriormente por 2, depois  $2^2$ , e assim sucessivamente, com as outras potências de 2. Por fim, são consideradas todas as potências não negativas de 2, de forma decrescente, até o expoente 0. Desse modo, obtemos

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 3 \cdot 2 \triangleright 5 \cdot 2 \triangleright 7 \cdot 2 \triangleright \dots \triangleright 3 \cdot 2^2 \triangleright 5 \cdot 2^2 \triangleright 7 \cdot 2^2 \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Essa distribuição recebe o nome de ordenação de Sharkovsky, e faz-se essencial ao enunciar o principal resultado aqui apresentado:

**Teorema 2 (de Sharkovsky):** Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo fechado e  $f : I \rightarrow I$  uma função contínua. Se  $f$  possuir um ponto  $n$ -periódico, para algum  $n \in \mathbb{N}$ , então  $f$  também terá um ponto  $k$ -periódico, para todo  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k \triangleleft n$  (na ordem de Sharkovsky).

Como 3 é o maior número na ordenação de Sharkovsky, segue que o Teorema 1 é um corolário do Teorema 2.

Desde sua publicação, foram apresentadas várias provas para o Teorema de Sharkovsky, envolvendo os mais diversos conceitos. A demonstração que apresentamos aqui foi desenvolvida por Bau-Sen Du, professor da Academia Sinica, no Taiwan (ver [2] e [3]). Sua principal ideia é mostrar a equivalência do Teorema 2 com o seguinte enunciado:

**Proposição:** Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo fechado e  $f : I \rightarrow I$  uma função contínua. Assim, são verdadeiras as seguintes afirmações:

- Se  $f$  tem um ponto  $m$ -periódico, com  $m \geq 3$ , então  $f$  tem um ponto 2-periódico.
- Se  $f$  tem um ponto  $m$ -periódico, com  $m \geq 3$  e  $m$  ímpar, então  $f$  tem um ponto  $(m + 2)$ -periódico.
- Se  $f$  tem um ponto  $m$ -periódico, com  $m \geq 3$  e  $m$  ímpar, então  $f$  tem um ponto 6-periódico e um ponto  $2m$ -periódico.

De modo que, ao demonstrarmos (a), (b) e (c), teremos provado o Teorema de Sharkovsky.

## Referências

- [1] BRÁS, João Carlos Teodoro. **Dinâmica de Funções Contínuas na Reta**. Relatório de Estágio. Covilhã: Universidade da Beira do Interior, 2013. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10400.6/1875>>. Acesso em 25 de agosto de 2024.
- [2] DU, Bau-Sen. **A Collection of Simple Proof's of Sharkovsky's Theorem**. 2007. Disponível em:<<https://arxiv.org/abs/math/0703592>>. Acesso em 25 de agosto de 2024.

- [3] DU, Bau-Sen. **A Simple Proof of Sharkovsky's Theorem Revisited**. 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/math/0606280>>. Acesso em 25 de agosto de 2024.
- [4] LI, T.Y.; YORKE, J. A. **Period Three Implies Chaos**. The American Mathematical Monthly, v.82, n.10, p. 985-992, dez. 1975.
- [5] NOGUEIRA, G.D.; SANTOS, J.V. **Uma Demonstração do Teorema de Sharkovskii**. Revista Foco, v.16, n.5, p.01-08, mai. 2023.

# Funções Contínuas Diferenciáveis em Lugar Nenhum e o Teorema da Categoria de Baire

Lucas Xavier\*

xavierlucassrl@gmail.com<sup>1</sup>

María Rosario Astudillo Rojas (Orientadora)

maria.astudillo@ufpr.br<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** Teorema de Baire, Espaços métricos completos, Funções contínuas não deriváveis.

**Resumo:** No início do século XIX, acreditava-se que toda função contínua teria derivada em um conjunto significativo de pontos. Tal perspectiva seria radicalmente alterada por Karl Weierstrass em 1872, que surpreendeu a comunidade matemática ao apresentar uma função contínua em todos os seus pontos, mas não diferenciável em nenhum ponto [1]. Uma vez provada a existência de tais funções, surge uma dúvida em relação à sua quantidade. O presente trabalho se propõe a responder a tal questionamento.

De forma trivial, podemos provar que há infinitas delas; entretanto, seria mais interessante se pudéssemos atribuir uma noção próxima à de abundância para tais funções quando analisadas no contexto geral do espaço das funções contínuas. Para realizar tal feito, utilizaremos uma conclusão a que René-Louis Baire chegou em 1899: "Um espaço métrico completo não pode ser escrito como a união de uma coleção enumerável de conjuntos nada densos"[1] [2].

Note que, a partir do teorema de Baire, podemos construir duas categorias para qualquer dado subconjunto de um espaço métrico: um conjunto será dito de primeira categoria se este pode ser formado por uma união de conjuntos nada densos, e de segunda categoria se este não pertencer à primeira. Essas categorias serão denominadas "Categorias de Baire"[3].

Esse interessante resultado da área de Espaços Métricos constitui a base teórica para o estudo do presente trabalho, uma vez que saber a categoria dos conjuntos que formam o espaço das funções contínuas (i.e., o conjunto das funções com derivada em pelo menos um ponto e o conjunto das funções com derivada em nenhum ponto) define a relação que responde à nossa dúvida inicial, relativa à abundância dessas funções em relação ao espaço ao qual elas pertencem.

Para tal, provaremos que o conjunto das funções contínuas definidas entre dois números reais  $a$  e  $b$ , denominado  $C[a, b]$ , é completo e, portanto, de segunda categoria,

---

\*Bolsista do PET Matemática - UFPR

enquanto o conjunto:

$$D[a, b] = \{f \in C[a, b] : f'(x) \text{ existe para algum } x \in [a, b]\}$$

é de primeira categoria em  $C[a, b]$ .

Observe que, se  $D[a, b]$  for de primeira categoria, então o conjunto das funções contínuas com derivada em nenhum ponto deverá ser estritamente de segunda categoria, levando-nos a afirmar acertadamente que essas são muito mais prevalentes no espaço das funções contínuas definidas entre  $a$  e  $b$ .

## Referências

- [1] KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. Oxford: Oxford University Press, 1990. v. 2. 1001–1003 p.
- [2] LIMA, E. L. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [3] ABBOTT, S. **Understanding analysis**. New York: Springer, 2010.
- [4] LIMA, E. L. **Um curso de análise: volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 1999.

# Uma extensão do $g$ -cálculo para $n$ variáveis

Matheus Everaldo Krüger GebelUCA\*  
matheuserevaldokrugergebeluca@gmail.com<sup>1</sup>

Jocemar de Quadros Chagas (Orientador)  
jocemarchagas@uepg.br<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Universidade Estadual de Ponta Grossa

15/08/2024

**Palavras-chave:** Pseudo-Análise,  $g$ -derivada, Pseudo-espço, Pseudo-operação.

## Resumo:

O principal objetivo deste trabalho, motivado pelo cálculo vetorial e pela análise complexa, é apresentar uma generalização para a teoria do  $g$ -cálculo, criada por E. Pap. Nossa contribuição à teoria é a introdução do conceito de  $g$ -cálculo vetorial.

## 0.1 Preliminares:

Iniciamos apresentando brevemente os conceitos básicos da teoria do  $g$ -cálculo [1, 2].

**Definição 0.1** Dizemos que  $\mathcal{J} = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  é um sub-intervalo da reta estendida.

Por convenção iremos apenas considerar a semirreta positiva.

**Definição 0.2** Dizemos que a função  $g$  é uma função geradora se e somente se:

- $g : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- $g$  é monótona;
- $g$  é bijetora;
- $g$  é mensurável em  $\mathcal{J}$ .

**Definição 0.3** Dizemos que  $\oplus_g$  é uma **pseudo-soma** com relação a uma função geradora  $g$  se para quaisquer dois valores  $(x, y)$  em  $\mathcal{J}$  vale:

$$\begin{aligned} \oplus_g : \mathcal{J} \times \mathcal{J} &\rightarrow \mathcal{J} \\ (x, y) &\mapsto x \oplus_g y. \end{aligned}$$

---

\*Bolsista do Programa de iniciação científica (PIBIC)

**Definição 0.4** Dizemos que  $\odot_g$  é uma **pseudo-multiplicação** se para quaisquer dois valores  $(x, y)$  em  $\mathcal{I}$ :

$$\begin{aligned}\odot_g : \mathcal{I} \times \mathcal{I} &\rightarrow \mathcal{I} \\ (x, y) &\mapsto x \odot_g y\end{aligned}$$

Tais operações são associativas e, em geral, comutativas.

**Definição 0.5 (Semi-anel)** A terna  $(\mathcal{I}, \oplus_g, \odot_g)$  é um **semi-anel**.

**Teorema 0.1 (Teorema de Aczél):** Para toda pseudo-operação  $\otimes_g$  tem-se ao menos uma função geradora  $g$  de forma que:

$$u \otimes_g v = g^{-1}(g(u) * g(v)),$$

onde  $*$  é a operação correspondente usual, considerada nos reais.

## 0.2 $g$ -cálculo vetorial

Podemos pensar em dois possíveis tipos de  $g$ -cálculo vetorial que generalizem o  $g$ -cálculo. Um deles quando o domínio  $\mathcal{I}$  é unidimensional e o contradomínio tem dimensão  $n$  (caso que será apresentado neste trabalho). O outro caso consiste em generalizar o domínio para  $n$  dimensões, caso que se mostra mais trabalhoso que o primeiro. Iniciaremos a discussão com a definição de **vetor  $g$ -definido** e com a definição de produto interno de contração.

**Definição 0.6** uma  $n$ -upla  $g$ -definida (ou vetor  $g$ -definido) é uma aplicação dada por:

$$\mathbf{G} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^n; \quad \mathbf{G}(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x)), \quad \forall x \in [a, b],$$

onde  $\text{mon}(g_i) = \text{mon}(g_{i+1}), \forall i \in I = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ , isto é, a função geradora  $g_i$  tem a mesma monotonicidade da função geradora  $g_{i+1}$ .

Um produto interno de contração é definido como segue.

**Definição 0.7** Toda função escalar definida como  $(x|y) : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow [a, b]$  é um produto interno de contração, se e somente se, satisfizer as seguintes propriedades:

- (i) *comutatividade*;
- (ii) *quase-aditividade*:  $(w + s|v) = ((w|v) + (s|v))w_k$ , onde o peso  $w_k$  é chamado de constante de contração.
- (iii)  $(kw|s) = (w|s), \forall k \in \mathbb{R}_+^*$ .

Para o que segue, necessitamos introduzir o operador **pseudo-média aritmética**, que é um operador fechado em  $\mathcal{I}$ .

**Definição 0.8 (Operador média aritmética)** Seja  $X$  um conjunto de  $N$  números em  $[a, b]$ . Definimos o operador **pseudo-média aritmética** em  $[a, b]$  como:

$$\frac{1}{N} \bigoplus_{i=1}^N x_i := \min\{x_i\} + \left( \sum_{i=1}^N \frac{|x_i - \min\{x_i\}|}{N} \right).$$

O principal resultado apresentado neste trabalho é a extensão do Teorema de Aczél ao  $\mathbb{R}^n$ , enunciado a seguir.

**Teorema 0.2 (Extensão do Teorema de Aczél)** *Seja  $\otimes_g$  uma pseudo-operação em  $[a, b]$ . Então, tem-se ao menos uma função geradora  $G(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$  tal que:*

$$z \otimes_g y = \frac{1}{N} \bigoplus_{i=1}^N g_i^{-1}(g_i(z) * g_i(y)), \quad \forall z, y \in [a, b].$$

De forma análoga podemos definir a  $g$ -derivada para o caso  $n$ -dimensional.

**Definição 0.9** *Seja  $h$  uma função definida de  $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$  em  $[a, b]$  e  $G$  um vetor  $g$ -definido tal que  $\text{mon}(h) = \text{mon}(g_i)$ . Então, o  $g$ -gradiente de  $h$  pode ser definido como*

$$\nabla^\oplus f(h) = \frac{1}{N} \bigoplus_{i=1}^N g_i^{-1}(D_x g_i(h)).$$

### 0.3 Conclusões

A generalização apresentada neste trabalho é uma porta de entrada para demais abordagens e discussões sobre a teoria do  $g$ -cálculo, bem como uma outra perspectiva sobre o assunto. Acreditamos que esta generalização poderá ser aplicada em diversas áreas, como na física e em equações diferenciais, a exemplo das aplicações que aparecem em [3, 4], e que tal generalização possa ainda ser expandida para um espaço mais abrangente e geral. Adicionalmente, introduzimos uma nova estrutura chamada  $g$ -álgebra, a qual possibilita estudar o  $g$ -cálculo sob uma nova visão.

### Referências

- [1] PAP, E.  $g$ -Calculus. **Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. v.** 23 n. 1, p. 145-156, 1993.
- [2] PAP, E. Pseudo-analysis approach to nonlinear partial differential equations. **Acta Polytechnica Hungarica**, v. 5, n. 1, p. 31-45, 2008.
- [3] SOUSA, J. V. DA C.; CAMARGO, R. F.; DE OLIVEIRA, E. C.; FREDERICO, G. S. F. Pseudo-fractional differential equations and generalized  $g$ -Laplace transform. **J. Pseudo-Diff. Oper. Appl.**, v. 12, n. 3, p. 44, 2021.
- [4] FREDERICO, G. S. F.; SOUSA, J. V. DA C.; BABAKHANI, A. Existence and uniqueness of global solutions in the variational calculus. **Computational and Applied Mathematics**, v. 40, n. 6, p. 233, 2020.

# Hipoeliticidade Global em Classes de Denjoy-Carleman

Otavio Augusto Salomão Recacho\*

otaviorecacho@gmail.com<sup>1</sup>

Alexandre Kirilov (Orientador)

akirilov@ufpr.br<sup>2</sup>

<sup>1</sup>UFPR

<sup>2</sup>UFPR

**Palavras-chave:** Análise de Fourier, Classes Ultradiferenciáveis, Hipoeliticidade Global.

## Resumo:

O objetivo deste trabalho foi uma revisão bibliográfica de alguns resultados, obtidos em [1], sobre hipoeliticidade das classes  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d)$  de Denjoy-Carleman definidas no toro  $\mathbb{T}^d$ , relacionadas a certas sequências  $\mathcal{M} = \{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais positivos. Denotamos por  $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d)$  espaço das distribuições em  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d)$ . Por hipoeliticidade, nos referimos ao seguinte: dados  $P_1, P_2, \dots, P_k$  operadores contínuos em  $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d)$ , o sistema  $(P_1, P_2, \dots, P_k)$  é *globalmente  $\mathcal{M}$ -hipoelítico* se

$$u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d), P_j(u) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d), j = 1, 2, \dots, k \implies u \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d).$$

O primeiro resultado diz respeito a operadores diferenciais constantes, ou seja, operadores  $P : \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d) \rightarrow \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d)$  dados por  $P = \sum_{|\alpha| \leq M} a_{\alpha} D^{\alpha}$ , onde  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$  e  $a_{\alpha}$  é um número complexo. A prova do Teorema 1 é feita por meio das séries de Fourier desenvolvidas para elementos de  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d)$  e  $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d)$ .

**Teorema 1** - Sejam  $P_1, P_2, \dots, P_k : \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d) \rightarrow \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d)$  operadores diferenciais com coeficientes constantes. O sistema  $(P_1, P_2, \dots, P_k)$  é globalmente  $\mathcal{M}$ -hipoelítico se, somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $R > 0$  tal que

$$\max_{1 \leq j \leq k} |P_j(\xi)| \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right), \forall \xi \text{ com } |\xi| \geq R.$$

Já o segundo resultado é uma aplicação direta do Teorema 1, e envolve uma generalização dos números de Liouville, os números  $\mathcal{M}$ -exponencial Liouville.

---

\*Bolsista do Programa PET-Matemática

**Teorema 2** - Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , seja  $P_\alpha = D_1 - \alpha D_2$  em  $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^2)$ . O operador  $P_\alpha$  é globalmente  $\mathcal{M}$ -hipoelítico se, e somente se,  $\alpha$  for irracional e não  $\mathcal{M}$ -exponencial Liouville.

Por último, o terceiro resultado relaciona a hipoeliticidade de certos sistemas  $L$  de operadores diferenciais com coeficientes reais em  $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{d+1})$ , com a hipoeliticidade de sistemas  $P$  de operadores diferenciais com coeficientes constantes em  $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{d+1})$ . O sistema  $L$  é formado por operadores  $L_1, L_2, \dots, L_d$  dados por

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + a_j(t) \frac{\partial}{\partial x},$$

onde  $(t, x) \in \mathbb{T}^{d+1}$ , com  $t = (t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{T}^d$  e  $x \in \mathbb{T}$ , e  $a_j$  é uma função com valores reais pertencente a  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d)$ . Já o sistema  $P$  é formado pelos operadores  $P_1, P_2, \dots, P_d$  dados por

$$P_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \widetilde{a}_j \frac{\partial}{\partial x},$$

com  $\widetilde{a}_j = \int_0^{2\pi} a_j(0, \dots, 0, t_j, 0, \dots, 0) dt_j$ .

**Teorema 3** - Suponha que

$$\frac{\partial a_j}{\partial t_k} = \frac{\partial a_k}{\partial t_j}, \quad j, k = 1, 2, \dots, d.$$

Então o sistema  $L$  é globalmente  $\mathcal{M}$ -hipoelítico se, e somente se, o sistema  $P$  o for.

A demonstração do Teorema 3 é feita com a definição de um certo automorfismo  $T$  de  $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{d+1})$  satisfazendo  $P_j = T \circ L_j \circ T^{-1}$ , cuja definição utiliza séries parciais de Fourier em  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d)$  e  $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^d)$ . O Teorema 3 nos permite estudar a hipoeliticidade de  $(L_1, L_2, \dots, L_d)$  usando o Teorema 1 de forma indireta: verificamos a hipoeliticidade de  $(P_1, P_2, \dots, P_d)$  e então aplicamos o Teorema 3.

## Referências

- [1] DE LESSA VICTOR, B. **Hipoeliticidade em classes de funções ultradiferenciáveis no toro**. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Paraná, 2021.
- [2] BEALS, R. **Advanced mathematical analysis**. Springer. 1973.
- [3] DE OLIVEIRA, C.R. **Introdução à análise funcional**. 2.Ed. - Rio de Janeiro: Impa, 2018.

# Sobrejetividade da função cosseno no plano complexo

Raphael Luciani\*

raphaellucianimat@gmail.com <sup>1</sup>

Felipe Vieira (Orientador)

f.vieira@ufsc.br <sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Universidade Federal de Santa Catarina - campus Blumenau

**Palavras-chave:** Sobrejetividade, Trigonometria, Complexos.

## Resumo:

Nosso foco é analisar a sobrejetividade da função cosseno quando definida no conjunto dos números complexos. Supondo conhecida a definição da função exponencial complexa, temos:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

A partir disso e dado um número complexo  $z = x + iy$ , concluímos que

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y,$$

o que nos leva a

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y}.$$

Isso já mostra um fato interessantíssimo: a função cosseno no plano complexo é ilimitada, podendo assumir qualquer valor real maior do que 0.

Ademais, para analisar o argumento da função cosseno, separamos em casos:

(i) Se  $z = \frac{\pi}{2} + k\pi + yi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , então

$$\cos z = \begin{cases} -i \operatorname{senh} y, & \text{se } k \text{ é par,} \\ i \operatorname{senh} y, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

assim

$$\arg(\cos z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{se } y < 0 \text{ e } k \text{ é par ou se } y > 0 \text{ e } k \text{ é ímpar,} \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } y < 0 \text{ e } k \text{ é ímpar ou se } y > 0 \text{ e } k \text{ é par.} \end{cases}$$

---

\*Voluntário do programa de iniciação científica

(ii) Se  $\Re(z) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e  $\theta = \arctan(-\tan x \tanh y)$ , então

$$\arg(\cos z) = \begin{cases} \theta, & \text{se } \cos z \in 1^{\text{a}} \text{ quadrante,} \\ \pi + \theta, & \text{se } \cos z \in 2^{\text{a}} \text{ quadrante,} \\ \pi + \theta, & \text{se } \cos z \in 3^{\text{a}} \text{ quadrante,} \\ 2\pi + \theta, & \text{se } \cos z \in 4^{\text{a}} \text{ quadrante.} \end{cases}$$

Ou seja, o argumento do número  $\cos z$  pode assumir qualquer valor. Somando isso ao fato dela ser ilimitada, é de se esperar que seja sobrejetora.

Para demonstrarmos essa suposição, começamos lembrando que a função cosseno será sobrejetora se, para todo  $w \in \mathbb{R}$ , existir pelo menos um  $z \in \mathbb{R}$ , tal que:

$$w = \cos z.$$

Por definição:

$$\begin{aligned} w &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow 2w = e^{iz} + e^{-iz} \\ &\Rightarrow e^{iz} 2w = e^{2iz} + 1 \\ &\Rightarrow e^{2iz} - e^{iz} 2w + 1 = 0. \end{aligned}$$

Fazendo  $x = e^{iz}$ , temos

$$x^2 - 2wx + 1 = 0.$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, sabemos que esse polinômio tem pelo menos uma raiz. Ou seja, existe um número complexo  $x$  que resolve a equação acima. Vamos escrevê-lo na forma polar

$$x = r_x(\cos \theta_x + i \operatorname{sen} \theta_x).$$

Tomando  $z = \theta_r - i \ln r_x$ , temos

$$e^{iz} = x,$$

ou seja, a função  $f(z) = \cos(z)$  é sobrejetora.

## Referências

- [1] BECK, Vinicius Carvalho; SUAZO, Germán Ramón Canahualpa. Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra através do Teorema de Cauchy-Goursat. Disponível em:

[https://www2.ufpel.edu.br/cic/2009/cd/pdf/CE/CE\\_02066.pdf](https://www2.ufpel.edu.br/cic/2009/cd/pdf/CE/CE_02066.pdf). Acesso em: 27 maio 2024.

- [2] DE SOUSA JR., Luiz A. M.; JUTUCA, Luiz P. S. G.. Introdução às Funções de Variáveis Complexas. Rio De Janeiro: Fundação Cecierj, 2016. 236 p. v. Unico. Disponível em:  
<https://canal.cecierj.edu.br/122016/06791f2eb2c363257d87bf834759a054.pdf>. Acesso em: 17 out. 2023.
- [3] SALVADO, Claudio D'Alessandro. Teorema Fundamental da Álgebra: Ferramentas para Demonstrar para Alunos do Ensino Médio. Disponível em:  
[https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/TCC\\_Claudio\\_Salvado.pdf](https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/TCC_Claudio_Salvado.pdf). Acesso em: 27 maio 2024.
- [4] STERWART, James. Cálculo. 7. ed. São Paulo: Cengage Learnig, 2013. 661 p. v. 1.
- [5] ZANI, Sérgio L. Funções de Uma Variável Complexa, Disponível em:  
<https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/assets/complexa.pdf>. Acesso em: 17 out. 2023.

# A Desigualdade Isoperimétrica

Ruan Pablo Ronson Luqueti\*

ruanpablaronsonluquete@gmail.com<sup>1</sup>

Lilian Cordeiro Brambila (Orientadora)

lilianc@utfpr.edu.br<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Tecnológica Federal do Paraná

<sup>2</sup>Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**Palavras-chave:** desigualdade isoperimétrica, séries de funções, séries de Fourier.

**Resumo:** A desigualdade isoperimétrica é um resultado matemático que relaciona a área de uma região limitada por uma curva fechada no plano com o seu comprimento. Este teorema tem mais de uma demonstração e possui aplicações em diversas áreas da matemática, e sua origem remonta à lenda da princesa Dido, que, de acordo com uma versão da lenda, precisou refugiar-se ao norte da África por volta do século IX a.C. após conflitos políticos em sua cidade natal. Nesse novo lugar, foi-lhe entregue couro de boi e feita a seguinte oferta: “Você pode ter tanta terra quanto cercar com couro de boi” (MOTA, p.1, 2018). Com essa restrição, a princesa recortou o couro de um boi em tiras pequenas e, utilizando a fronteira com o mar, cercou a maior área possível, criando assim a cidade de Cartago.

Diante desta lenda, tornou-se objetivo deste trabalho, estudar a desigualdade isoperimétrica e responder sob quais condições se maximiza a área de uma curva fechada, dado um perímetro fixo. A demonstração escolhida para ser estudada utilizava como ferramenta as séries de Fourier. Sendo assim, foram necessários estudos dirigidos sobre sequências e séries de funções, uma vez que elas fundamentam os estudos de séries de Fourier, além de alguns resultados sobre curvas fechadas simples. Esse resultado clássico da Geometria Diferencial possui o seguinte enunciado:

**Teorema 1 (A desigualdade isoperimétrica)** *A área  $A$  englobada por qualquer curva simples plana fechada retificável  $C$ , de comprimento  $L$ , satisfaz a desigualdade*

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi};$$

*além disso, a igualdade ocorre, se e só se,  $C$  for um círculo.*

Portanto, a apresentação terá por objetivo expor a demonstração da desigualdade isoperimétrica de acordo com [1], bem como os principais pré-requisitos envolvidos no tema.

---

\*Programa Institucional de Voluntariado em Iniciação Científica - UTFPR, campus Curitiba.

## Referências

- [1] FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: Coleção Euclides, IMPA, 2018.
- [2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 1. Rio de Janeiro, 2013.
- [3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 3. Rio de Janeiro, 2013.
- [4] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 4. Rio de Janeiro, 2013.
- [5] LIMA, Elon Lages, **Curso de Análise**. Vol. 1, 15ª edição. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2019.
- [6] MARSDEN, J. E; TROMBA, A. J. **Cálculo Vetorial**. Tradução de Cassius Regazzoni. 1. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2001.
- [7] MOTA, Wélisson Martins. **Investigando a Desigualdade Isoperimétrica**. Anais X EPBEM e V ECMAT. Campina Grande: Realize Editora, 2018.

# *Análise Numérica*

*Comissão Científica:*

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Ailin Ruiz de Zarate Fabregas

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Ana Gabriela Martinez

# Modelagem matemática da hemodinâmica em válvulas aórticas bicúspides

Fernanda de Oliveira de Jesus

fernandaoj@ufpr.br

Prof. Dr. Elías Gudiño (Orientador)

egudino@ufpr.br

Universidade Federal do Paraná (UFPR)

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática, Simulação Numérica, Interação Fluido-Estrutura.

## Resumo:

A válvula aórtica bicúspide (VAB) é uma condição congênita em que a válvula aórtica possui apenas duas cúspides em vez das três normais. Essa anomalia pode levar a problemas cardiovasculares, como estenose e insuficiência aórtica. Na prática clínica, embora as técnicas de processamento de imagens sejam essenciais, a principal dificuldade reside em monitorar adequadamente a função da válvula e avaliar as complicações que podem surgir ao longo do tratamento. Nesse contexto, a modelagem matemática da hemodinâmica em válvulas aórticas bicúspides surge como uma ferramenta complementar valiosa, permitindo diferentes abordagens para a intervenção clínica e oferecendo uma compreensão mais profunda das relações entre a hemodinâmica e as complicações e riscos associados.

Ao representar a VAB e suas componentes como entidades matemáticas, é possível simular seu comportamento dinâmico em diversas condições fisiológicas e patológicas. Neste estudo, empregamos uma abordagem integrada que combina equações fundamentais da mecânica dos fluidos e da mecânica dos sólidos, possibilitando uma análise detalhada da interação entre o fluxo sanguíneo e a estrutura valvar.

Para modelar o fluxo sanguíneo, dentro do domínio do fluido  $\Omega_t$ , utilizamos as equações de Navier-Stokes para fluidos newtonianos incompressíveis:

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V(\nabla \cdot V) \right) + \nabla p - \mu (\nabla V + \nabla V^T) = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot V = 0, \quad (2)$$

onde  $V$  é o campo de velocidade,  $p$  é a pressão,  $\rho$  é a densidade do sangue e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do sangue. Estas equações fornecem uma descrição matemática detalhada da dinâmica do fluxo sanguíneo, incluindo a distribuição de velocidade, a formação de gradientes de pressão e a geração de tensões de cisalhamento nos tecidos valvares.

A fronteira do domínio do fluido, denotada por  $\partial\Omega_t = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{wall} \cup \Gamma_{out}$ , está sujeita às seguintes condições:

$$p = p_0, \quad [\mu (\nabla V + \nabla V^T)] \cdot n = 0 \quad \text{em } \Gamma_{in}, \quad (3)$$

$$[-pI \cdot (\nabla V + \nabla V^T)] \cdot n = -\tilde{p}_0 \cdot n \quad \text{em } \Gamma_{out}, \quad (4)$$

$$V = 0 \quad \text{em } \Gamma_{wall}. \quad (5)$$

Na entrada, foi imposto um valor para a pressão e ausência de tensão viscosa, onde  $n$  é o vetor normal unitário externo a  $\Gamma_{in}$ . Na saída, temos que  $\tilde{p}_0 \leq p_0$  e  $n$  é o vetor normal unitário externo a  $\Gamma_{out}$ . Além disso, nas paredes  $\Gamma_{wall}$  foi imposto esse valor para o campo de velocidade devido à condição de não deslizamento.

Para descrever a dinâmica da estrutura da válvula, utilizamos um modelo linear elástico. Neste modelo, a equação da estrutura é dada por:

$$\rho_e \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} - \nabla \cdot (F(d)S(d)) = 0 \quad \text{em } \Omega_0, \quad (6)$$

onde  $\rho_e$  a densidade do material,  $F$  é o tensor gradiente de deformação,  $S$  o segundo tensor de Piola-Kirchhoff e  $d$  o deslocamento da estrutura em resposta às tensões exercidas pelo fluxo sanguíneo.

A fronteira do domínio da estrutura,  $\partial\Omega_0 = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , está dividida em  $\Gamma_D$ , associada à condição de Dirichlet, e  $\Gamma_N$ , associada à condição de Neumann. As condições de contorno são dadas por:

$$d(x, t) = 0 \quad \text{em } \Gamma_D, \quad (7)$$

$$F(d)S(d)n_0 = 0 \quad \text{em } \Gamma_N, \quad (8)$$

onde  $n_0$  é o vetor unitário normal ao elemento de área da fronteira  $\Gamma_N$ .

Finalmente, este problema de interação fluido-estrutura, formado pelas Equações (1) – (8), é fechado por condições de interface apropriadas entre  $\Omega_0$  e  $\Omega_t$ , garantindo a continuidade das velocidades e das componentes normais das tensões.

Para aprofundar a análise do comportamento da VAB, realizamos uma simulação numérica utilizando o software COMSOL Multiphysics, com base no trabalho de Torrado et al. (2015). Este software emprega o Método dos Elementos Finitos (MEF), uma técnica que permite decompor o problema em elementos finitos e resolver as equações de Navier-Stokes e de elasticidade de forma integrada. Dessa maneira, o COMSOL captura com precisão as complexidades do sistema, possibilitando uma análise detalhada das condições hemodinâmicas da válvula ao longo do ciclo cardíaco.

Para aprofundar a compreensão dessa interação, escolhemos analisar a válvula em quatro momentos do ciclo cardíaco: o início e o pico da sístole ventricular, bem como o final da sístole e o início da diástole ventricular. Esses instantes foram selecionados devido à sua relevância fisiológica e ao impacto significativo que exercem sobre a função da válvula e o comportamento do fluxo sanguíneo. Durante o início e o pico da sístole, a válvula aórtica experimenta as maiores pressões e fluxos sanguíneos, o que pode levar a estresses elevados e a possíveis alterações no comportamento hemodinâmico. O final da sístole e o início da diástole, por outro lado, representam momentos de transição crítica onde a válvula deve adaptar-se rapidamente às mudanças na pressão e no fluxo, tornando essas fases fundamentais para entender a mecânica da válvula em condições de estresse variado.

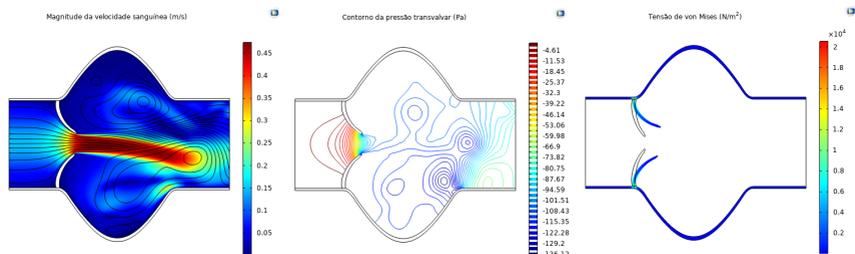


Figura 1: Hemodinâmica em VAB no instante 0,8 s do ciclo cardíaco.

Em conclusão, este estudo sobre a válvula aórtica bicúspide, utilizando simulação numérica e modelagem matemática, forneceu uma compreensão detalhada da interação entre o fluxo sanguíneo e a estrutura valvar ao longo do ciclo cardíaco. A análise dos momentos críticos da sístole e diástole revelou informações valiosas sobre a pressão transvalvar, a magnitude da velocidade sanguínea e as tensões de von Mises nos tecidos valvares, esclarecendo o comportamento hemodinâmico e estrutural da válvula em diferentes condições. A partir desses dados, é possível discernir os mecanismos normais e patológicos da função valvar, bem como identificar possíveis riscos e alterações que podem se manifestar ao longo do tempo.

## Referências

- [1] TORRADO, A. et al. **Analysis of Hemodynamic Indicators in Bicuspid Aortic Valves Using a Computational Mathematical Model**. Dissertação (Mestrado). Instituto Superior Técnico Lisboa, Portugal, 2015.
- [2] JESUS, F. O. **Modelagem matemática da hemodinâmica em válvulas aórticas bicúspides**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2024.
- [3] FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 5ª edição. LTC Editora, 2001.
- [4] FORMAGGIA, L.; QUARTERONI, A.; VENEZIANI, A. **Cardiovascular Mathematics: Modeling and simulation of the circulatory system**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. v. 1.
- [5] JOHN, V. **Finite element methods for incompressible flow problems**. [S.l.]: Springer, 2016. v. 51.

# Resolvendo EDPs Parametrizadas Não-Lineares com Redes Neurais Informadas pela Física

Guilherme Furquim\*

furquim.guilherme@ufpr.br<sup>1</sup>

Thiago de Oliveira Quinelato (Orientador)

thiago.quinelato@ufpr.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná (UFPR)

**Palavras-chave:** EDPs, Machine Learning, Redes Neurais.

**Resumo:** Diversos problemas de interesse prático podem ser descritos na forma de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) com dependência temporal. Sistemas de grande utilidade prática são modelados por EDPs, como a difusão de calor numa superfície (equação do calor) e a dinâmica de fluidos livres — equações de Navier-Stokes e de Korteweg-de-Vries (KdV) modificada. Esta última é nosso exemplo motivador e modela a dispersão de ondas unidimensionais não-lineares e não dissipativas.

Seguindo a formulação de Raissi [1] adotamos um *framework* que permite desenvolver redes neurais totalmente conectadas para solução aproximada de EDPs não-lineares da forma geral

$$u_t(x, t) + N[u(x, t), \lambda] = 0, \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \in [0, T], \quad (1)$$

onde  $u(x, t)$  é a solução latente (oculta) do sistema e  $N[\cdot; \lambda]$  é um operador diferencial (possivelmente não-linear) parametrizado por  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

No caso da KdV modificada temos  $N[u(x, t); \lambda] = \lambda_1 u^2 u_x + \lambda_2 u_{xxx}$  sendo  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2] \in \mathbb{R}^2$ .

Definimos  $f(x, t)$  como o lado esquerdo da equação (1)

$$f := u_t + N[u] \quad (2)$$

e prosseguimos por aproximar  $u(t, x)$  por uma rede neural cujos parâmetros são aprendidos ao minimizar o erro quadrático médio

$$MSE = MSE_u + MSE_f, \quad (3)$$

onde

$$MSE_u = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} |u(x_u^i, t_u^i) - u^i|^2$$

---

\*Voluntário do Programa de Voluntariado Acadêmico.

e

$$MSE_f = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} |f(x_f^i, t_f^i)|^2,$$

sendo  $\{x_u^i, t_u^i\}_{i=1}^{N_u}$  os pontos iniciais ou de borda,  $\{u^i\}_{i=1}^{N_u}$  os valores de  $u$  nesses pontos e  $\{x_f^i, t_f^i\}_{i=1}^{N_f}$  os pontos de colocação no interior do domínio onde resolvemos a equação.

Embora não exista comprovação teórica de que os mínimos globais dos erros  $MSE_u$  e  $MSE_f$  são sempre suficientemente próximos de 0 e nem de que o treinamento da rede sempre converge para um mínimo global, temos evidências empíricas de que em alguns casos a rede é capaz de aproximar uma solução de uma dada EDP com erros relativamente pequenos. Nesses casos onde  $MSE_u$  e  $MSE_f$  são suficientemente próximos de 0, sabemos que de  $MSE_u$  a rede aproximou bem as condições iniciais e de borda, e de  $MSE_f$  a rede aproximou bem o comportamento da EDP, assim com o erro  $MSE = MSE_u + MSE_f$  suficientemente próximo de 0 temos uma boa aproximação para nossa solução desejada. A qualidade da aproximação depende do tipo de equação que resolvemos e se a solução é única (a partir da condição inicial).

Quando  $f(x, t)$  depende de uma constante real, digamos  $a$ , é razoável inferir que  $u(x, t)$  pode também depender desse parâmetro; podemos incorporar essa constante como uma variável no treinamento da rede ao definir uma outra função  $u^*(a, x, t)$  com o mesmo valor de  $u$  para cada dado  $a$ , uma expressão  $f^* = u_t^* + N[u^*]$  e os erros

$$MSE_{u^*} = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} |u^*(a_{u^*}^i, x_{u^*}^i, t_{u^*}^i) - u^{*i}|^2,$$

$$MSE_{f^*} = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} |f^*(a_{f^*}^i, x_{f^*}^i, t_{f^*}^i)|^2.$$

Prosseguimos por minimizar o erro  $MSE^* = MSE_{u^*} + MSE_{f^*}$ , que quando suficientemente próximo de zero pode aproximar a solução da EDP para cada parâmetro  $a$  em um dado intervalo.

Nos é útil incorporar  $a$  no espaço de parâmetros pois ao treinar a rede para um  $a$  fixo, caso tentemos prever a solução para um  $a$  diferente do usado no treinamento não teremos uma aproximação boa da rede. Assim, seria necessário treinar a rede para cada valor de  $a$ . Se incorporarmos  $a$  no espaço de parâmetros, no entanto, podemos treinar a rede uma única vez e utilizá-la para calcular o valor de  $u^*(a, x, t)$  para cada valor de  $a$  em um dado intervalo.

Como exemplo, resolvemos a equação de Korteweg-de-Vries, definida da seguinte forma:

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad \text{para } (x, t) \in [-10, 10] \times [0, 15],$$

com a condição inicial definida pela solução exata

$$u(a, x, t) = a \operatorname{sech} \left[ \frac{a}{\sqrt{6}} \left( x - \frac{a^2}{6} t \right) \right]$$

calculada em  $t = 0$ . O parâmetro  $a$  está no domínio  $[1, 2]$ .

Treinamos uma rede neural totalmente conectada com 5 camadas de 60 neurônios cada, com função de ativação  $\tanh$ . Foram usados 30000 pontos de colocação no interior do domínio e 1200 pontos na condição inicial  $t = 0$ . Não foram usados pontos

de colocação para impor a condição de borda. O otimizador utilizado foi o Adam, com taxa de aprendizado de 0.001. Usamos a biblioteca DeepXDE [2] para treinar a rede. Para cada valor de  $a$  e de  $t$  da grade mostrada na Figura 1, o cálculo do erro na norma  $L^2$  é feito pela biblioteca numpy [3] com a fórmula

$$\text{np.linalg.norm}(y\_true - y\_pred) / \text{np.linalg.norm}(y\_true),$$

onde  $y\_true$  é um vetor contendo em cada elemento a solução exata para um valor de  $x$  no domínio e  $y\_pred$  é um vetor com a solução prevista pela rede. O erro relativo máximo nos pontos considerados é de cerca de 32%, enquanto a média do erro nesse conjunto de dados é de aproximadamente 8%. Optamos por não incluir condições de borda pois procuramos inferir o mínimo de suposições possíveis sobre o problema, mantendo apenas a condição inicial.

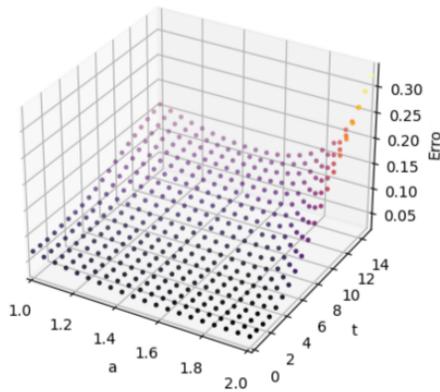


Figura 1: Erro relativo na norma  $L^2$  da solução para a equação mKdV aproximada por uma rede neural. Em cada ponto da grade é mostrado o erro com  $x \in [-10, 10]$ .

## Referências

- [1] RAISSI, M.; PERDIKARIS, P.; KARNIADAKIS, G. E. **Physics-informed neural networks**: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. Providence: Elsevier, 2019.
- [2] LU, L.; MENG, X.; MAO, Z.; KARNIADAKIS, G. E. DeepXDE: A deep learning library for solving differential equations. **SIAM Review**, v. 63, n. 1, p. 208–228, 2021.
- [3] HARRIS, C. R.; MILLMAN, K. J.; WALT, S. J. van der; GOMMERS, R.; VIRTANEN, P.; COURNAPEAU, D.; WIESER, E.; TAYLOR, J.; BERG, S.; SMITH, N. J.; KERN, R.; PICUS, M.; HOYER, S.; KERKWIJK, M. H. van; BRETT, M.; HALDANE, A.; RÍO, J. F. del; WIEBE, M.; PETERSON, P.; GÉRARD-MARCHANT, P.; SHEPPARD, K.; REDDY, T.; WECKESSER, W.; ABBASI, H.; GOHLKE, C.; OLIPHANT, T. E. Array programming with NumPy. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 585, n. 7825, p. 357–362, set. 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.

# Solução Numérica da Equação do Transporte com Velocidade Variável via Redes Neurais

Guilherme Ozanski \*

Bacharelado em Matemática Industrial

gozanski@gmail.com <sup>1</sup>

Roberto Ribeiro Santos Junior (Orientador)

Departamento de Matemática

robertoribeiro@ufpr.br <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** Equação do Transporte, Redes Neurais Informadas pela Física, Transporte com Velocidade Variável.

## Resumo:

Neste trabalho, apresentamos uma nova abordagem para o tratamento numérico de equações diferenciais parciais (EDPs) utilizando redes neurais. Focamos especificamente na aplicação de redes neurais informadas pela física para a solução numérica da Equação do Transporte com Velocidade Variável:

$$\begin{cases} u_t + c(x)u_x = 0, & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = F(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $c(x) = 1/5 + \sin^2(x - 1)$  e  $F(x) = \exp(-100(x - 1)^2)$ . Fisicamente, essa equação modela a dinâmica de uma onda, cujo perfil inicial é dado por  $F(x)$  e que se propaga com velocidade  $c(x)$  que varia conforme a posição no espaço.

Na literatura, essa EDP tem sido resolvida numericamente por métodos clássicos, como os métodos espectrais baseados na transformada de Fourier [4] e esquemas de diferenças finitas [1]. O objetivo principal deste trabalho é investigar a aplicação de redes neurais na resolução numérica da equação (1), utilizando a abordagem conhecida como Redes Neurais Informadas pela Física (Physics-Informed Neural Networks, PINNs), conforme apresentado por [2]. A hipótese de pesquisa é que essa metodologia pode capturar a solução do problema com acurácia comparável à dos métodos tradicionais.

Sem muito rigor, uma rede neural pode ser entendida como uma função proveniente de uma sequência de composições entre uma função afim e uma função não linear, conforme ilustrado na equação a seguir

---

\*Bolsista do Programa PIBIC-UFPR.

$$y(x) = \sigma_d(W_d(\sigma_{d-1}(W_{d-1}(\dots(W_2\sigma_1(W_1x + b_1) + b_2) + \dots) + b_{d-1}) + b_d), \quad (2)$$

onde  $y(x)$  representa a saída da rede neural,  $d$  é o número de composições realizadas, também chamada de número de camadas,  $\sigma_i$  é a função não linear, denotada como função de ativação,  $W_i$  são os pesos dos neurônios e  $b_i$  são os vieses,  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ . Os valores de  $W_i$  e  $b_i$  são ajustados por meio de algoritmos de otimização, com o objetivo de minimizar uma função de custo específica para o problema em questão.

Com isso, basta definir uma função custo para o método das PINNs, a principal ideia é: dada a função  $u$  que é solução do problema (1), sabe-se que  $|u_t + c(x)u_x| = 0$  e  $|u(x, 0) - F(x)| = 0$ . Dessa forma, se uma função  $\hat{u}$  for uma boa aproximação de  $u$ , espera-se que  $|\hat{u}_t + c(x)\hat{u}_x|$  e  $|\hat{u}(x, 0) - F(x)|$  sejam próximos de 0. Com essa suposição, construímos a função de perda  $EQM$ , que é soma de outras duas funções:

$$\begin{aligned} EQM &= EQM_{\mathcal{D}} + EQM_0, \\ EQM_{\mathcal{D}} &= \frac{1}{N_{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{D}}} |\hat{u}_t(x_{\mathcal{D}}^i, t_{\mathcal{D}}^i) + c(x_{\mathcal{D}}^i)\hat{u}_x(x_{\mathcal{D}}^i, t_{\mathcal{D}}^i)|^2, \\ EQM_0 &= \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} |\hat{u}(x_0^i, 0) - F(x_0^i)|^2, \end{aligned} \quad (3)$$

em que os conjuntos  $\{(x_{\mathcal{D}}^i, t_{\mathcal{D}}^i)\}_{i=1}^{N_{\mathcal{D}}} \in \Omega \times (0, T)$  com  $T < \infty$  e  $\{x_0^i\}_{i=1}^{N_0} \in \Omega$  representam pontos escolhidos aleatoriamente e  $N_{\mathcal{D}}, N_0$  são a quantidade de pontos em cada conjunto.

O termo  $EQM_{\mathcal{D}}$  diz respeito ao operador diferencial da equação, já  $EQM_0$ , mede o quão perto a aproximação está da condição inicial.

Assim, transforma-se a Equação (1) no problema de otimização

$$\min_{W, b} EQM \quad (4)$$

e espera-se que, quanto menor for o valor  $EQM$ , melhor será a aproximação  $\hat{u}$  da rede neural para o problema de valor inicial.

O método das PINNs foi implementado usando a biblioteca DeepXDE [3], na linguagem de programação Python, apresentou resultados promissores nos ensaios numéricos, com erros relativos em torno de 0,1%. A Figura 1 ilustra o exemplo da aplicação de uma PINN ao problema (1) no domínio  $(-9, 9) \times (0, 12.8)$ .

Esse e outros resultados indicam que as PINNs têm potencial para fornecer soluções numéricas robustas para este tipo de problema, rivalizando com a precisão dos métodos clássicos já estabelecidos. Entretanto, é crucial reconhecer que, por se tratar de uma técnica emergente, as PINNs ainda não possuem uma análise numérica totalmente consolidada, o que representa uma desvantagem em comparação com métodos mais maduros, como os métodos espectrais e os esquemas de diferenças finitas. Sugere-se portanto, que as PINNs podem ser uma ferramenta poderosa para a solução numérica de EDPs, especialmente em problemas que lidam com condições de contorno não periódicas.

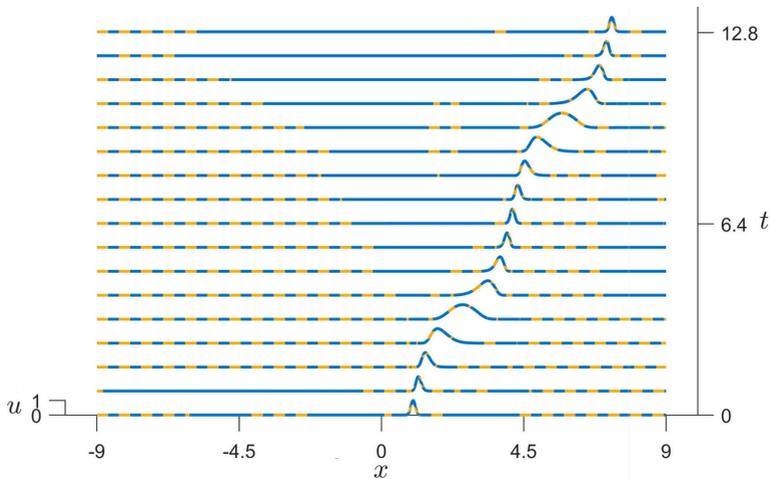


Figura 1: Aproximação via PINN, em azul, e solução de [1], em amarelo.

## Referências

- [1] BOTELHO, J. G. S. **Formulação de Esquemas Numéricos para a Resolução de Modelos de Equações Diferenciais Parciais de Transporte com Velocidade Variável e Fronteira periódica**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática Industrial): Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2023.
- [2] RAISSE, M.; PERDIKARIS, P.; KARNIADAKIS, G. E. **Physics Informed Deep Learning (Part I): Data-driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations**. arXiv preprint: arXiv:1711.10561, 2017.
- [3] LU, L.; MENG, X. Z.; KARNIADAKIS, G. E. **DeepXDE: A deep learning library for solving differential equations**. SIAM review 63 (2021) 208–228. doi:10.1137/19M1274067, 2021.
- [4] TREFETHEN, L. N. **Spectral methods in MATLAB**. SIAM, 2000.

# Solução Numérica para as Equações de Burgers e Korteweg-De Vries (KdV) por meio de Redes Neurais

Larry Steffen Bertoncello \*

larrybertoncello@ufpr.br <sup>1</sup>

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Santos Junior (Orientador)

robertoribeiro@ufpr.br <sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR

<sup>2</sup>Departamento de Matemática - UFPR

**Palavras-chave:** Redes Neurais Guiadas pela Física (PINNs), Equações Diferenciais Parciais (EDPs), Métodos Numéricos.

## Resumo:

Neste trabalho, abordamos numericamente duas Equações Diferenciais Parciais (EDPs) clássicas: a Equação de Burgers Viscosa e a Equação de Korteweg-De Vries (KdV), definidas da seguinte forma:

- **Equação de Burgers Viscosa:**

$$\begin{aligned}u_t + uu_x - \nu u_{xx} &= 0, & (x, t) &\in (-1, 1) \times (0, 1), \\u(x, 0) &= -\text{sen}(\pi x), & x &\in (-1, 1), \\u(-1, t) = u(1, t) &= 0, & t &\in (0, 1)\end{aligned}$$

- **Equação de Korteweg-De Vries (KdV):**

$$\begin{aligned}u_t - \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{6}u_{xxx} &= 0, & (x, t) &\in (-50, 50) \times (0, 60), \\u(x, 0) &= A \cdot \text{sech}^2(kx), & x &\in (-50, 50), \\u(-50, t) = u(50, t) &= 0, & t &\in (0, 60)\end{aligned}$$

Na literatura, essas EDPs são tradicionalmente resolvidas por métodos clássicos, como os Métodos Espectrais baseados na Transformada de Fourier [6]. Este trabalho tem como objetivo principal investigar a aplicação de Redes Neurais no tratamento numérico dessas equações.

---

\*Voluntário do Programa PIBIC

Uma rede neural pode ser entendida como uma aproximação  $F$  de uma função  $f$ , onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . A função  $F$  é definida por:

$$F(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma(\mathbf{w}_j^T x + \mathbf{b}_j),$$

onde

- $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função não linear, conhecida como função de ativação;
- $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$  é o vetor de viés ou viesis (em plural);
- $\mathbf{w}_j = (w_{1,j}, \dots, w_{n,j})$  é o vetor de pesos do  $j$ -ésimo neurônio;
- $\mathbf{w}_s = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  é o vetor de pesos do neurônio de saída.

O Teorema da Aproximação Universal [3] justifica o uso de redes neurais para a aproximação de funções. Esse teorema afirma que, para qualquer função contínua  $f$  definida em um conjunto compacto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe uma rede neural  $F$  tal que  $|F(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega$ . A figura 1 mostra uma representação gráfica de uma rede neural.

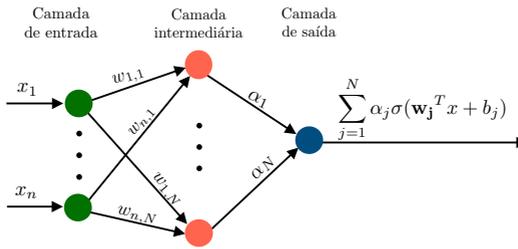


Figura 1: Representação de uma rede neural com apenas uma camada intermediária.

As Physics-informed Neural-Networks (PINNs), ou Redes Neurais Guiadas pela Física, são uma abordagem que integra leis físicas descritas por EDPs no treinamento de redes neurais para resolver problemas de aprendizagem supervisionada [5].

Para resolver EDPs numericamente, transformamos o problema de valor inicial e de fronteira em um problema de otimização. Especificamente, buscamos uma função  $u(x, t)$  que, ao ser aproximada por uma rede neural, minimize os seguintes problemas de otimização simultaneamente:

**Problema 1. Operador Diferencial:**

$$\min |\mathcal{D}(x, t)| \quad \text{s.a.} \quad (x, t) \in (\xi_1, \xi_2) \times (0, T),$$

onde  $\mathcal{D}(x, t)$  é o operador diferencial aplicado à função  $u(x, t)$ .

Para a equação de Burgers, o operador é representado por  $\mathcal{D}(x, t) = u_t + uu_x - \nu u_{xx}$ , enquanto para a equação de KdV, o operador é dado por  $\mathcal{D}(x, t) = u_t - \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{6}u_{xxx}$ . Sendo  $u(x, t)$  a função aproximada via rede neural.

### Problema 2. Condição Inicial:

$$\min |u(x, 0) - u_0(x)| \quad \text{s.a.} \quad x \in (\xi_1, \xi_2) \text{ e } t = 0.$$

onde  $u_0(x)$  é a condição inicial.

### Problema 3. Condição de Fronteira/Bordo:

$$\min |u(\xi_1, t)| + |u(\xi_2, t)| \quad \text{s.a.} \quad t \in (0, T).$$

A função  $u(x, t)$  é ajustada via minimização do Erro Quadrático Médio (EQM) da função de perda, definida como: [1, 2, 5].

$$\text{EQM} = \text{EQM}_D + \text{EQM}_0 + \text{EQM}_b,$$

onde:

- $\text{EQM}_D$  é o erro associado ao operador diferencial;
- $\text{EQM}_0$  é o erro relacionado à condição inicial;
- $\text{EQM}_b$  é o erro associado à condição de fronteira.

Aplicamos essa metodologia às duas EDPs mencionadas, usando Python, com implementações baseadas em [1, 4, 5]. A metodologia numérica adotada permitiu soluções para ambos os problemas com erro relativo da ordem de  $10^{-4}$ .

### Referências

- [1] BLECHSCHMIDT, J.; ERNST, O. G. Three ways to solve partial differential equations with neural networks — A review. **GAMM-Mitteilungen**, v. 44, 2021. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/gamm.202100006>. Acesso em: 13 ago. 2024.
- [2] GUO, Y. et al. Solving Partial Differential Equations Using Deep Learning and Physical Constraints. **Applied Sciences**, v. 10, n. 17, p. 5917, 2020. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2076-3417/10/17/5917>. Acesso em: 13 ago. 2024.
- [3] HASSOUN, M. H. **Fundamentals of Artificial Neural Networks**. Cambridge, Mass.: The Mit Press, 1995.
- [4] LU, L. et al. DeepXDE: A Deep Learning Library for Solving Differential Equations. **SIAM Review**, v. 63, n. 1, p. 208-228, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/19M1274067>. Acesso em: 13 ago. 2024.
- [5] RAISSI, M.; PERDIKARIS, P.; KARNIADAKIS, G. E. **Physics Informed Deep Learning (Part I): Data-driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations**. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1711.10561>. Acesso em: 13 ago. 2024.
- [6] SHEN, J.; TANG, T.; WANG, L.-L. **Spectral methods: Algorithms, Analysis and Application**. [s.l.] Springer Science & Business Media, 2011. v.41

# Algoritmo de criptografia com matrizes em Portugol e Javascript

Lucas Nakashima\*

lucas.nakashima@ufpr.br<sup>1</sup>

Janaina Schoeffel (Orientadora)

janainaschoeffel@ufpr.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Setor de Educação Profissional e Tecnológica da UFPR

**Palavras-chave:** Matrizes, Cifra de Hill, Portugol.

## Resumo:

Este trabalho integra conhecimentos de matemática e de computação, mais precisamente, os conceitos e as operações de matrizes e de aritmética modular embasaram a implementação de um código para criptografia por Cifra de Hill.

A motivação para a realização do trabalho surgiu após o estudo do algoritmo da cifra na disciplina de Matemática Aplicada II do Curso Técnico em Petróleo e Gás (ver [1] e [2], por exemplo), quando o autor identificou a possibilidade de construir um programa de computador que automatizasse as etapas desse processo.

A partir disso, foi proposto um plano de trabalho dentro do Programa de Voluntariado Acadêmico com o objetivo de desenvolver tal programa em formato acessível para alunos e professores de Ensino Médio. Para atingir tal objetivo a linguagem de programação utilizada para a implementação do algoritmo foi o Portugol, pois é uma linguagem que se aproxima da escrita em português. O código completo pode ser obtido em <https://github.com/lucasnakashima/hillcipher>. Segue abaixo a descrição das etapas realizadas por cada função criada no código:

- `string_to_array()`: Converte uma string em uma array.
- `verify()`: Verifica se a chave digitada pelo usuário pode ser utilizada, vendo se possui uma inversa em  $Z_{26}$ .
- `absval()`: Retorna o valor absoluto de um número
- `encrypt()`: Criptografa a mensagem, multiplicando a matriz chave pela matriz mensagem, além de imprimir a mensagem cifrada ao usuário.
- `decrypt()`: Descryptografa a mensagem, calculando a matriz inversa da chave e multiplicando-a pela matriz mensagem cifrada, além de imprimir a mensagem original ao usuário.

---

\*Voluntário do Programa de Voluntariado Acadêmico (PVA)

- `char_to_int()`: Converte um caractere em seu número correspondente.
- `int_to_char()`: Converte um número em seu caractere correspondente em  $Z_{26}$ .

Também destaca-se um dos principais trechos do código:

```
//Descriptografa a mensagem
//Calcula a matriz inversa da chave
//Multiplica ela pela matriz mensagem
funcao vaziao decrypt() {
    inteiro inverted_key_matrix[2][2]

    inverted_key_matrix[0][0] = key_matrix[1][1] * inverted_determinant
    inverted_key_matrix[0][1] = key_matrix[0][1] * -1 * inverted_determinant
    inverted_key_matrix[1][0] = key_matrix[1][0] * -1 * inverted_determinant
    inverted_key_matrix[1][1] = key_matrix[0][0] * inverted_determinant

    inteiro i, j, R

    //Depois de os elementos da matriz inversa
    //terem sido multiplicados pelo inverso multiplicativo
    //do determinante módulo charset, eles são substituídos
    //pelos equivalentes deles módulo charset
    para (i = 0; i < 2; i++) {
        para (j = 0; j < 2; j++) {
            R = absval(inverted_key_matrix[i][j]) % char_size
            se (inverted_key_matrix[i][j] >= 0) {
                inverted_key_matrix[i][j] = R
            }
            se (inverted_key_matrix[i][j] < 0) {
                se (R != 0) {
                    inverted_key_matrix[i][j] = char_size - R
                }
                se (R == 0) {
                    inverted_key_matrix[i][j] = 0
                }
            }
        }
    }
    inteiro k, accumulator = 0
    para (i = 0; i < 2; i++) {
        para (j = 0; j < column; j++) {
            para (k = 0; k < 2; k++) {
                accumulator += inverted_key_matrix[i][k] * message_matrix[k][j]
            }
            escreva(int_to_char(accumulator))
            accumulator = 0
        }
    }
}
```

A linguagem Portugol facilita a leitura e o entendimento dos passos do algoritmo, entretanto não é prática para executar o programa, pois exige a instalação de software específico no computador do usuário [3]. Assim, decidiu-se criar uma página na web para permitir o acesso online ao programa de encriptação e desencriptação, havendo a implementação do mesmo algoritmo na linguagem Javascript cujo código foi embutido no código HTML e CSS do site, o qual foi hospedado gratuitamente com o GitHub Pages, no endereço <https://lucasnakashima.github.io/hillcipher/>.

Utilizando-se das `<script>` e `</script>` do HTML foi possível incluir o algoritmo e a estrutura da página em um único arquivo, tornando-a facilmente portátil e distribuível, sendo necessário apenas o seu download para ser utilizado offline, tanto no celular quanto no computador. Havendo qualquer navegador instalado, o programa pode ser executado.

A realização do trabalho permitiu ao autor, além de aprofundar os estudos de matrizes e aritmética modular, que são as bases matemáticas da Cifra de Hill, exercitar a busca por tecnologias que permitissem o acesso democrático ao programa por alunos e professores do Ensino Médio a partir de qualquer computador ou celular.

Finalmente, o autor pôde vivenciar, juntamente com a orientadora, a experiência de escrever e submeter um artigo descrevendo o trabalho realizado. O periódico escolhido foi a revista Professor de Matemática Online. A iniciativa deste trabalho mostra quão enriquecedor pode ser o trabalho de pesquisa com alunos do Ensino Médio, sobretudo numa perspectiva interdisciplinar.

## Referências

- [1] DANTE, L.R. **Matemática**: contexto & aplicações, volume 2. 2ª edição. São Paulo: Ática, 2014.
- [2] Criptografia. Disponível em: [https://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/aplicacao\\_criptografia.html](https://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/aplicacao_criptografia.html). Acesso em: 05 set. 2024.
- [3] Portugol Studio. Disponível em: <https://univali-lite.github.io/Portugol-Studio/>. Acesso em: 05 set. 2024.

# Operações aritméticas em Posit: um sistema de ponto flutuante com precisão variável

Mateus Rebellato Ussui\* <sup>1</sup>

Thiago de Oliveira Quinelato (Orientador)

thiago.quinelato@ufpr.br <sup>1</sup>

<sup>1</sup>UFPR – Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** representação numérica, Posit, operações aritméticas.

## Resumo:

A representação numérica é fundamental em sistemas computacionais, pois define como os números são armazenados e manipulados pelos processadores. A forma mais comum de representar números reais em computadores é através do sistema de ponto flutuante (IEEE 754) [1]. Este sistema representa números em ponto flutuante da forma

$$(-1)^s \times 2^{(e-\text{bias})} \times (1 + f), \quad (1)$$

onde  $s$  é o sinal,  $e$  o expoente,  $(e - \text{bias})$  trata de expoentes positivos e negativos, e  $f$  a parte fracionária da representação.

Uma das maiores limitações do sistema de ponto flutuante IEEE754, a motivação inicial desta pesquisa, é sua precisão fixa, ou seja, o tamanho de cada partição da representação binária é determinado previamente. Isso significa que a precisão do número não pode ser ajustada de acordo com a necessidade específica de uma aplicação. Por exemplo, ao utilizar uma representação de ponto flutuante de precisão simples (32 bits), 8 bits são utilizados para armazenar o expoente, independentemente da necessidade de todos esses bits.

Além disso, o sistema desperdiça muitas representações devido à existência de NaN (*Not a Number*),  $\pm 0$  e  $\pm \infty$ . Em precisão simples, um NaN é representado por um bit de sinal, 8 bits 1 no expoente, e qualquer combinação possível na fração (exceto todos os bits iguais a zero), resultando em  $2^{23} - 1$  representações que poderiam ser usadas para números, mas são reservadas para NaN.

Essas limitações motivaram o desenvolvimento de novas formas de representação numérica, estas com precisão variável, isto é, sistemas nos quais o tamanho de cada partição da representação pode ser ajustado dinamicamente [2]. Um exemplo dessas novas formas, proposto por John L. Gustafson, é o sistema Posit [3, 4], o principal

---

\*Bolsista do Programa de Iniciação Científica/INCTMat de 10/2023 a 05/2024. Voluntário do Programa de Voluntariado Acadêmico a partir de 06/2024.

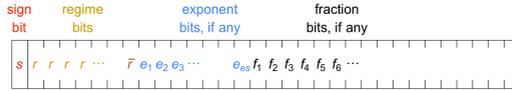


Figura 1: Segmentações da representação binária de um Posit. Fonte: [3].

objeto de estudo desta pesquisa. Diferente de (1), sua representação é explicitada como  $\text{Posit}(ps, es)$ , dada na forma

$$(-1)^s \times 2^e \times useed^k \times (1 + f),$$

onde  $ps$  é o tamanho total do Posit (em *bits*),  $es$  é o tamanho máximo que o expoente pode armazenar (em *bits*),  $useed = 2^{2^{es}}$  é um “super expoente” fixo e  $k$  relaciona a quantidade de bits repetidos no *regime* (ver Fig. 1).

O *regime* de um número consiste em uma sequência de *bits* repetidos. Essa sequência pode ser truncada de acordo com a necessidade, sob a condição de que o próximo *bit* seja diferente do anterior. A seguir, a partição do expoente é tratada da mesma forma, podendo ser truncada até um tamanho máximo de  $es$ . O restante dos *bits* representa a fração  $f$ .

Uma ferramenta que permita a comparação e utilização dessa representação numérica seria de grande utilidade para métodos numéricos ou algoritmos de aprendizado de máquina que exigem maior precisão ou lidam com números de ordens de grandeza muito grandes ou muito pequenas [5, 6, 7].

Apesar de existirem tentativas de implementação do formato Posit e das operações aritméticas com números nessa representação, tanto em *software* [8] quando em *hardware* [2], nenhuma dessas opções mostrou-se viável para experimentações numéricas que considerem diferentes configurações de Posit, isto é, diferentes  $ps$  e  $es$ . Diante disso, o objetivo desta pesquisa é construir uma biblioteca *opensource* em Julia para a representação numérica e operações em Posit, possibilitando experimentações e testes numéricos. Assim, foi implementada uma estrutura de dados para representação de números do tipo Posit, com os atributos

$$\text{Posit}(ps, es) = \{s, sn, k, rs, ers, e, fi, fs, useed, ps, es\},$$

onde  $sn$  indica se o número é um caso especial: se  $sn = 0$  e  $s = 0$  o número é zero, representado pelos *bits* “0000...”; se  $sn = 0$  e  $s = 1$  temos uma única representação para  $\pm\infty$ : “1000...”. O campo  $rs$  indica o tamanho da partição de *regime*,  $ers$  define o tamanho real da partição do expoente,  $fi$  é a *bitstring* da parte fracionária e  $fs$  é o tamanho restante para a partição da fração.

Com esses atributos, foram implementadas funções que permitem tanto a decodificação – extraindo todos os atributos a partir de uma *bitstring* qualquer – quanto a codificação, onde atributos de um Posit são convertidos na *bitstring* correspondente.

Essa estruturação permite realizar conversões entre diferentes configurações de Posit (com variados  $ps$  e  $es$ ) e outros formatos de representação numérica, como aqueles que herdam do tipo `Number` em Julia. Além disso, possibilita a implementação das operações aritméticas básicas: soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Essas operações, no que diz respeito à ordem de grandeza do número resultante, podem ser vistas como multiplicações ou divisões por 2 (*shifts*), já que o  $useed$  também é uma potência de 2. No entanto, ao contrário da simplicidade relativa

com que a ordem de grandeza é ajustada, as operações envolvendo a parte fracionária tornam-se mais complexas. A precisão do número resultante é altamente sensível à forma como as operações binárias são implementadas em  $fi$ , tornando essa parte do processo significativamente mais complicada.

A ideia central das implementações é reduzir o consumo de recursos energéticos ao determinar a ordem de grandeza do número com as vantagens oferecidas pelo *regime*, permitindo que o foco seja direcionado à parte fracionária, estudando os intervalos em que cada operação é válida, levando em consideração o *hidden bit*.

Com a biblioteca desenvolvida, espera-se facilitar experimentos em aprendizado de máquina e métodos numéricos, permitindo que a comunidade explore os benefícios do sistema Posit em uma variedade de aplicações com novos estudos e inovações na área.

## Referências

- [1] IEEE. IEEE standard for floating-point arithmetic. **IEEE Std 754-2019 (Revision of IEEE 754-2008)**, p. 1–84, 2019.
- [2] LEI, Y.; DOU, Y.; GUO, S.; ZHOU, J. FPGA implementation of variable-precision floating-point arithmetic. In: TEMAM, O.; YEW, P.-C.; ZANG, B. (Ed.). **Advanced Parallel Processing Technologies**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. p. 127–141. ISBN 978-3-642-24151-2.
- [3] GUSTAFSON, J. L.; YONEMOTO, I. T. Beating floating point at its own game: Posit arithmetic. **Supercomputing Frontiers and Innovations**, v. 4, n. 2, p. 71–86, 2017.
- [4] GUSTAFSON, J. L. **The End of Error: Unum Computing**. [S.l.]: CRC Press, 2017. (Chapman & Hall/CRC Computational Science). ISBN 9781482239874.
- [5] FOUSSE, L.; HANROT, G.; LEFÈVRE, V.; PÉLISSIER, P.; ZIMMERMANN, P. MPFR: A multiple-precision binary floating-point library with correct rounding. **ACM Trans. Math. Softw.**, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 33, n. 2, p. 13, 2007. ISSN 0098-3500.
- [6] GRANLUND, T. **GNU Multiple Precision Arithmetic Library 6.1.2**. 2020.
- [7] ZHANG, H.; KO, S.-B. Variable-precision approximate floating-point multiplier for efficient deep learning computation. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, v. 69, n. 5, p. 2503–2507, 2022.
- [8] KLÖWER, M.; GIORDANO, M.; SMITH, O.; RYCZKOWSKI, A.; TAGBOT, J.; PIMENTA, W. **milanki/SoftPosit.jl: v0.5.3**. Zenodo, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.5281/zenodo.12509313>>.

# *Educação Matemática*

## *Comissão Científica:*

Prof. Dr. Elenilton Vieira Godoy

Prof<sup>a</sup>. Dra. Elisângela de Campos

Prof. Dr. Emerson Rolkouski

Prof<sup>a</sup>. Dra. Ettiène Cordeiro Guérios

Prof<sup>a</sup>. Dra. Paula Rogéria Lima Couto

Prof<sup>a</sup>. Dra. Tania Teresinha Bruns Zimer

# Discussões sobre gênero e Matemática no ambiente acadêmico

Andressa Balestrin Dasenbrock  
*andressa.dasenbrock@ufpr.br*<sup>1</sup>

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)  
*gabrielss@ufpr.br*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** Gênero, Matemática, Ambiente Acadêmico.

## **Resumo:**

Este trabalho foi elaborado como parte da avaliação final da disciplina de Educação Matemática na Contemporaneidade, do curso de Matemática, e tem como objetivo discutir a relação entre questões de gênero e a matemática no contexto acadêmico. Cada estudante da disciplina apresentou um seminário a partir de um artigo que tratava de questões de gênero, étnico-raciais ou de educação especial. O seminário apresentado baseou-se no artigo “A Matemática não é neutra, é masculina”: Percepções De Licenciandas Em Matemática Sobre Gênero” (LIMA; FRAGOZO; GODOY, 2023), que explora as questões de gênero no ambiente acadêmico, especificamente no curso de Matemática.

O artigo tem como principal objetivo analisar como um grupo de alunas de Matemática compreende a experiência de ser mulher nesse curso, utilizando um grupo focal composto por licenciandas em Matemática de uma Instituição de Ensino Superior do Sul do Brasil. Esse grupo foi formado após o envio de um formulário a todas as estudantes de Matemática da instituição, no qual 22 mulheres responderam, sendo que apenas duas delas cursavam o bacharelado. Dentre essas 22 estudantes, apenas quatro demonstraram interesse em participar da pesquisa, todas elas da licenciatura. O formulário permitiu criar um perfil das estudantes, contendo informações sobre gênero, raça, idade, orientação sexual, modalidade do curso e interesse em participar do grupo de pesquisa.

As autoras coletaram dados por meio de entrevistas, nas quais as estudantes relataram como surgiu o interesse pela Matemática, a escolha do curso e suas vivências na universidade, além de compartilharem se já enfrentaram situações de desconforto em função de seu gênero. O artigo foca em dois temas principais discutidos com as participantes: ‘Matemática e Estereótipos’ e ‘A Matemática é Neutra?’.

As autoras analisaram as entrevistas utilizando a análise de discurso, explorando não apenas o que foi explicitamente dito, mas também o que foi

subentendido ou “não-dito”, utilizando a metáfora como ferramenta de interpretação. As principais conclusões foram:

1. A predominância masculina nas áreas de CTEM (Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática) e a presença do discurso de que os homens são melhores em matemática do que as mulheres, geram desconforto e uma sensação de não pertencimento e inferioridade no ambiente acadêmico.
2. As opressões de gênero existem, mas são muitas vezes mascaradas pela sensação de privilégio de estar em um ambiente acadêmico predominantemente masculino, levando essas situações a serem vistas como normais e rotineiras.
3. Há um “sentido de vínculo entre opressão de gênero e graduação em Matemática”.
4. “A Matemática não é neutra; ela é feita como neutra por e para os homens”.

A partir disso, e com o objetivo de realizarmos uma análise mais abrangente das relações de gênero e Matemática na graduação, considerando que apenas estudantes da licenciatura participaram da pesquisa do artigo, buscamos uma estudante do bacharelado em Matemática de uma Instituição de Ensino Superior do Sul do Brasil que compartilhasse suas experiências sobre o mesmo tema. Realizamos uma entrevista com a aluna, seguindo perguntas inspiradas nas utilizadas no artigo, incluindo:

1. Um perfil da estudante, contendo informações sobre gênero, raça, orientação sexual, idade, deficiência, ano de ingresso e modalidade do curso (licenciatura ou bacharelado). A aluna assinou um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, garantindo seu anonimato na pesquisa.
2. Uma breve discussão sobre como surgiu o interesse pela Matemática e a escolha pelo curso, seguida pela escolha do bacharelado.
3. Perguntas como: “Você já vivenciou situações envolvendo estereótipos de gênero?” e “Baseado em suas opiniões e vivências durante a formação, você acha que a Matemática é neutra?”.

Dentre as respostas da entrevistada, destacam-se:

“Felizmente, nunca vivenciei pessoalmente situações envolvendo estereótipos de gênero no curso de Matemática. Acredito que tive muita sorte, pois já ouvi muitos relatos de colegas que passaram por situações similares [...]. Considero-me muito sortuda por não ter enfrentado esse tipo de situação no curso.”

“Em relação aos professores, a maioria foi muito solícita, sempre me apoiando e incentivando. Acredito que o departamento de Matemática da minha universidade tem um diferencial, pois há professoras ministrando matérias específicas para o bacharelado. Isso foi muito importante para mim, perceber que havia mulheres me ensinando e saber que posso seguir uma carreira acadêmica no bacharelado. Ver alguém com quem me identifico que seguiu esse caminho fez muita diferença para mim”.

A proposta final da apresentação incluiu uma discussão entre os discentes sobre as relações de gênero e a Matemática no ambiente acadêmico, comparando os resultados das entrevistas realizadas com as licenciandas e a estudante do bacharelado. As conclusões desse debate foram fundamentais para compreender a realidade nas universidades e contribuir para a criação de ambientes acadêmicos mais igualitários.

**Referências:**

CARTAXO LIMA, Y.; BAPTISTA FRAGOZO, M.; VIEIRA GODOY, E. “A Matemática não é neutra, é masculina”: percepções de licenciandas em Matemática sobre gênero. **Boletim GEPEM**, [S. l.], n. 83, p. 138–154, 2023.

# Negociação de sinais e ensino bilíngue: experiências e metodologias na inclusão de alunos surdos em Geometria

Andressa Balestrin Dasenbrock  
*andressa.dasenbrock@ufpr.br*<sup>1</sup>

Isabele Andrade Vichinieski  
*isabele.vichinieski@ufpr.br*<sup>1</sup>

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)  
*gabrielss@ufpr.br*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** ensino bilíngue, educação matemática, negociação de sinais em Libras.

## **Resumo:**

O presente trabalho foi elaborado como parte da avaliação final da disciplina de Educação Matemática na Contemporaneidade, do curso de Matemática, e tem como objetivo discutir a inclusão de pessoas surdas nas aulas de matemática. A disciplina teve como proposta a apresentação de um seminário pelos estudantes que tratavam de questões de gênero, étnico-raciais ou de educação especial. O artigo escolhido para o seminário foi “A Negociação de Sinais em Libras como Possibilidade de Ensino e de Aprendizagem de Geometria” (SALES; PENTEADO; MOURA, 2015), que explora aspectos de inclusão e das legislações que amparam o ensino de pessoas surdas, além de apresentar uma proposta para o ensino de Geometria, focada no aprendizado de alunos surdos.

De início, o artigo busca apresentar a evolução das legislações que asseguram o acesso à educação para pessoas com Necessidades Educacionais Especiais (NEE) no Brasil. Como exemplos, são citadas a Constituição Federal de 1988, a Declaração de Salamanca na Conferência Mundial da UNESCO em 1994 e a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBN) de 1996. De forma geral, essas legislações estabelecem as condições de acesso e permanência na educação para todos, além de garantirem o atendimento educacional especializado para alunos com NEE.

Em contrapartida às leis estabelecidas, os autores evidenciam as dificuldades dos professores em sala de aula quanto à inclusão dos alunos com deficiência, especialmente por se sentirem despreparados e desamparados diante das demandas e desafios específicos desses alunos. Desse modo, torna-se evidente a necessidade de produção de conhecimentos que visem contribuir com a prática docente. Os autores destacam que o uso de recursos visuais em sala de aula é uma

metodologia que beneficia o aprendizado de todos os alunos, especialmente dos surdos, que usufruem da comunicação visual para facilitar o pensamento, a memória e a criatividade. Além disso, a constante exposição à língua de sinais é considerada essencial para o desenvolvimento cognitivo, social e pedagógico, formando a base do ensino bilíngue, que não só promove maior aprendizado, mas também garante a inclusão dos indivíduos surdos em uma sociedade predominantemente ouvinte.

Com o objetivo de implementar métodos que promovam o ensino bilíngue, os autores do artigo apresentam uma atividade introdutória de Geometria desenvolvida com alunos surdos e ouvintes de uma escola de Ensino Fundamental em Rio Claro, São Paulo, reconhecida pelo trabalho de inclusão com alunos com deficiência, especialmente com a comunidade surda. As análises foram realizadas em uma turma de 5º ano, composta por 12 alunos, sendo 8 surdos e 4 ouvintes, uma professora e uma TILS (Tradutora Intérprete de Língua Brasileira de Sinais), ao longo de dois semestres. Buscou-se observar as interações entre professora, intérprete e alunos e entender como os conhecimentos eram transmitidos e aprendidos.

No decorrer da proposta, foram considerados aspectos do ensino-aprendizagem de Geometria por meio de uma atividade aplicada com o objetivo de analisar as habilidades dos alunos surdos sobre o tema, além de trabalhar noções como ponto, reta, plano, ângulos, figuras planas e suas classificações utilizando a língua de sinais. Os autores destacam que, ao iniciar o conteúdo, houve dificuldades em estabelecer sinais específicos para cada elemento da Geometria. A intérprete, ao ser consultada, frequentemente informava que não havia sinais definidos para esses termos em LIBRAS, o que gerou certa confusão na comunicação matemática, já que cada aluno tinha conhecimento de um sinal diferente. Por conta disso, os autores propuseram uma negociação de sinais, permitindo que os próprios alunos criassem e estabelecessem juntos os sinais para cada conceito estudado, baseando-se na forma como compreendiam os conceitos matemáticos, como pode ser visto na Figura 1, em que a aluna sugere um sinal para “triângulo”. Além disso, no Quadro 1, podemos notar como essa negociação é feita, considerando sugestões de diferentes sinais para “triângulo” e “triângulo retângulo”, utilizando a propriedade do último como forma de diferenciação.



Figura 1 - Emanuele representando o triângulo.  
Fonte: SALES; PENTEADO; MOURA, 2015

Pesquisador: (indicando um desenho feito na lousa) [nome da figura?] (perguntando para o Rubens)  
Rubens: [não sei!]  
Pesquisador: [olha para a lousa e veja as outras figuras]  
Rubens: [não tem nenhuma igual]  
Pesquisador: [não tem aqui?!]  
Pesquisador: *tá vendo Cláudia nós temos um problema... O Rubens está dizendo que esta figura não está representada aqui, na verdade esse é um triângulo diferente desse, mas ambos são triângulos (referindo-se aos triângulos acutângulo e retângulo, desenhados na lousa).*  
Emanuele: [é um triângulo sim, pois tem 3 lados] (utilizando uma marcação espacial para representar triângulo)  
Pesquisador: [isso mesmo, é um] T-R-I-Â-N-G-U-L-O (falando com Emanuele)  
Pesquisador: *Ah! Ela fez o triângulo, e disse que têm três lados, só que na aula passada ela disse que essa figura não era um triângulo... (falando com a intérprete e a professora).*

Quadro 1 - Interação acerca dos triângulos acutângulo e retângulo.  
Fonte: SALES; PENTEADO; MOURA, 2015

A fim de enriquecer a discussão sobre o ensino de Geometria para pessoas surdas na apresentação do trabalho final da disciplina de Educação Matemática na Contemporaneidade, exploramos outras referências sobre inclusão e os processos de ensino e de aprendizagem de alunos surdos.

No artigo “A inclusão escolar de alunos surdos: o que dizem alunos, professores e intérpretes sobre esta experiência” (LACERDA, 2006), foram entrevistados professores, intérpretes e colegas envolvidos na inclusão de um aluno surdo em uma escola regular, onde a maioria dos alunos era ouvinte. O artigo relata que, durante a entrevista com a intérprete, destacaram-se pontos como a necessidade de definir melhor o papel do intérprete educacional, a falta de um planejamento conjunto com os demais sujeitos da escola, o pouco conhecimento sobre a surdez por parte dos professores, e a importância de um espaço para a atualização contínua dos intérpretes em relação à língua de sinais.

Buscando relacionar a metodologia de Lacerda (2006) com as ideias do artigo inicial escolhido, realizamos uma entrevista com uma intérprete educacional, que teve como objetivo enfatizar aspectos do ensino de Geometria no contexto de escolas regulares. A intérprete entrevistada destaca a negociação de sinais como uma ferramenta essencial para a tradução dos conteúdos matemáticos. Utilizando elementos visuais como símbolos e formas, ela e seu aluno adaptam os sinais de modo a facilitar a compreensão do que está sendo estudado.

Além disso, ela enfatiza a importância de entender os conteúdos que estão sendo ensinados, de modo a aplicar os sinais nos contextos corretos, garantindo que a tradução seja completa e precisa, sem comprometer o aprendizado do aluno. No entanto, o estudo prévio dos materiais usados pelos professores nem sempre é viável, devido às muitas disciplinas em que acompanha o aluno.

Um dos principais desafios mencionados na entrevista é o ritmo acelerado da fala de alguns professores, que frequentemente dificulta uma tradução precisa para o aluno. Por isso, a intérprete reforça a necessidade de manter um diálogo constante com os professores, sinalizando sempre que enfrenta dificuldades em acompanhar a fala ou entender o conteúdo. Essa comunicação aberta é essencial para assegurar que a interpretação seja o mais fiel e completa possível.

## Referências:

SALES, E. R. DE .; PENTEADO, M. G.; MOURA, A. Q.. A Negociação de Sinais em Libras como Possibilidade de Ensino e de Aprendizagem de Geometria. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, n. 53, p. 1268–1286, dez. 2015.

LACERDA, C. B. F. de. A inclusão escolar de alunos surdos: o que dizem alunos, professores e intérpretes sobre esta experiência. **Cad. Cedes**, Campinas, v. 26, n. 69, p. 163-184, mai./ago. 2006.

# Além das Fronteiras: uma análise sobre a diversidade curricular do curso de Matemática na América Latina

Brenda Dal Puppo Monteiro<sup>1\*</sup>

*brendamonteiro@ufpr.br*<sup>1</sup>

Elenilton Vieira Godoy (Orientador)

*elenilton@ufpr.br*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Licenciatura em Matemática - UFPR

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Matemática - UFPR

**Palavras-chave:** Currículo; Formação de Professores/as; Matemática; América Latina.

## **Resumo:**

O presente trabalho levanta questões relacionadas aos currículos dos cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática em diversos países da América Latina. O principal objetivo é investigar como os currículos se comportaram e influenciaram a formação dos(as) professores(as) Latino-americanos(as) - que não são brasileiros(as) - do Departamento de Matemática (DMAT) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) que concluíram sua graduação em seus países de origem e, depois, se mudaram para o Brasil.

Inicialmente, buscamos entender melhor a metodologia que viria a ser utilizada: a História Oral. Para isso, foi feita uma revisão bibliográfica detalhada do artigo “História Oral: de um inventário a uma regulação”, do autor Antonio Vicente Marafioti Garnica, e através dele compreendemos a importância da História Oral enquanto metodologia de pesquisa e qual seria a melhor maneira de conduzi-la visando a produção do material em questão. Além do estudo do artigo de Garnica, também foi realizada uma leitura da textualização de uma entrevista pública com o Professor Ubiratan D’Ambrosio, realizada pelo Professor Carlos Roberto Vianna, durante o Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática. Essa leitura teve como objetivo identificar o trabalho feito com entrevistas e suas textualizações para, em seguida, ser capaz de reproduzi-lo nas entrevistas que viriam a ser feitas para enriquecer o presente trabalho acadêmico.

Depois de concluída a revisão bibliográfica, optamos pela realização de entrevistas orais gravadas, transcrições e textualizações, devido à sua eficiência na captura de narrativas e experiências pessoais dos(as) participantes da pesquisa. Com a utilização dessa metodologia, foi possível oportunizar aos(às)

---

<sup>1\*</sup> Bolsista PET Matemática

entrevistados(as) que compartilhassem suas perspectivas, memórias e histórias de vida relacionadas ao tema anunciado. Para a escolha dos(as) entrevistados(as), foi feita uma análise do corpo docente do DMAT, com foco nos(as) professores(as) estrangeiros(as) oriundos de países da América Latina, que ao todo são 12. Considerando o tempo disponível para a realização das entrevistas, optamos por entrevistar, inicialmente, um(a) professor(a) representante da Argentina, um(a) do Peru e um(a) da Venezuela.

Para a realização das entrevistas, confeccionamos fichas norteadoras para os(as) entrevistados(as), e fichas com perguntas específicas para as entrevistadoras - que foram três alunas da UFPR, devido a união de trabalhos acadêmicos sob a orientação do mesmo professor -, caso os(as) entrevistados(as) não oferecessem todas as informações necessárias espontaneamente. As fichas dos(as) entrevistados(as) foram compostas por conjuntos de palavras relacionadas aos seguintes tópicos: Vida Pessoal, Formação Acadêmica, Currículo, Prática Docente, Desafios e Oportunidades e Diversidade Cultural.

Foram realizadas, com sucesso, três entrevistas entre os meses de dezembro de 2023 e abril de 2024. Sendo elas com professores(as) representantes da Argentina, do Peru e da Venezuela. Após a realização das entrevistas orais gravadas, foram feitas as transcrições e textualizações delas, que foram encaminhadas aos(às) respectivos(as) entrevistados(as) para aprovação e sequência da pesquisa.

Além disso, foram incluídas à pesquisa de forma integral as textualizações das entrevistas realizadas e, por fim, todas estão em processo de análise, especialmente em relação ao que foi falado sobre os currículos dos cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática, tanto nos países de origem dos(as) entrevistados(as), quanto no Brasil, os currículos dos cursos de Matemática da UFPR. Esperamos identificar características comuns aos(às) entrevistados(as) e, a partir delas, construir relações entre a diversidade curricular dos cursos de Matemática na América Latina e a formação de professores(as) de Matemática na UFPR.

## Referências:

- [1] MARAFIOTI, V. **História Oral e Educação Matemática: de um inventário a uma regulação** Oral History and Mathematics Education: looking for dynamical precepts based on bibliographical review p.9-56. Zetetiké: Revista de Educação Matemática, v. 11, n. 19, p. 9–56, 19 fev. 2009.
- [2] AUDILIA DE SANTI, T. **NARRATIVAS DE VIDA DE EDUCADORAS MATEMÁTICAS PARANAENSES: MARCAS DE GÊNERO EM UM DIÁRIO DE UMA FEMINISTA**. 29 out. 2021.
- [3] ROLKOUSKI, E. **Vida de Professores de Matemática – (Im)possibilidades de Leitura**. DOAJ (DOAJ: Directory of Open Access Journals), 1 fev. 2008.



# A Matemática Acadêmica na formação do/a professor/a de Matemática da Educação Básica

Brenda Dal Puppo Monteiro<sup>1\*</sup>  
*brendamonteiro@ufpr.br*<sup>1</sup>

Elenilton Vieira Godoy (Orientador)  
*elenilton@ufpr.br*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná (UFPR)

**Palavras-chave:** Matemática Acadêmica; Formação de Professores/as; Educação Matemática.

## **Resumo:**

O presente trabalho levanta questões relacionadas à importância das disciplinas de conteúdo matemático para a formação do/a professor/a de Matemática da Educação Básica. O principal objetivo é investigar o papel atribuído à Matemática Acadêmica pelos/as alunos/as do curso de Licenciatura em Matemática na sua formação inicial.

Inicialmente, buscamos entender melhor o conceito de “Matemática Acadêmica” e suas diferenças em relação à matemática como um todo. Para isso, foi feita uma revisão bibliográfica detalhada de sete artigos que mencionaram o tema ou variações dele e, em seguida, foi possível definir com maior precisão o que queríamos dizer usando o termo “Matemática Acadêmica”. Depois de concluída a revisão bibliográfica, optamos por seguir a investigação com os/as alunos/as por meio de entrevistas que seriam feitas de forma remota por meio de um questionário do Google. Na divulgação do questionário, pedimos que o/a participante considerasse as disciplinas pertencentes à Matemática Acadêmica como sendo aquelas voltadas às áreas de Análise Numérica, Álgebra, Equações Diferenciais, Geometria, Topologia e Otimização. Além disso, esclarecemos que, para os fins deste trabalho, não deveriam ser consideradas as disciplinas do primeiro semestre do curso, por se tratarem de disciplinas voltadas à uma formação de base.

A elaboração do questionário mencionado foi baseada em alguns outros questionários prontos, a fim de identificar e caracterizar o perfil do discente que o responde. O questionário contou com cinco seções de perguntas, sendo elas: “Caracterização do/a Participante”, “Possíveis dificuldades e seus motivos”, “Possíveis reprovações e seus motivos”, “Expectativas” e “Questões abertas”. Foram

---

<sup>1\*</sup> Bolsista PET Matemática

convidados/as discentes que estão há, pelo menos, um ano matriculados no curso, ou seja, a partir do 3º período. O tempo médio de resposta às 42 perguntas do questionário foi de 13 minutos e conseguimos reunir 44 respostas, de alunos ingressantes no curso entre os anos de 2017 e 2022, totalizando 24% do total de alunos regularmente matriculados em Licenciatura em Matemática no momento da divulgação do questionário.

Por fim, foram incluídas à pesquisa de forma integral as respostas das questões objetivas e, em seguida, analisadas as respostas dadas às questões abertas. As respostas que mais nos chamaram atenção foram as dadas às questões abertas, visto que, ao analisar as respostas das três questões da última seção, foi possível encontrar diversas contradições nas respostas de um/a mesmo/a discente. Inicialmente, os/as alunos, em sua maioria, afirmavam que as disciplinas de conteúdo matemático eram, sem exceções, de extrema importância em sua formação. Em seguida, foi solicitado que os/as alunos/as citassem a disciplina do curso em que mais tiveram dificuldades e, por fim, perguntamos sobre a importância que eles/as atribuiriam à disciplina citada. O principal padrão encontrado na sequência de respostas foi de alunos que inicialmente consideravam todas as disciplinas de Matemática Acadêmica fundamentais para a sua formação, mas que mudavam sua opinião depois de citar a disciplina que mais enfrentou dificuldades. Aqui, cabe ressaltar que não foram consideradas respostas que citaram disciplinas de outros departamentos, como Física e Desenho Geométrico, por exemplo. Para exemplificar a padronização de respostas que percebemos, a seguir apresentamos as respostas de dois discentes, que tiveram suas identidades preservadas, visto que o formulário era respondido de forma anônima.

	<b>Na sua opinião, qual é a importância das disciplinas de Matemática Acadêmica para a sua atuação como docente da Educação Básica?</b>	<b>Cite a disciplina em que você mais encontrou dificuldades ao longo do curso.</b>	<b>Qual relevância você atribuiria à disciplina citada anteriormente na sua formação? Comente.</b>
<b>Aluno A</b>	"Dentro da sala de aula o professor pode conseguir desenvolver melhor uma demonstração, a qual as matérias de matemática <i>academia</i> proporcionam geralmente, de como e porque funciona as soluções matemáticas."	"cálculo 1"	"Para a área de licenciatura em educação básica tal matéria não traria tanta importância para a sala de aula, mas traria algumas curiosidades sobre o funcionamento de certas coisas."
<b>Aluno B</b>	"Aumentar o nível de conhecimento e aprofundar temas que são vistos de maneira superficial na educação básica, possibilitando que o professor tenha facilidade ao ensinar o conteúdo. Com isso, o professor também consegue trazer mais maneiras e métodos para	"Anéis e Corpos"	É uma disciplina que <i>trás</i> um conteúdo muito interessante, mas vejo somente como um ponto de curiosidade que não agrega absolutamente nada para quem quer ser professor de educação básica. É um obstáculo desnecessário para quem não tem interesse em se

	explicar e trabalhar esses assuntos."		aprofundar em álgebra e matemática acadêmica.
--	---------------------------------------	--	---

Indiscutivelmente, o currículo de Licenciatura em Matemática apresenta disciplinas dotadas de uma formalização excessiva, especialmente as que são voltadas à Matemática Acadêmica. Além de toda sua abstração e formalidade, são raros os casos onde os docentes estabelecem relações entre a Matemática Acadêmica e a Escolar. Tudo isso contribui para que o questionamento seja ainda mais frequente: "Para que serve a Matemática Acadêmica na formação do professor de Matemática da Educação Básica?".

### Referências:

[1] VILELA, D. S. **Usos e jogos de linguagem na matemática: diálogos entre Filosofia e Educação Matemática**. São Paulo, Livraria da Física, 2013.

[2] OLIVEIRA, V. C. A. DE; LINARDI, P. R.; VIOLA DOS SANTOS, J. R. **Desconstruindo Tabus na Formação Matemática de Professores de Matemática**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-25, 16 ago. 2021.

[3] CYRINO, M. C. C. T. **Ações de Formação de Professores de Matemática e o Movimento de Construção de sua Identidade Profissional**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-26, 11 ago. 2021.

[4] MACHADO, S. R. A.; TRIVIZOLI, L. M. **As Modificações Curriculares do Curso de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, 1971-1996**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-21, 15 jun. 2021.

[5] CLARETO, S. M.; ROTONDO, M. A. S. **O que Torna uma Matemática Digna de Ocupar Lugar em um Currículo de Licenciatura em Matemática?**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-15, 16 ago. 2021.

[6] GERETI, L. C. V.; SAVIOLI, A. M. P. DAS D. **Legitimidades para a Disciplina de Cálculo na Licenciatura em Matemática**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-28, 31 jul. 2021.

[7] ELIAS, H. R.; GIRALDO, V.; VIOLA DOS SANTOS, J. R. Editorial Seção Temática: **Problematizações de Formações Matemáticas na Licenciatura em Matemática**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-4, 16 ago. 2021.

[8] SILVA, J. P. DA; MOREIRA, P. C. **Formação Matemática na Licenciatura e Demandas da Prática Docente Escolar: o Caso da Álgebra**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-32, 29 jul. 2021.



# Ensino de matemática através do fantan e pensamento computacional para alunos com Altas Habilidades/Superdotação

Bárbara Borkowski<sup>1\*</sup>, e Matheus Rocha<sup>2♣</sup>

*barbarazanetti@alunos.utfpr.edu.br<sup>1</sup>, matheusrocha.2000@alunos.utfpr.edu.br<sup>2</sup>*

Luciana Schreiner de Oliveira

*lucianaoliveira@utfpr.edu.br<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

<sup>2</sup>Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

**Palavras-chave:** Pensamento Computacional, Conteúdos Matemáticos, Jogos Educativos.

## Resumo:

Este trabalho tem como objetivo descrever a aplicação do jogo Fantan no desenvolvimento do Pensamento Computacional e no ensino de conceitos matemáticos para alunos com Altas Habilidades/Superdotação. O projeto "Matemática Acessível", iniciado em 2016 na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba, aproxima licenciandos da realidade dos alunos atendidos na rede pública. Em 2024, o projeto usou o Pensamento Computacional para abordar conteúdos matemáticos, como a decomposição de problemas e o desenvolvimento de algoritmos. O jogo Fantan foi utilizado para estimular o pensamento algébrico, trabalhando conceitos de divisão, múltiplos e cálculos mentais de forma lúdica. Os alunos demonstraram compreensão dos conceitos e grande engajamento. O uso de jogos e desafios, como o Fantan, provou ser uma estratégia eficaz para o ensino da matemática e o desenvolvimento do Pensamento Computacional em alunos com Altas Habilidades/Superdotação, promovendo um aprendizado mais inclusivo e motivado

No ano de 2016 nasce o projeto "Matemática Acessível" na Universidades Tecnológica Federal do Paraná do Campus Curitiba (UTFPR-CT) com um grupo de professores e alunos do curso de Licenciatura em Matemática, projeto o qual tem objetivo aproximar os licenciandos da realidade dos alunos com Altas Habilidades/Superdotação atendidos na rede pública de ensino, destacando a importância de reconhecer e desenvolver suas potencialidades, promovendo a inclusão de alunos que apresentam necessidades educacionais especiais. Alunos com Altas Habilidades/Superdotação são aqueles que apresentam maior facilidade no aprendizado em uma ou múltiplas áreas. De acordo com a Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva (BRASIL, 2007, p.9) alunos com Altas Habilidades/Superdotação demonstram potencial elevado em

---

<sup>1\*</sup> Bolsista do Programa Licenciando - UTFPR.

<sup>2</sup> ♣ Voluntário do Programa Licenciando - UTFPR.

qualquer uma das seguintes áreas, isoladas ou combinadas: intelectual, acadêmica, liderança, psicomotricidade e artes, além de apresentar grande criatividade, envolvimento na aprendizagem e realização de tarefas em áreas de seu interesse. Com o objetivo de atender a esses alunos e abordar os conteúdos matemáticos, o projeto Matemática Acessível empregou o tema Pensamento Computacional ao longo do ano de 2024. O Pensamento Computacional envolve a aplicação de técnicas e raciocínios da computação para resolver problemas matemáticos de forma criativa e eficiente. Isso inclui a habilidade de decompor problemas complexos, reconhecer padrões, desenvolver algoritmos e usar a lógica para criar soluções inovadoras, as quais se classificam como pilares do tema.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular o Pensamento Computacional “envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática por meio do desenvolvimento de algoritmos” (Brasil, 2018, p.474).

Este resumo tem objetivo de descrever um dos encontros entre os participantes do projeto Matemática Acessível e os alunos com Altas Habilidades/Superdotação atendidos no Colégio Estadual Roberto Langer Junior, situado no bairro Boqueirão, em Curitiba, encontro no qual foi utilizado o jogo Fantan. O Fantan é um jogo de origem chinesa, popularizado na Coreia e difundido pela Europa através dos portugueses em Macau (PANOSSIAN, 2010). Utilizado no projeto Matemática Acessível para estimular o pensamento algébrico, o jogo envolve conceitos como divisão e resto. Um punhado aleatório de pedrinhas é espalhado sobre a mesa/tabuleiro e os quatro jogadores apostam fichas em um número de 0 a 3, que corresponde ao resto da divisão que os alunos esperam deste punhado após realizar agrupamentos de 4 pedrinhas. Após as apostas, os alunos realizam os agrupamentos e o número de pedrinhas que sobram ao final fora destes agrupamentos determina o vencedor da rodada, e o jogador que apostar corretamente ganha as fichas dos adversários. Esse jogo simples ajuda os alunos a explorar múltiplos, divisores e cálculo mental de forma lúdica. Sua aleatoriedade e regras acessíveis o tornam uma ferramenta eficaz para introduzir raciocínios matemáticos básicos, ao mesmo tempo em que os alunos desenvolvem estratégias e compreendem noções de probabilidade.

No Fantan, o Pensamento Computacional (PC) aparece na forma de resolução de problemas e desenvolvimento de estratégias baseadas em padrões matemáticos. Embora o jogo dependa da sorte, ele oferece uma excelente oportunidade para os alunos aplicarem lógica e raciocínio matemático, explorando os conceitos de divisão e resto. Isso reflete um dos pilares do PC: a decomposição de problemas complexos em partes menores e mais manejáveis.

Os alunos do ensino fundamental atendidos no Colégio Estadual Roberto Langer Junior percebem rapidamente a relação entre o número de pedrinhas e o resto da divisão, e começam a testar diferentes apostas, ajustando suas estratégias. Essa atividade permite que eles pratiquem cálculo mental e reconheçam padrões, além de compreenderem, de forma prática, o conceito de probabilidade, ao identificarem que cada número tem 25% de chance de ser o vencedor. Durante o

encontro, o Fantan foi introduzido após a explicação das regras e distribuição dos materiais. O caráter competitivo do jogo rapidamente engajou os alunos, que se mostraram mais motivados do que em atividades aplicadas anteriormente. Diversas rodadas foram jogadas, e quando os alunos já estavam confortáveis com a dinâmica, começaram a registrar os resultados e responder as perguntas avaliativas.

A receptividade ao Fantan foi extremamente positiva. Os alunos relataram que o jogo era dinâmico e envolvente, e muitos preferiram essa atividade por ser competitiva. Eles demonstraram compreensão dos conceitos de múltiplos e divisores, realizando cálculos mentais com rapidez. Um aluno destacou que o jogo se tratava de sorte, com 25% de chance de vitória, evidenciando uma compreensão intuitiva da probabilidade e sugerindo futuras oportunidades de aprofundamento.

A experiência com o jogo Fantan no projeto Matemática Acessível demonstrou o valor de atividades lúdicas e colaborativas no ensino de matemática para alunos com Altas Habilidades/Superdotação. O uso de jogos como o Fantan não só facilitou o aprendizado de conceitos matemáticos, mas também incentivou o desenvolvimento do Pensamento Computacional, colaboração entre alunos e uma competição saudável com a sala de aula sendo um espaço lúdico. O engajamento dos alunos reforçou a importância de metodologias ativas, que vão além do ensino tradicional e estimulam a participação dos alunos. O sucesso da atividade sugere que a inclusão de jogos pode ser uma estratégia eficaz para promover o aprendizado em grupos de alunos com Altas Habilidades/Superdotação, oferecendo um ensino mais inclusivo e motivador.

## **Referências:**

BRASIL. **Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva**. MEC/SEESP, 2008. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/politica.pdf>>. Acesso em: 03 set. 2024.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Brasília. 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>>. Acesso em: 05 set. 2024.

PANOSSIAN, Maria Lucia. **O JOGO FANTAN: EXPLORAÇÕES DIDÁTICAS**. X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Salvador. 2010. Disponível em: <[https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/RE/T4\\_RE438.pdf](https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/RE/T4_RE438.pdf)>. Acesso em: 05 set. 2024.

# **Análise de Produção Escrita**

## **de Resoluções de Questões de Matemática**

Voluntária: Emanuela Gonçalves Lopes

[lopesemanuela@gmail.com](mailto:lopesemanuela@gmail.com)

Orientador: Gabriel dos Santos e Silva

[gabrielss@ufpr.br](mailto:gabrielss@ufpr.br)

**Universidade Federal do Paraná**

**Palavras-chave:** Educação Matemática, Análise de Produção Escrita, Leitura Positiva, Erro como Oportunidade de Aprendizagem.

### **Resumo:**

De acordo com Buriasco (2000), “a interpretação de um mesmo erro pode ser múltipla”. Essa frase resume a importância da Análise de Produção Escrita. Afinal, um erro não significa diretamente que uma pessoa não sabe algo.

Um documento contendo 10 questões abertas de matemática foi entregue a 5 voluntários anônimos, que resolveram as questões. O objetivo deste trabalho é analisar essas resoluções, e então debater sobre as diferentes formas de pensar e os diferentes raciocínios que geraram as respectivas resoluções.

A partir de uma leitura horizontal – em que é analisada uma questão e várias resoluções da mesma e só então seguimos para a próxima - será possível refletir sobre as várias formas de pensamento matemático que podem surgir em uma mesma questão. O intuito é substituir a leitura pela falta, focada nos erros e “não saberes” dos alunos, por uma leitura positiva, com o intuito de enxergar o que o estudante mostrou saber, apesar dos seus possíveis erros.

Por fim serão apresentadas intervenções de como os possíveis erros dos voluntários poderiam ser trabalhados em sala de aula.

Para se preparar para as análises, a autora - graduanda em Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR) e participante do Programa de Voluntariado Acadêmico - leu diversos textos sobre o assunto, além de ter se encontrado semanalmente com seu orientador para discutir os textos e outros assuntos ligados à educação.

A seguir, estão duas dessas análises:

### **Questão 2**

Chegando o dia das mães, Olívia e Paulo, decidiram comprar um presente para sua mãe. Resolveram então, comprar uma blusa no valor de R\$45,00 e dividiram a despesa do presente em 2. Sabendo que ambos contribuíram com a mesma quantia, quantos reais cada um pagou pelo presente?

## Expectativa de Resposta:

$$\begin{array}{r} 45 \\ - 4 \\ \hline 05 \\ - 4 \\ \hline 10 \\ - 10 \\ \hline 00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ 22,5 \end{array}$$

Cada um  
pagou R\$ 22,50  
pelo presente.

## Resolução do Voluntário D:

$$\begin{array}{r} 45 \\ - 4 \\ \hline 05 \\ - 4 \\ \hline 10 \\ - 10 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ 202,5 \end{array}$$

Eles pagaram R\$ 202,5 pelo presente

O Voluntário D interpretou o enunciado corretamente e escolheu, sabiamente, utilizar divisão para resolver o exercício. O cálculo escolhido para resolver a questão estava correto: dividir o valor da blusa, 45 reais, por 2, os dois irmãos. Porém, é possível verificar que o aluno tem dificuldades com contas de divisão.

O voluntário D se lembrou de uma regra a respeito de adicionar um zero ao quociente, apenas utilizou ela no momento errado. Mas sua interpretação, a sua forma de armar a conta e até parte de sua divisão estavam corretas.

Nesse momento, seria interessante, ao invés de diretamente mostrar ao estudante seu erro, tentar perguntar a ele se ele acha que são necessárias duas parcelas de cerca de duzentos reais para pagar um vestido de 45 reais. Dessa forma, o próprio estudante entenderia por si só que errou em alguma parte do processo e revisaria seus cálculos. Quem sabe ele até saiba efetuar essa divisão e tenha sido apenas uma mera distração. Mas caso contrário, as dificuldades do voluntário D com divisões podem ser vencidas com algumas explicações e um pouco de prática.

## Questão 4

) Fernando foi a loja de eletrodomésticos e comprou os seguintes produtos: (cada alternativa vale 0,3)



3 X sem juros  
de R\$ 113,00



3 X sem juros  
de R\$ 59,90



3 X sem juros  
de R\$ 14,30

A) Fernando comprou o liquidificador + a torradeira e parcelou em 6X.  
Qual o total da compra? E qual o total de cada parcela?

## Expectativa de Resposta:

$$\begin{array}{r} \text{LIQUIDIFICADOR} \\ 14,30 \\ \times 3 \\ \hline 42,90 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{TORRADEIRA} \\ 59,90 \\ \times 3 \\ \hline 179,70 \end{array}$$
  
$$\begin{array}{r} \text{TOTAL} \\ 179,70 \\ + 42,90 \\ \hline 222,60 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{PARCELAS} \\ 222,60 \\ - 111,30 \\ \hline 111,30 \\ - 42,90 \\ \hline 68,40 \\ - 22,80 \\ \hline 45,60 \\ - 15,20 \\ \hline 30,40 \\ - 10,13 \\ \hline 20,27 \\ - 6,76 \\ \hline 13,51 \end{array}$$

Valor da compra  
mens R\$ 222,60, e  
cada uma das 6 parcelas  
mens de R\$ 37,10.

## Resolução do Voluntário D:

The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. On the left, there are two multiplication problems:  $113 \times 3 = 339$  and  $539 \times 3 = 1617$ . On the right, there are two division problems:  $17990 \div 339 = 53$  and  $2034 \div 6 = 339$ . The student has written 'Galim total' and 'Galim panela' next to the division problems. There are some corrections and scribbles in the work.

O voluntário D mostrou ter algumas dificuldades com contas de multiplicação, divisão e até adição. Seria interessante revisar, juntamente com o aluno, como devem ser realizados esses cálculos.

Porém, algo mais interessante de se analisar, é a escolha do valor R\$113,00. É uma ótima oportunidade de pensar o que pode ter gerado esse erro. O voluntário não sabia parte do conteúdo? Estava distraído? Talvez nervoso? Como já foi comentado, um erro pode ter múltiplas interpretações. Nesse caso, uma delas nos leva ao enunciado. Em momento algum é dito qual das imagens é a batedeira, qual é a torradeira e qual é o liquidificador. Apesar de ser um conhecimento geral, não é possível analisar totalmente as habilidades de interpretação matemática desse estudante nesse exercício, visto que ele exige conhecimentos não diretamente ligados a essa área.

É claro, poderia ter sido mera distração. Por isso o ideal seria perguntar ao aluno qual das três imagens é a torradeira e qual é o liquidificador, e então auxiliá-lo no restante da resolução, principalmente nos cálculos, onde o voluntário demonstrou dificuldade.

O objetivo dessas análises de resoluções é utilizar uma leitura positiva, visando entender os erros como oportunidades de evolução.

### Referências:

BURIASCO, R. L. C. de. **Algumas Considerações Sobre Avaliação Educacional**. 2000.

GARNICA, A. V. M. **Erros e Leitura Positiva**: proposta, exercícios e possibilidades. 2006

SANTOS, J. R. V. dos.; BURIASCO, R. L. C. de.; CIANI, A. B. **A Avaliação como Prática de Investigação e Análise da Produção Escrita em Matemática**. 2008

SILVA, G. dos. S.; HARMUCH, D. **Análise da produção escrita de questões de matemática do Vestibular 2020 da Universidade Estadual de Londrina**. 2022

BURIASCO, R. L. C. de.; SILVA, G. dos. S. **O erro na avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem**. 2023

# O Ensino de Matemática para Estudantes com Deficiência Intelectual

Fernanda Pscheidt Uhlig  
*fernanda.pu3@gmail.com*

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)  
*gabrielss@ufpr.br*

Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** Deficiência intelectual, matemática, ensino e aprendizagem.

## **Resumo:**

Este trabalho tem o objetivo de aprofundar um tema de extrema importância para a sociedade atual: o ensino de matemática para pessoas com deficiência intelectual. A ideia deste estudo surgiu a partir da leitura do artigo "O ensino de matemática aos alunos com deficiência intelectual: uma concepção dos professores" (COSTA; ANICETO; AGUIAR, 2018), que aborda a matemática no contexto da educação especial. No artigo, os autores afirmam que estudantes com deficiência intelectual apresentam déficits importantes para o aprendizado de matemática e, para que sua aprendizagem ocorra, é necessário ir além dos métodos tradicionais.

A partir disso, o artigo visa investigar a concepção dos professores sobre o ensino de matemática nesse contexto. Para isso, Costa, Aniceto e Aguiar (2018) elaboraram um questionário, que foi compartilhado por meio das redes sociais e, com ele, obtiveram respostas de 32 professores, as quais foram categorizadas em cinco eixos relacionados à formação e ao conhecimento dos professores sobre o assunto, à inclusão ou não desses estudantes no ensino regular, às suas dificuldades ao ensinar pessoas com deficiência intelectual e aos materiais didáticos utilizados.

Com esses resultados, Costa, Aniceto e Aguiar (2018) destacam a carência na formação dos docentes, o que resulta em poucas adaptações curriculares e de materiais, comprometendo a eficácia do ensino para pessoas com deficiência. A pesquisa enfatiza a importância de uma formação adequada para que os professores possam desenvolver atividades adaptadas, facilitando a inclusão e a aprendizagem desses estudantes. Além disso, ressalta as dificuldades enfrentadas pelos docentes devido às condições de trabalho precárias, como turmas superlotadas e falta de recursos, razão pela qual muitos deles afirmam que esse ensino especial em sala regular não é possível. Por fim, o estudo sugere que mais investigações são necessárias para melhorar o suporte aos professores e a qualidade do ensino para esse público.

A partir desse estudo, com o intuito de aprofundar e analisar melhor as problemáticas do ensino de matemática para pessoas com deficiência intelectual, realizamos uma entrevista com uma professora da educação especial, que atua há quatro anos na Associação de Pais e Amigos dos Excepcionais (APAE) em um município do interior do Paraná, educando crianças e adolescentes com deficiências múltiplas, sendo a maioria com deficiência intelectual. As perguntas realizadas na entrevista foram inspiradas nas questões e nas conclusões do artigo de Costa, Aniceto e Aguiar (2018). Além disso, toda a entrevista foi gravada e transcrita.

Dentre as perguntas realizadas, destacam-se:

- Você acha que a sua formação foi suficiente para atuar na APAE?
- Como você se sentiu quando se deparou pela primeira vez com alunos com deficiência intelectual?
- Que materiais didáticos você tem acesso para suas aulas?
- Como funcionam as suas aulas?
- Como ocorre a evolução do trabalho realizado com esses estudantes?
- Qual é a sua opinião sobre a inclusão desses estudantes na sala de aula regular?

Várias conclusões puderam ser tiradas a partir das respostas da professora, algumas muito parecidas com as conclusões do estudo de Costa, Aniceto e Aguiar (2018), como, por exemplo, a precarização do trabalho do professor evidenciada pela entrevistada, ao afirmar que as salas de aula da APAE em que atua são multisseriadas e superlotadas, o que não permite o trabalho individualizado com todos os estudantes. A falta de formação também foi citada pela professora, ao mencionar que, apesar de ter feito pós-graduação em educação especial, ainda não possuía os conhecimentos suficientes para trabalhar da melhor forma com seus alunos, sendo que sua experiência foi a principal maneira de aperfeiçoar suas técnicas.

Ademais, a professora também destacou que a equipe pedagógica da APAE é desacreditada, opinião bastante motivada pelo preconceito em relação a pessoas com deficiência, ao imaginarem que esses estudantes não têm capacidades de aprendizagem. No entanto, a professora pontuou diversas vezes que os estudantes com deficiência têm muitas potencialidades se forem incentivados desde a infância. Para isso, o estudante precisa de uma aula onde se sinta incluído, acolhido pela professora ou professor, e que seja conectada com a sua realidade, algo que a professora também afirma ser difícil de acontecer em uma sala de aula regular, já que, muitas vezes, esse docente não possui as condições necessárias para incluir um aluno com deficiência intelectual em meio a vinte outros estudantes.

Em suma, o estudo reforça a necessidade urgente de formação específica e melhores condições de trabalho para que os professores possam efetivamente incluir e ensinar estudantes com deficiência intelectual, garantindo uma educação de qualidade e inclusiva para todos.

## Referências

COSTA, Ailton Barcelos da; ANICETO, Gabriela; AGUIAR, Grazielle Thomasinho de. O ensino de matemática aos alunos com deficiência intelectual: uma concepção dos professores. **Educação: Teoria e Prática**, Rio Claro, SP, v. 28, n. 58, p. 262-279, maio/ago. 2018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.18675/1981-8106.vol28.n58.p262-279>. Acesso em: 04 set. 2024.

# SUDOKU E PENSAMENTO COMPUTACIONAL PARA ESTUDANTES COM ALTAS HABILIDADES/SUPERDOTAÇÃO

Fernanda Queiroz da Silva Oliveira<sup>1\*</sup>  
*fernandaoliveira.2023@alunos.utfpr.edu.br*<sup>1</sup>

Julia Tiepo Muller<sup>2</sup>  
*juliatiepomuller@alunos.utfpr.edu.br*

Luciana Schreiner de Oliveira (Orientadora)  
*lucianaoliveira@utfpr.edu.br*

<sup>1</sup> Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Campus Curitiba

**Palavras-chave:** Altas Habilidades. Pensamento Computacional. Jogos Educativos.

## **Resumo:**

Iniciado em 2016 o projeto de extensão Matemática Acessível visa aproximar licenciandos de Matemática da UTFPR-CT com estudantes da Educação Básica com Altas Habilidades/Superdotação (AH/SD), participantes das salas de recursos multifuncionais. O foco do projeto é a elaboração, adaptação e aplicação de materiais didáticos e atividades para o ensino da Matemática.

Em 2024, o tema escolhido foi o Pensamento Computacional, abordado inicialmente em sua forma “desplugada” durante o primeiro semestre. O pensamento computacional segundo Brackmann (2017) refere-se a habilidade de resolução de problemas complexos com base em quatro pilares: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos. A abordagem desplugada não utiliza equipamentos eletrônicos, permitindo maior acessibilidade, adaptando as atividades, especialmente em escolas com pouca infraestrutura. Por outro lado, o pensamento computacional “plugado” envolve o uso de softwares e linguagens de programação para a criação de jogos digitais (Evaristo; Terçariol; Ikeshoji, 2022).

Os jogos educativos são ferramentas de ensino-aprendizagem eficazes ao promoverem um ambiente livre e motivador na busca de resoluções de problemas (Kishimoto, 2000). No contexto da aprendizagem matemática, esses jogos estimulam a motivação, minimizam a pressão e o medo de errar, uma preocupação frequentemente observada nos estudantes com AH/SD.

Estudantes com AH/SD apresentam notável desempenho e elevado potencial nas áreas isoladas ou combinadas: intelectual, acadêmica, liderança, criatividade na resolução de problemas, psicomotricidade e artes. É importante distinguir altas

---

<sup>1\*</sup>Bolsista do Programa Licenciando - UTFPR-CT, integrante do projeto de extensão Matemática Acessível.

<sup>2</sup> Integrante voluntária do projeto de extensão Matemática Acessível pela UTFPR-CT.

habilidades de superdotação, sendo a primeira relativa a aspectos que podem ser moldados pelo ambiente e, a segunda, relativa a fatores genéticos, a inteligência e a personalidade (Brasil, 2006). Entretanto, para fins de clareza, utilizamos o termo do modo como adotado pela Secretaria de Educação Especial: altas habilidades/superdotação (AH/SD).

Este trabalho tem por objetivo apresentar as atividades e resultados do projeto durante o primeiro semestre de 2024. Foram realizados dois encontros no Colégio Estadual Roberto Langer Junior com sete estudantes de AH/SD (três do 6º ano e quatro do 7º ano) da sala de recursos multifuncionais. Os jogos selecionados incluem o Jogo dos Palitos, Sudoku e Fantan, tendo como foco central deste relato a aplicação do Sudoku e os resultados obtidos.

As atividades realizadas visaram estimular o pensamento crítico e as habilidades matemáticas dos estudantes de forma dinâmica, utilizando o pensamento computacional. A análise dos resultados se deu pelos dados coletados por meio de observação, questionários e feedback sobre a compreensão dos conceitos matemáticos, dificuldades encontradas e estratégias utilizadas.

Cada encontro durou 2 horas, onde os três jogos selecionados foram aplicados, permitindo avaliar e aprofundar a compreensão dos estudantes sobre os conceitos matemáticos. O Sudoku foi aplicado em duas sessões de 1 hora cada, embora tenha apresentado desafios que serão discutidos. O Sudoku, um quebra-cabeças numérico, explora conceitos de sequência numérica e lógica, alinhando-se aos pilares do pensamento computacional ao exigir que os jogadores decomponham o problema e elaborem estratégias.

No primeiro encontro, os estudantes utilizaram um tabuleiro de EVA com dicas (números pré-marcados) e peças numéricas para completar grades de  $2 \times 2$  e  $2 \times 3$  (Mini Sudoku), respeitando as regras que proíbem a repetição de números em linhas, colunas e subgrades. As regras foram introduzidas de forma progressiva, e três desafios de cada grade foram oferecidos.

Os estudantes iniciaram a atividade individualmente, formando duplas ao longo do processo. Durante o jogo, foram guiados com perguntas como "Qual estratégia você está usando?" ou "O que acontece se pensarmos em um número de cada vez?". Após esta etapa, responderam a um questionário sobre estratégias e dificuldades. Devido à falta de tempo, a discussão sobre as respostas foi adiada para o encontro da semana seguinte, gerando expectativa para a resolução da grade convencional de  $3 \times 3$ , incentivando a prática em casa.

Na resolução do Mini Sudoku, alguns estudantes terminaram rapidamente, enquanto outros precisaram de mais tempo e auxílio. Aqueles que enfrentaram dificuldades relataram distrações e problemas para identificar os erros.

Para o segundo encontro, além do Sudoku convencional em EVA, foram disponibilizadas várias grades impressas (incluindo Sudoku irregular e killer) para atender diferentes níveis de habilidade, evitando ociosidade. A maioria dos estudantes considerou as atividades motivadoras e de fácil dificuldade. Nesta etapa, os estudantes escolheram livremente entre os níveis de Sudoku, com a maioria optando por desafios mais avançados, ao invés progredir de forma sequencial.

Observou-se que, no primeiro encontro, o Sudoku foi bem recebido, gerando engajamento. No segundo encontro, o interesse caiu, possivelmente pela ausência de um tabuleiro maior para atividades em grupo e a complexidade dos níveis escolhidos, gerando frustração. A tendência dos estudantes de iniciar com desafios mais difíceis sugere uma forte necessidade de aprovação e perfeição, uma elevada auto exigência, resultando em competição entre eles. As atividades em grupo foram melhor aceitas e aproveitadas do que as individuais.

O jogo demonstrou ser uma ferramenta eficaz na promoção do pensamento computacional tendo a decomposição do problema em partes menores pelo jogador, analisar linhas, colunas e subgrades, identificar padrões e desenvolver algoritmos para encontrar soluções. A abstração, por sua vez, possibilitou que os estudantes se concentrassem nas restrições relevantes, como os espaços disponíveis e as regras que limitam as opções. Os algoritmos verificam-se na criação de estratégias lógicas e procedimentos para encontrar a solução correta, podendo testar resoluções e revisá-las se necessário.

No final, concluiu-se que estudantes com AH/SD se sentem mais engajados em atividades colaborativas, que promovem desafios adequados ao seu potencial cognitivo. É necessário encontrar um equilíbrio entre atividades desafiadoras, mas não impossíveis de serem solucionadas. A utilização de jogos como o Sudoku mostrou-se eficaz para desenvolver o pensamento computacional de maneira lúdica e colaborativa, ressaltando a importância de metodologias ativas no desenvolvimento social, cognitivo e motivacional de estudantes com AH/SD, mesmo em áreas de interesse fora do campo da matemática.

#### **Referências:**

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica.** 226 f. (Tese de doutorado Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

BRASIL, 2006. **Saberes e práticas da inclusão:** desenvolvendo competências para o atendimento às necessidades educacionais especiais de alunos com altas habilidades/superdotação. 2 ed. / coord. geral SEESP/MEC. Brasília: MEC, 2006.

EVARISTO; I. S.; TERÇARIOL, A. A. L.; IKESHOJI, E. A. B. Do pensamento computacional desplugado ao plugado no processo de aprendizagem da Matemática. **Revista latinoamericana de Tecnologia Educativa**, n. 21, páginas 75 - 96, janeiro/2022.

KISHIMOTO, T. M. (Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.** 8ª edição. São Paulo: Editora Cortez, 2000.

# Festival de vídeos de Matemática

Fernanda Rodrigues<sup>1</sup>  
*fernanda.rodrigues.56@estudante.unespar.edu.br*

Maria Paulo<sup>2</sup>  
*maria.paulo.51@estudante.unespar.edu.br*

Renato Machado<sup>3</sup>  
*machadorenatofilho@gmail.com*

Petterson Pontes<sup>4</sup>  
*petterson.pontes.56@estudante.unespar.edu.br*

Alexsandra Camara<sup>5</sup>  
*alexsandracamara1108@gmail.com*

**Palavras-chave:** vídeos educacionais, matemática, geometria.

## Resumo:

Pesquisas têm indicado que o uso de vídeos em sala de aula se mostra como um importante meio no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Assim, o trabalho desenvolvido neste projeto de extensão teve como foco a produção de vídeos como forma de exploração de saberes geométricos, visto ser um tema que os estudantes apresentam muitas dificuldades. De forma mais específica, o presente projeto de extensão teve como objetivo promover ações integradas entre os estudantes da disciplina de Metodologia de Extensão do curso de Licenciatura em Matemática e os estudantes da Educação Básica de uma escola pública da cidade de Paranaguá, por meio de situações em contextos de criação de vídeos, a fim de ampliar os conhecimentos e experiências relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem do pensamento geométrico. Discussões de textos relacionados ao uso de vídeos no ensino da Matemática e sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes da Educação Básica, permitiram aos licenciandos a oportunidade de compreender melhor sobre o contexto no qual será desenvolvido o projeto. Em seguida, foi elaborada a proposta do festival assim como a sua aplicação na escola. O desenvolvimento do projeto contribuiu para reflexões teórico-metodológicas sobre o processo de ensino e aprendizagem do pensamento geométrico e para o desenvolvimento de competências relacionadas à tecnologia e à inovação, quando os estudantes se encontraram diante da criação de vídeos que tratam do campo da Geometria.

---

<sup>1</sup> Estudante do 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática – Unespar – Executora do Projeto

<sup>2</sup> Estudante do 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática – Unespar – Executora do Projeto

<sup>3</sup> Estudante do 2º ano de Licenciatura em Matemática – Unespar – Executor do Projeto

<sup>4</sup> Estudante do 2º ano de Licenciatura em Matemática – Unespar – Executor do Projeto

<sup>5</sup> Professora orientadora do Projeto.

## **Objetivos:**

O projeto foi desenvolvido na disciplina de Metodologia de Extensão do curso de Licenciatura em Matemática junto com estudantes e docente da Educação Básica e teve como objetivo geral a ampliação sobre os conhecimentos e experiências relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem de conhecimentos geométricos por meio da realização de um festival de vídeos.

## **Metodologia:**

Os estudantes de licenciatura em Matemática, nas aulas da disciplina de Metodologia de Extensão, tiveram momentos para a leitura e discussão de artigos relacionados ao uso de vídeos no ensino da Matemática e sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes da Educação Básica. Além disso, tiveram que elaborar um vídeo para as disciplinas de Desenho Geométrico e Metodologia de Extensão, considerando todas as etapas para a elaboração de um festival de vídeos para ser desenvolvido com os estudantes da 7ª série de duas turmas de um colégio estadual da cidade de Paranaguá e tiveram como inspiração o Festival de vídeos<sup>6</sup>, da Unesp, que já se encontra em sua 7ª edição.

Em um primeiro momento, os licenciandos, juntos com a professora coordenadora do projeto, conversaram com as professoras das turmas para explicar sobre o projeto e ver se havia a necessidade de alguma alteração nas ideias apresentadas e fechar um cronograma para as etapas do projeto.

Em seguida, ocorreu o primeiro encontro no qual ocorreu uma conversa com os estudantes e a apresentação de tipos de vídeos. Com o tema escolhido, os estudantes, divididos em grupos, pesquisaram sobre o conteúdo matemático sorteado para seu grupo, explorando definições, aplicações e exercícios para, a partir dessa pesquisa, decidirem a forma de explorar esses conteúdos no vídeo, que tipo de vídeo iriam produzir e qual mensagem transmitir. Os estudantes também deveriam decidir como seria o formato do seu vídeo: se fariam gravações de cena, se utilizariam animações, se teriam uma expressão artística, se precisariam de recursos tecnológicos etc.

Com a pesquisa em mãos e com uma ideia da concepção do vídeo, passou-se para a elaboração do roteiro com o auxílio dos discentes. Os discentes explicaram para os alunos como deveria ser realizado o roteiro do vídeo e também foi marcado encontro posterior para analisarem os roteiros produzidos pelos estudantes e auxiliar nas possíveis necessidades e dificuldades que tivessem. Após a elaboração do roteiro, fez-se necessário o planejamento do vídeo e os discentes deram dicas de como gravar e editar vídeos.

Com os vídeos finalizados, foi realizada a avaliação dos vídeos pelos discentes e, em seguida, ocorreu o Festival de Vídeos, no qual todos os estudantes receberam certificado de participação e os três melhores vídeos, além do certificado, receberam medalhas. O Festival ocorreu no anfiteatro a UNESPAR - Paranaguá fazendo com que os alunos e as professoras fossem até o local receber as premiações. Ao final, os licenciandos, as professoras e os estudantes da educação básica realizaram a avaliação do projeto com o objetivo de analisarmos os pontos positivos e negativos e podermos qualificar o projeto para aplicações futuras.

---

<sup>6</sup> O Festival é uma iniciativa do projeto “Vídeos Digitais na Licenciatura em Matemática a Distância”, coordenado pelo professor Dr. Marcelo de Carvalho Borba, da UNESP, Rio Claro. Esse evento conta com o importante apoio da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM e da agência de fomento CNPq. O Festival ocorre primeiramente online neste site e se encerra com um evento presencial com mesas redondas, palestras e cerimônia de premiação. Link do Festival: <https://www.festivalvideomat.com/>

### **Considerações finais:**

A integração de vídeos nas práticas de ensino revelou-se uma ferramenta eficaz para enriquecer o processo de aprendizagem, proporcionando uma experiência mais dinâmica e visual para os estudantes.

Além de facilitar a compreensão dos estudantes sobre conceitos geométricos, essa abordagem ofereceu aos professores uma oportunidade valiosa para seu crescimento profissional, permitindo-lhes explorar novas metodologias e aprimorar suas habilidades pedagógicas. O uso de vídeos incentivou os educadores a refletirem sobre suas práticas e a buscarem maneiras de tornar o ensino mais colaborativo e envolvente.

Como resultado, o processo de ensino-aprendizagem se tornou mais participativo e estimulante, beneficiando tanto a formação dos professores e dos licenciandos quanto o desenvolvimento dos estudantes do 7º ano.

### **Referências:**

ALMOULOU, S. A. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação*, Nº 27, set./dez, 2004.

BORBA, M. D. C. OECHSLER, Vanessa. Tecnologias na educação: o uso dos vídeos em sala de aula. *R. bras. Ens. Ci. Tecnol.*, Ponta Grossa, 11(2), 391-423, 2018.

FERRÉS, J. Vídeo e educação. Trad. Juan Acuña Llorens. 2. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. LORENZATO, S. Porque não ensinar geometria? *Educação Matemática em Revista – SBEM*, nº 4, 1º semestre, 1995. BRASIL. Resolução nº 7 de 18 de dezembro de 2018. Estabelece as Diretrizes para a Extensão na Educação Superior Brasileira.

MELLO, C. de M. Neto, J. R. M. de A.. *Curricularização da extensão universitária*. Rio de Janeiro: Editora Freitas Bastos, 2020.

MORAN, J. M. O Vídeo na Sala de Aula. *Comunicação e Educação*, 2,27-35, 1995.

OECHSLER, V. Alunos da educação básica produzindo vídeos: aspectos metodológicos. In: *ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 20., 2016, Curitiba. Anais... Curitiba: UFPR, 2016.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica. *Dissertação (Mestrado em Educação)*. Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Estadual de Campinas. CampinasSP: UNICAMP, 1989.

PIRES, E. G. A experiência audiovisual nos espaços educativos. *Comunicação & Educação*. São Paulo, n. 25, p. 94 – 100, set./dez. 2002. Disponível em: <<http://www.revistas.usp.br/comueduc/article/view/42298> >. Acesso em: 10 out. 2016.

# O JOGO DOS PALITOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DO PENSAMENTO COMPUTACIONAL PARA ALUNOS COM ALTAS HABILIDADES/SUPERDOTAÇÃO

Gabriel Bressan Sizenando<sup>1♣</sup> e Mayara Gabrielly da Silva<sup>2\*</sup>  
*maysil@alunos.utfpr.edu.br, gabrielbressan@alunos.utfpr.edu.br*<sup>1</sup>

Luciana Schreiner de Oliveira  
*lucianaoliveira@utfpr.edu.br*<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

<sup>2</sup>Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

**Palavras-chave:** Altas Habilidades. Pensamento Computacional. Jogos Educativos.

## Resumo:

O projeto de extensão “Matemática Acessível” tem como objetivo a elaboração e adaptação de materiais didáticos e atividades para o ensino de Matemática voltados para alunos com altas habilidades/superdotação, vinculado ao Programa Licenciando do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR, Campus Curitiba). O projeto foi elaborado no contexto educacional dos estudantes das Salas de Recurso Multifuncionais da Rede Pública Municipal e Estadual da Educação Básica e em 2024 teve aplicação aos estudantes da Educação Básica do Colégio Estadual Roberto Langer Junior.

Em 2024 o tema selecionado foi Pensamento Computacional, adotando inicialmente o desplugado, sendo uma das habilidades contempladas pela BNCC (2018) desde o Ensino Fundamental, pois “envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática por meio do desenvolvimento de algoritmos” (Brasil, 2018, p.474).

O Pensamento Computacional pode ser desenvolvido coletivamente, caracterizando-se como um exercício de persistência, onde eles são estimulados a compartilhar erros e acertos com os colegas, promovendo uma colaboração eficaz. Essa habilidade é especialmente importante para estudantes com Altas Habilidades/Superdotação, uma vez que são incentivados e estimulados a compartilhar e colaborar em equipe, habilidade essencial para o sucesso dos projetos conforme Wing (2006) *apud* Brackmann (2017).

Com o entendimento de que “o jogo favorece o aprendizado pelo erro e estimula a exploração e a solução de problemas” (Kishimoto, 1994, p. 21), é fundamental

---

<sup>1</sup> ♣ Bolsista do Programa Licenciando - UTFPR.

<sup>2</sup>\* Voluntário do Programa Licenciando - UTFPR.

identificar as possibilidades para os objetivos de ensino que confluem com os processos de ensino e aprendizagem necessários, o grau de experiência e conhecimento do estudantes. A diversidade de elementos como regras, relações, e padrões, além das variedades visuais e motoras presentes em cada jogo, estimula o pensamento de soluções em diversas situações.

Com objetivo de oferecer esses estímulos e abordar o Pensamento Computacional, os participantes do projeto se dedicaram à elaboração de um plano de aula aliado à Metodologia de Jogos, onde foram selecionados o Jogo dos Palitos, Fantan, e Sudoku, que abordam conceitos como agrupamento, divisão e raciocínio lógico.

O Jogo dos Palitos além de abordar múltiplos e divisores, desenvolve o Pensamento Computacional desplugado e enfatiza os conteúdos matemáticos que surgem neste processo de exploração do jogo.

Dois jogadores jogam o seguinte jogo: Há 50 palitos sobre a mesa. Eles jogam alternadamente e, na sua vez, cada jogador pode tirar de 1 a 5 palitos. Aquele que retirar o último palito vence. Qual dos dois tem uma estratégia segura para vencer? Qual é essa estratégia? (IMPA, 2015, S/N).

A aplicação do jogo adaptado foi realizada em apenas um encontro, com 7 alunos do ensino fundamental - três do 6º ano e quatro do 7º ano - em etapas, iniciando com 50 palitos dispostos sobre a mesa, usando par ou ímpar para decidir o primeiro jogador, tendo como objetivo ser aquele que retira o último palito. Após quatro partidas, a quantidade de palitos foi reduzida para 40, e os jogadores começaram a perceber uma estratégia para vencer.

Na segunda etapa, com 20 a 10 palitos, os estudantes deduziram que, com 6 palitos restantes na mesa durante sua vez, eles perderiam. A partir disso reconheceram o mesmo padrão para 12 e 18 palitos, concluindo que quando a quantidade de palitos sobre a mesa for um múltiplo de 6, o jogador perderá.

A compreensão foi avaliada com uma ficha individual, onde os estudantes explicaram o raciocínio utilizado e as estratégias identificadas por meio de perguntas feitas a todos de forma direta: Existe uma estratégia para jogar? Explique. Com 6 palitos sobre a mesa na sua vez, há chance de vitória? Justifique. No jogo com 50 palitos, quem começa tem mais ou menos chance de ganhar? Por quê? Se ambos jogarem de forma ideal, qual estratégia garante a vitória? Se você começar com 40 palitos, quantos precisa retirar na primeira rodada para vencer?

De forma geral, os estudantes identificaram o jogo como um jogo de sorte, porém um aluno destacou-se ao perceber já na primeira partida, a vantagem de sobrar 6 palitos na vez do adversário. A evolução dos estudantes foi perceptível no decorrer da aula, apresentaram entendimento da mecânica do jogo de forma intuitiva, mas com dificuldades em formalizar em linguagem matemática.

O jogo mostrou-se uma estratégia eficaz para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, desafiando-os a decompor o problema em partes menores e a reconhecer padrões, como a descoberta de que múltiplos de 6 são desfavoráveis neste cenário. A abstração foi estimulada quando os alunos generalizaram estratégias a partir de exemplos específicos. Dessa forma, o uso de jogos integrou o

aprendizado de conceitos matemáticos e o desenvolvimento de habilidades essenciais para o Pensamento Computacional, promovendo um ambiente de aprendizagem colaborativa e crítica.

#### **Referências:**

- [1] BRACKMANN, Chistian Puhlmann. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica**. 2017. 226 f. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2017.
- [2] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <[https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal.pdf](https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf)>. Acesso em: 22/07/2024.
- [3] KISHIMOTO, T. M. (Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 8 edição. São Paulo: Editora Cortez, 2000.
- [4] Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). **Problemas intrigantes**. PAPMEM. Youtube, 2015. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=5HNPNswS6Ak>>. Acesso em: 11/10/2024.

# O uso de materiais didáticos manipuláveis à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Igor Nascimento Duarte  
*igor.1991@alunos.utfpr.edu.br*<sup>1</sup>

Leônia Gabardo Negrelli (Orientadora)  
*negrelli@utfpr.edu.br*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

**Palavras-chave:** Teoria dos Registros de Representação Semiótica, Materiais Didáticos, Educação Matemática.

## Resumo:

Esta pesquisa teve como objetivo investigar possíveis utilizações de Materiais Didáticos Manipuláveis (MDM) à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) no processo de ensino-aprendizagem de matemática. Como resultado dessa investigação foram propostas duas sequências didáticas: uma de tópicos da Teoria de Conjuntos e outra de tópicos de Geometria Plana. Também foram esboçadas possibilidades para tópicos de Números Complexos.

Semiótica é a ciência que estuda os signos e os processos de significação. Dentre suas diversas acepções está a de Charles Sanders Peirce que inaugurou a Semiótica Moderna. Para esse autor, o signo faz parte de uma relação triádica: um signo representa um objeto com a intenção de sinalizar alguma outra coisa, também sendo necessário um conhecimento colateral para interpretação dos signos [6].

Nesse mesmo sentido, Raymond Duval ao estabelecer a Teoria dos Registros de Representação Semiótica após investigar aspectos da aprendizagem matemática avança também nos estudos acerca do desenvolvimento cognitivo conduzidos por Jean Piaget, aprofundando a análise do funcionamento cognitivo do pensamento, do processo de representação de conceitos e do impacto do uso das representações na aprendizagem [8]. Dentre os diversos sistemas de representação semióticos possíveis, existem aqueles que apresentam as atividades cognitivas de Formação, Tratamento e Conversão. Por essa razão, as representações desses sistemas são chamadas de registros. Nomeadamente, "Formação" é a possibilidade de constituir traços perceptíveis que sejam identificáveis como a representação de alguma coisa, "Tratamento" é a possibilidade de transformar as representações em outras do próprio sistema utilizando as regras deste e "Conversão" é a possibilidade de transformar as representações de um sistema nas representações de outro, mantendo uma relação com conhecimento representado e permitindo novas significações. Exemplos de sistemas semióticos que permitem essas três atividades

cognitivas são: a linguagem natural, as línguas simbólicas, os gráficos, as figuras geométricas etc. Já o código morse é um sistema que não as permite [8].

A consequência dessa abordagem teórica para o processo de ensino-aprendizagem de matemática, conforme afirma (DAMM, 2002, p. 143-144) é que:

A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação, pelo sujeito que apreende, de vários registros de representação. Ou seja, quanto maior for a mobilidade com *registros de representação diferentes* do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto [5].

Concomitantemente, entende-se que bons MDM podem ser verdadeiras personificações de conceitos matemáticos pois os representam claramente, sendo, portanto, instrumentos úteis ao processo de ensino e de aprendizagem por poderem ser sentidos, manipulados fisicamente e movimentados [10].

As duas sequências didáticas apresentadas foram elaboradas a partir do desenvolvimento de um trabalho de conclusão de curso de licenciatura em matemática [7].

A primeira sequência didática proposta aborda os conceitos de conjunto, subconjuntos, conjunto vazio, conjunto universo, interseção de conjuntos, união de conjuntos e diferença de conjuntos. Ela utiliza caixinhas de dobraduras, balões e tampinhas de garrafas para representar os conjuntos e os elementos. Para haver um ponto de referência foram analisados 4 livros didáticos de matemática para o Ensino Médio ([1], [3], [9], [11]) que apresentam esses conceitos. Nessa análise foram contabilizados os diferentes tipos de representações utilizadas para as apresentações dos conceitos e os tipos de tratamentos e conversões exigidos nas seções de exercícios. No geral, constatou-se uma tendência a privilegiar o registro algébrico em detrimento dos demais tipos de representações, não havendo também a consideração do uso de materiais didáticos manipuláveis fisicamente [7].

A segunda sequência didática proposta aborda o Teorema de Tales e o Teorema Fundamental da Semelhança. Ela utiliza hastes de madeira, fios e tampinhas, todos com imãs, em um quadro de metal para representar as retas, segmentos de retas e pontos no plano. De maneira semelhante ao que foi realizado para a produção da sequência didática anterior foram analisados 4 livros didáticos ([2], [4], [9], [12]) e contabilizados os diferentes tipos de representações utilizadas nas apresentações dos conceitos e os tipos de tratamentos e conversões demandados nas seções de exercícios. No geral, houve uma tendência na direção do registro algébrico, porém, agora acompanhado de registros e representações figurais das situações geométricas, mas não houve proposta de uso de MDM. Nesta sequência apresentam-se diferentes configurações para o Teorema de Tales, nas quais retas transversais cortam o feixe retas paralelas em ângulos diversos, cabendo ao estudante investigar a situação e procurar mostrar (ou demonstrar) se a relação de igualdade fornecida pelo Teorema de Tales permanece a mesma para as diferentes configurações. Pode-se dar a liberdade para o estudante inicialmente utilizar registros e representações que achar melhor, mas em um momento seguinte pede-

se que ele reescreva sua produção utilizando outros registros e representações, cada vez mais refinados do ponto de vista da notação e da linguagem matemáticas [7].

Para o ensino de tópicos de Números Complexos propõe-se utilizar o contexto da Educação Financeira e a conversão entre diferentes tipos de moedas. Com o suporte de uma história ficcional o leitor seria levado a diferentes cenários de conversões de valores sendo um deles o da relação  $1 = -i^2$  [7].

Pelas propostas apresentadas percebe-se uma considerável gama de possibilidades no uso de MDM à luz da TRRS. Ao mesmo tempo em que se preenchem lacunas nas representações dos conceitos abordados em algumas edições de livros didáticos, também se expandem essas representações para os objetos ditos concretos (os materiais manipuláveis fisicamente), contribuindo no permanente processo de compreensão dos objetos matemáticos [7].

## Referências:

- [1] ANDRADE, T. M. **Matemática interligada: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica**. São Paulo: Scipione, 2020.
- [2] ANDRADE, T. M. **Matemática interligada: trigonometria, fenômenos periódico e programação**. São Paulo: Scipione, 2020.
- [3] BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. S. **Prisma matemática: conjuntos e funções: ensino médio**. São Paulo: FTD, 2020.
- [4] BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. S. **Prisma matemática: geometria e trigonometria: ensino médio**. São Paulo: FTD, 2020.
- [5] DAMM, R., F. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A. *et al.* **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 2002, p. 135-153.
- [6] D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática**. Tradução de: BONOMI, M. C. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- [7] DUARTE, I, N. **O uso de materiais didáticos à luz da teoria dos registros de representação semiótica: abordagens para o ensino de tópicos da teoria de conjuntos e da geometria plana**. Trabalho de Conclusão de Curso. Curso de Licenciatura em Matemática. UTFPR, 2024.
- [8] DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. Tradução de LEVY, L. F. SILVEIRA, M. R. A. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- [9] IEZZI, G.; *et al.* **Matemática: ciências e aplicações: ensino médio, volume 1**. São Paulo: Saraiva, 2016.
- [10] PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (Ed.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2012. p. 77-92.
- [11] SOUZA, J. R. **Multiversos Matemática: conjuntos e função afim: Ensino Médio**. São Paulo: FTD, 2020.
- [12] SOUZA, J. R. **Multiversos Matemática: sequências e trigonometria: Ensino Médio**. São Paulo: FTD, 2020.

# Trajetórias Acadêmicas de estudantes de Matemática

Isac Messias Michelin  
*isacmicic@gmail.com*

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)  
*gabriel.santos22@gmail.com*

**Palavras-chave:** Educação Matemática, Fracasso Escolar, História Oral, Ensino Superior de Matemática.

## **Resumo:**

O foco do estudo das dificuldades de aprendizado escolar não se limita aos sujeitos com históricos mais desafortunados, pois um aluno considerado “bem sucedido” ainda passa por dificuldades na sua vida escolar. O Fracasso Escolar se consolida a partir de vários fatores, como evasão e reprovação, mas as experiências de alunos que não se encaixam nesses fatores podem, em certos momentos, ser base de reflexão e análise das dificuldades e obstáculos inerentes ao curso ou às suas histórias de vida e, assim, trazer uma maior compreensão dos sujeitos inseridos em seus contextos. Nesse sentido, esse trabalho busca entender, a partir da lente do Fracasso Escolar, as principais dificuldades na experiência acadêmica de um estudante do Ensino Superior de Matemática. Isso foi feito usando da História Oral para capturar a memória de 4 ex-alunos de Matemática, com histórias de vida e de universidade vastamente diferentes, mas que compartilham dores e angústias comuns.

A metodologia escolhida, História Oral, transforma a memória falada de um depoente em uma fonte histórica a ser referenciada e estudada. Isso se faz a partir dos seguintes passos, segundo Garnica (2003):

- Escolha dos depoentes: a partir de indicação ou por uma característica desejada, se busca pessoas para serem entrevistadas;
- Entrevista gravada: entrevistas semi estruturadas que serão o material bruto da pesquisa;
- Transcrição: momento em que se transfere para o papel o material bruto das entrevistas;
- Textualização: transformação da transcrição em um texto narrativo;
- Legitimação: o retorno do documento para o depoente, que o confere, avalia e, caso necessário, pede alterações no texto, até a posterior cessão dos direitos de uso pelo pesquisador.

Pensando nisso, seguindo a metodologia da História Oral, a escolha dos depoentes se deu por critério de rede. Após a apresentação da pesquisa, 4 pessoas

aceitaram fazer parte dela e, então, foram realizadas as entrevistas. As entrevistas foram feitas online, a partir de um roteiro semi estruturado previamente enviado para cada depoente, e gravadas. No total, as entrevistas acabaram somando, aproximadamente, 7 horas e 30 minutos de material bruto, que foi transformado, inicialmente, em 5 transcrições, cada uma referente a uma entrevista (um dos depoentes foi entrevistado em dois momentos distintos). A partir das transcrições, foram feitas as 4 textualizações, que foram enviadas para seus respectivos entrevistados, para que cada um validasse as informações e aprovasse o uso desse material na pesquisa, assim transformando as textualizações nas fontes históricas que são a base desse trabalho.

Dito isso, apresento aqui, brevemente, cada um dos depoentes, a partir das informações dadas no momento da entrevista:

- Bruno de Lessa Victor: fez bacharelado em matemática na UFPR, mestrado em matemática na USP e doutorado, também, na UFPR e trabalha como professor na UFSC.
- Maria Carolina Marin Pires: fez licenciatura em matemática na UEL e trabalha como professora do estado de Londrina.
- Joslaine Burdella Lise: começou a licenciatura em matemática no IFPR – Campus Capanema, mas acabou saindo do curso. É dona de um estúdio de fotografia.
- William Goulart Gomes Velasco: fez bacharelado e mestrado em matemática na UFSC e doutorado na UFPR. Faz pós-doutorado voluntário na UFPR.

A partir das textualizações, os próximos passos da pesquisa serão utilizar da Análise de Conteúdo Bardin (2016) para fazer uma leitura flutuante das textualizações e, a partir disso, identificar as unidades de análise, isto é, identificar trechos interessantes das textualizações e os agrupar por temas, as unidades de análise. Feito isso, os temas da análise irão surgir com base nas unidades de análise, ou seja, os dados vão dizer quais os textos serão utilizados para a discussão e conversa com a bibliografia a ser estudada, e não o contrário. Seguindo a Análise de Conteúdo, iremos relacionar os excertos com a bibliografia estudada.

## Referências:

- [1] BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução: L. A. Reto, A. Pinheiro. 1. ed. São Paulo: Almedina Brasil, 2016.
- [2] GARNICA, Antonio. **História Oral e Educação Matemática**: de um inventário a uma regulação, ZETETIKÉ, v.11, n. 19, 2003.

# Letramento Estatístico: um estudo sobre sua presença na BNCC e em planos de aula

Laura Carolina Aymoré Ferrandin\*  
*lauraaymore@ufpr.br<sup>1</sup>*

Emerson Rolkouski (Orientador)  
*rolkouski@ufpr.br<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná - UFPR

**Palavras-chave:** Letramento Estatístico; Níveis de Letramento Estatístico; Base Nacional Comum Curricular

## Resumo:

Este trabalho se propôs a analisar os níveis de letramento estatístico, propostos pela BNCC - Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) e pelos planos de aula disponibilizados pela plataforma digital Nova Escola<sup>1</sup>. O objetivo foi comparar a progressão do letramento ao longo dos anos escolares, buscando identificar correlações entre o proposto pela BNCC e o que é fornecido pelos planos de aula.

A escolha de analisar planos de aula de uma plataforma digital ao invés dos livros didáticos é justificada pela diferença de validação oficial entre esses dois recursos. Enquanto o livro didático passa por um processo de avaliação e aprovação pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), os planos de aula fornecidos pelas plataformas digitais sofrem apenas uma validação interna da própria plataforma. Além disso, foi realizada uma Revisão Bibliográfica que relevou uma visão dos desafios enfrentados na implementação do letramento estatístico nas diretrizes da BNCC. Essas pesquisas indicam que, apesar dos esforços para melhorar a abordagem ao letramento estatístico, há uma necessidade contínua de pesquisa e aprimoramento das práticas pedagógicas e dos materiais didáticos.

Para este estudo, utilizamos como base os níveis de letramento estatístico propostos por Watson e Callingham (2003), conforme resumido a seguir.

**1) Idiossincrático:** neste nível de letramento espera-se que o indivíduo se utilize de habilidades matemáticas básicas, referentes à contagem sequencial dos números, associação de números a quantidade e a leitura de valores em tabelas.

**2) Informal:** neste nível de letramento espera-se que o indivíduo se utilize de elementos simples da terminologia matemática e estatística, ainda que a partir de

---

\* Bolsista do Programa PET-Matemática.

<sup>1</sup> Disponível em: <https://novaescola.org.br/planos-de-aula>

crenças intuitivas, realize cálculos básicos com dados numéricos apresentados em tabelas, gráficos e em questões que envolvem chance.

**3) Inconsistente:** neste nível de letramento espera-se que o indivíduo faça um uso qualitativo de ideias estatísticas, obtendo conclusões concretas a partir dos dados apresentados, ainda que sem justificativa.

**4) Consistente não crítico:** neste nível de letramento espera-se que o indivíduo use terminologias estatísticas referentes a média, variação, probabilidades simples e interpretação de gráficos, ainda que de forma acrítica.

**5) Crítico:** neste nível de letramento espera-se a realização de questionamentos críticos, com o uso qualitativo de ideias estatísticas, utilizando a terminologia apropriada, e com a compreensão do conceito de variação.

**6) Matematicamente crítico:** neste nível de letramento espera-se a compreensão, aplicação e análise de conceitos matemáticos em contextos complexos, com uso da interpretação quantitativa e compreendendo os aspectos sutis da linguagem estatística, reconhecendo a incerteza estatística ao realizar previsões.

Para o fim da pesquisa, propomos 4 desdobramentos dos níveis de letramento estatísticos propostos e, à luz da Análise Textual Discursiva, catalogamos e identificamos qual o nível de letramento estatístico para cada ano escolar, para a BNCC e para os planos de aula. Os desdobramentos analisavam o nível de interpretação, o nível de terminologia, o nível gráfico e o nível tabular exigidos em cada nível.

Como primeiro resultado da análise, obtivemos que a BNCC espera dos alunos o desenvolvimento contínuo e progressivo do letramento estatístico ao longo dos anos escolares, quando pensamos no conjunto de desdobramentos na totalidade. Porém, ao analisar separadamente a progressão dos níveis gráfico e tabular, pudemos observar um crescimento não esperado e destoante a partir do 4º ano do Ensino Fundamental, o qual espera que o aluno desenvolva o nível avançado da compreensão tabular e o nível de leitura além dos dados na compreensão gráfica.

Na sequência do trabalho, e na análise dos planos de aula, tivemos como resultado dos níveis de letramento de cada ano um resultado semelhante ao encontrado na BNCC e, com isto, inferimos em primeira análise que os planos de aula da plataforma estão de fato alinhados com a BNCC, conforme pode ser observado na Figura 1. Porém, em um segundo momento, observamos que os níveis referentes aos desdobramentos gráfico e tabular tem uma grande discrepância com aquilo esperado pela BNCC. Essa descoberta sugere que, embora a BNCC e os planos de aula propostos pela Nova Escola estejam alinhados em muitos aspectos com os níveis de letramento estatístico descritos por Watson e Callingham (2003), ainda existem áreas que não seguem o padrão de desenvolvimento gradual e cumulativo presente na teoria dos autores.

**Figura 1:** Comparação dos níveis de letramento estatísticos propostos pela BNCC e presentes nos planos de aula, através dos anos escolares.



Fonte: Elaborado pelos autores.

A progressão nos níveis gráfico e tabular, que deveria acompanhar o desenvolvimento das outras competências estatísticas, apresenta um descompasso que pode ser atribuído à forma como certas habilidades são descritas na BNCC, possibilitando múltiplas interpretações. Essa falta de clareza pode gerar ambiguidades na aplicação dos conteúdos, levando a uma variação nos níveis de competência adquiridos pelos alunos em diferentes habilidades.

### Referências:

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- [2] MORAES, R.; GALIAZZI, M. do C. **Análise Textual Discursiva**. 2. ed. Ijuí: Unijuí, 2011. 224 p. (Educação em Ciência).
- [3] WATSON, J.; CALLINGHAM, R. Statistical literacy: a complex hierarchical construct. **Statistics Education Research Journal**, v. 2, n. 2, p. 3-46, nov. 2003. Disponível em: [https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ2\(2\)\\_Watson\\_Callingham.pdf](https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ2(2)_Watson_Callingham.pdf). Acesso em: 19 fev. 2024.

# Perspectiva histórica da Educação Matemática: início de um estudo sobre a pós-graduação em Educação da UFPR

Matheus Henrique Pawlak Silva\*  
22004001@uepg.br<sup>1</sup>

Marceli Behm Goulart (Orientadora)  
marcelibg@gmail.com<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Estadual de Ponta Grossa

**Palavras-chave:** Educação Matemática, História da Educação.

## Resumo:

O presente trabalho constitui-se como parte inicial de um projeto de iniciação científica que tem como objetivo construir uma versão histórica da pesquisa em Educação Matemática (EM) no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

O interesse pelo Programa de Pós-Graduação em Educação *stricto sensu* da UFPR, deve-se ao fato de, até o início da década de 1990, ser ele o único curso de mestrado em Educação no estado do Paraná, em funcionamento desde a década de 1970, e, também o primeiro doutorado nesta área (Bufrem; Anjos, 2003; Bencostta; Campos; Júnior, 2021).

Compreendendo a História da Educação Matemática como o estudo das alterações e permanências na prática de ensino e como as diversas comunidades humanas se organizam quanto à necessidade de produzir matemática (Garnica; Anjos, 2012) surge a questão de como se produz e ensina matemática no Brasil, e especialmente no Paraná, entendido como uma comunidade que, apesar de inserida no contexto brasileiro, possui características próprias. Tal entendimento deve, antes, ser contextualizado quanto à realidade maior em que se insere: a brasileira e a internacional. O estudo de tal contexto é o objeto principal desse trabalho.

Por se tratar da etapa inicial deste projeto, optou-se por um estudo bibliográfico, que é “um tipo específico de pesquisa documental, que envolve especialmente documentos como artigos científicos, dissertações, teses, capítulos e livros” (Mattar, 2021, p.127), optando-se inicialmente por referências nacionais reconhecidas na área da Educação Matemática.

A preocupação como ensino de matemática está presente desde a Grécia Antiga, mas abre-se como uma nova área de pesquisa a partir dos trabalhos de John Dewey (1859-1952) (Miguel; Garnica; Iglori; D’Ambrósio, 2004). Desde sua criação, até a sua aceitação pela comunidade científica, a Educação Matemática

---

\* Voluntário do Programa de iniciação científica PROVIC da UEPG.

compreendida como uma subárea da matemática e da educação de natureza interdisciplinar passou por um processo histórico riquíssimo.

Entre o final do século XIX e início do século XX, a matemática começou um processo de renovação global, liderado pelo matemático alemão Felix Klein (1849-1925) que se insere no contexto de grande pesquisa em educação a partir das mudanças sociais do novo século e, com criação da Comissão Internacional de Instrução Matemática em 1908, os pesquisadores em educação matemática iniciam a busca por um espaço adequado à nova área (Miguel; Garnica; Iglori; D'Ambrósio, 2004; Fiorentini; Lorenzato, 2006).

Apesar de haver nos Estados Unidos algumas associações de matemática com preocupação em educação, os professores de matemática envolvidos com a educação pré-universitária encontravam pouco respaldo nessas instituições, o que levou a fundação do *National Council of Teachers of Mathematics*, instituição que viria desempenhar um papel importantíssimo para pesquisa em Educação Matemática nos anos futuros (Miguel; Garnica; Iglori; D'Ambrósio, 2004).

A partir da Guerra fria e da constatação de um descompasso entre a matemática escolar e o progresso científico surgiu o Movimento da Matemática Moderna, entre 1950 e 1960, que seria responsável por um salto de pesquisa em nível global, e foi também nesse contexto que a pesquisa em Educação Matemática surgiu no Brasil (Fiorentini; Lorenzato, 2006).

O desenvolvimento da EM no Brasil passou por quatro fases distintas: a gestação da EM como campo profissional e científico (anterior à 1970), o Nascimento da EM (entre 1970 e 1980), emergência de uma comunidade de educadores matemáticos (década de 1980) e a emergência de uma comunidade científica em EM (anos de 1990) (Fiorentini; Lorenzato, 2006).

A primeira fase era focada no ensino primário e a preocupação dos professores era a orientação didático-metodológica e o compêndio de materiais didáticos para a atividade do ensino. Não havia propriamente uma pesquisa em EM.

Durante a segunda fase, destaca-se o nascimento da pesquisa em EM propriamente dita, ligada a programas de pós-graduação em educação. Os focos temáticos desses estudos foram três: desenvolvimento/testagem de métodos de ensino, exploração do currículo e estudos de natureza cognitiva.

Durante a terceira fase, destaca-se a ampliação da área de estudo da EM e o surgimento de novas questões, que foram desenvolvidas em mais de trinta programas de pós-graduação existentes no Brasil, dentre os quais se destaca o Programa de Mestrado em educação da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

A quarta fase foi marcada pela consolidação das linhas de pesquisa em EM, pela formação de diversos grupos de pesquisa e pela expansão dos programas de pós-graduação. Nesse período, a EM foi reconhecida pela Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa com a criação de um Grupo de Trabalho em Educação Matemática (Fiorentini; Lorenzato, 2006).

Ao se iniciar por literaturas que buscam descrever o início da EM em termos mundiais, tem-se em mente compreender minimamente o cenário nacional, para então compreender e recuperar a riqueza de detalhes e particularidades deste início

no Paraná e na UFPR, que além das influências da própria área, recebe influências da organização e políticas da pós-graduação, da própria instituição que se insere e dos sujeitos participantes.

### Referências:

[1] ANJOS, L. dos; BUFREM, I. S. 25 anos do programa de pós-graduação em educação da UFPR. **Educar**, Curitiba, n. 22, p. 377-398. 2003. Editora UFPR. Disponível em: <http://educa.fcc.org.br/pdf/er/n22/n22a17.pdf>. Acesso em: 02 set. 2024.

[2] BENCOSTTA, M. L.; CAMPOS, M. A.T.; JÚNIOR, C. de S. História e memória do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná (1975-2020). **Educar em Revista**, Curitiba, v. 37, e80175, 2021. Disponível em: <https://revistas.ufpr.br/educar/article/view/80175>. Acesso em: 9 maio 2024.

[3] FIORENTINI, D; LORENZATO S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

[4] GARNICA, A. V. M.; SOUZA, L. A. P. **Elementos da História da Educação Matemática**. São Paulo: Editora Cultura Acadêmica, 2012. 484 p. Disponível em: <https://acervo-digital.espm.br/E-BOOKS/Acesso%20restrito/326449.pdf>. Acesso em: 26 ago. 2024.

[5] MATTAR, J.; RAMOS, D. K. **Metodologia da pesquisa em educação: abordagem qualitativas, quantitativas e mistas**. São Paulo: Edições 70, 2021.

[6] MIGUEL, A.; GARNICA, A. V. M.; IGLIORI, S. B. C.; D'AMBRÓSIO, U. A. educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. **Revista Brasileira de educação**, [internet], n. 27, p. 70-210, set./dez. 2004. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/qHhNhYPrDsjNSbGwhWHKPywt/?format=pdf>. Acesso em: 03 set. 2024.

# Topologia na Educação Básica: o que isso tem a ver com a Formação de Professores?

Natalia Chicora<sup>1\*</sup>

*nataliachicora@gmail.com*<sup>1</sup>

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)

*gabriel.santos22@gmail.com*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** Formação de Professores, Topologia Geral, Livros Didáticos.

## Resumo:

Este trabalho tem como objetivo investigar as relações existentes entre a formação de professores de matemática e o estudo de topologia geral, explorando como esses conceitos podem ser integrados na prática pedagógica de um professor reflexivo. A relevância dessa investigação é destacada pela necessidade de uma formação docente que vá além do domínio técnico, promovendo uma reflexão crítica e contínua, conforme discutido por Schön (2014).

Schön (2014) argumenta que as reformas educacionais frequentemente reforçam práticas superficiais e desconectadas da realidade escolar, resultando em um ciclo vicioso de cumprimento de normas. Além disso, destaca a importância da reflexão na ação e da reflexão sobre a ação como componentes essenciais da prática reflexiva dos professores. O autor sugere que os professores devem ser capazes de questionar suas próprias suposições, experimentar novas abordagens e aprender com suas experiências para melhorar continuamente sua prática.

Através da **reflexão-na-ação** (*sic*), um professor poderá entender a compreensão figurativa que um aluno traz para a escola, compreensão que está muitas vezes subjacente às suas confusões e mal-entendidos em relação ao saber escolar. Quando um professor auxilia uma criança a coordenar as representações figurativas e formais, não deve considerar a passagem do figurativo para o formal como um “*progresso*”. Pelo contrário, deve ajudar a criança a associar estas diferentes estratégias de representação. (Schön, 2014, p. 4)

Schön também observa que “o desenvolvimento de uma prática reflexiva eficaz tem que integrar o contexto institucional (Schön, 2014, p. 6)”, ressaltando a importância de criar ambientes de aprendizagem que incentivem a reflexão tanto dos alunos quanto dos próprios professores.

---

<sup>1\*</sup> Voluntária do Programa de Voluntariado Acadêmico (PVA).

Giraldo (2018), por sua vez, critica a desconexão entre a matemática escolar e a acadêmica, apontando que a formação dos professores não deve se basear apenas no domínio do conteúdo, mas também na compreensão dos processos sociais e históricos que moldam o ensino da matemática.

Ele destaca a importância de uma abordagem que não subordine a matemática escolar à acadêmica, mas que reconheça os saberes específicos necessários para o ensino da disciplina. Segundo Giraldo (2018),

A construção de currículos de cursos de licenciatura em matemática não pode deixar de levar em conta resultados de pesquisa, como os citados anteriormente – e envolve a reflexão sobre questões muito mais básicas, tais como para que escola se pretende formar professores, o que tem sido e o que pode ser essa escola. (Giraldo 2018, p. 2)

Isso sugere que os currículos devem ser desenhados para formar professores preparados para uma escola atual, que responda às transformações sociais e culturais em curso. Tendo em vista essa formação de professores e buscando a prática pedagógica de um professor reflexivo, buscamos investigar relações entre conceitos/noções topológicas e a formação de professores que ensinam matemática.

Esta pesquisa é qualitativa e de cunho interpretativo, buscando compreender como conceitos de topologia podem ser abordados na formação docente. Em 17 de março de 2024, foi realizada uma busca nos portais Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), Catálogo de teses e dissertações da CAPES e Portal de Periódicos da CAPES, utilizando os termos "topologia" e "formação de professores".

Foram encontrados 16 artigos na BDTD, 27 no Catálogo da CAPES, e nenhuma publicação no Portal de Periódicos. Seis teses e dissertações foram selecionadas para análise, sendo três da BDTD e três do Catálogo da CAPES. Tal seleção ocorreu porque esses trabalhos abordam os conteúdos de interesse da pesquisa, tais como educação matemática, formação de professores e noções e conceitos topológicos. A ausência de publicações no Portal de Periódicos e a divergência dos temas nas demais teses e dissertações justificam a escolha dos documentos analisados.

A dissertação de Yasmim Barbosa Cavalheiro (Cavalheiro, 2021) destacou-se entre os trabalhos encontrados por utilizar análise de livros didáticos, entrevistas com professoras e explorar como o Movimento da Matemática Moderna (MMM) reformulou os currículos de Matemática nas escolas. Tal dissertação levou a buscarmos assuntos relacionados à topologia geral em coleções de livros didáticos atuais.

A análise dos livros didáticos selecionados, que incluem a Coleção Ápis para o Ensino Fundamental - Anos Iniciais (Dante, 2017), a Coleção SuperAÇÃO para o Ensino Fundamental - Anos Finais (Teixeira, 2022), e a Coleção Contextos&Aplicações para o Ensino Médio (Dante, 2013), revelou que as noções topológicas estão mais presentes nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

No Ensino Fundamental - Anos Iniciais, os livros analisados mostraram uma progressão na complexidade dos conceitos e noções topológicas. No 1º ano, por exemplo, foram identificadas noções de proximidade, separação e ordenação. Essas noções são aprofundadas com a introdução de conceitos, como continuidade e interior/exterior. Já no 5º ano, há menções a simetrias geométricas e ao Teorema das Quatro Cores, que têm suas raízes na topologia algébrica.

No Ensino Fundamental - Anos Finais, conceitos como linhas poligonais, convexidade, transformações geométricas como simetrias, rotações e translações são explorados em maior profundidade, aproximando-se dos conceitos topológicos de continuidade e homeomorfismo.

Já a análise dos materiais utilizados no Ensino Médio revelou que a presença de noções topológicas é mais reduzida, concentrando-se principalmente em tópicos como conjuntos e definições, intervalos reais e algumas referências à geometria algébrica, como a relação de Euler.

Conclui-se que a topologia é um tema presente nos estudos da Educação Básica e possui relevância significativa para a formação de professores, ao menos do ponto de vista de livros didáticos das coleções analisadas. A presença desses conceitos no currículo escolar justifica o desenvolvimento de futuras pesquisas que aprofundem a exploração desses temas, visando uma formação docente mais completa e reflexiva.

#### **Referências:**

- [1] CAVALHEIRO, Y. B. **COMPREENSÕES E USOS DAS NOÇÕES TOPOLÓGICAS DURANTE O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA.** Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.
- [2] GIRALDO, V. **Formação de professores de matemática:** para uma abordagem problematizada. Educação Matemática em Revista, v. 23, n. 56, p. 45-60, 2018.
- [3] SCHÖN, D. A. **Como os profissionais pensam na ação.** Porto Alegre: Artmed, 2014.
- [4] DANTE, L. R. **Ápis Matemática:** Ensino Fundamental - Anos Iniciais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017.
- [6] TEIXEIRA, L. A. **SuperAÇÃO Matemática:** Ensino Fundamental - Anos Finais. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2022.
- [7] DANTE, L. R. **Contextos&Aplicações:** Ensino Médio - volume único. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

# Criando formas geométricas com couro do peixe: Uma matemática aplicada ao meio ambiente

Patricia Alves da Cruz\*  
*patricia.alves.cruz@hotmail.com*<sup>1</sup>

Patrícia Vieira Alves+  
*patricinha.v.alves@gmail.com*<sup>2</sup>

Solange Maria Gomes dos Santos (Orientadora)  
*solange.santos@unespar.edu.br*

Licéia Alves Pires (Coorientadora)  
*liceia.pires@unespar.edu.br*

Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

**Palavras-chave:** Couro do Peixe, Geometria, Meio Ambiente.

## **Resumo:**

Nos últimos anos, temos observado uma preocupação crescente em relação ao impacto ambiental e a busca por soluções sustentáveis para a gestão de resíduos.

Entre os diversos tipos de resíduos, um que merece destaque são aqueles gerados pela pesca, nesse caso em especial, o couro do peixe. Esses materiais, se não forem devidamente reaproveitados, podem causar sérios problemas ambientais.

No litoral do Paraná, existe a Associação dos Curtidores Artesanais de Pele de Peixe, de Pontal do Paraná, que realiza um trabalho incrível, transformando a pele de peixe em couro e transformando o couro em artesanato. No entanto, a Associação enfrenta um desafio: o couro que não está em condições adequadas para comercialização ainda precisa de um destino apropriado.

É nesse contexto que surge este projeto de extensão, desenvolvido na disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática I, do curso de Licenciatura em Matemática, a partir de uma demanda trazida pela Associação de Curtidores, que procurou a Universidade para solicitar auxílio com o descarte de couro de peixes. O objetivo principal é reaproveitar esse couro de peixe descartado, utilizando-o em atividades de ensino de geometria.

Nesse sentido, com base nos princípios das Diretrizes e Bases da Educação Nacional, o projeto propõe uma abordagem prática e lúdica para o ensino da matemática, contextualizando os conteúdos geométricos com a realidade local. Além de contribuir para a formação dos acadêmicos envolvidos, o projeto busca

---

\* Licencianda em Matemática - Unespar

+ Licencianda em matemática - Unespar

conscientizar os alunos do Colégio Estadual Cidália Rebello Gomes Ensino Fundamental e Médio, localizado na Ilha de Valadares, sobre o papel da matemática na solução de problemas ambientais. A aplicação se dará por meio da coleta de dados, visitas à Associação, preparação de materiais com o couro do peixe, e aulas práticas envolvendo a confecção de mosaicos geométricos.

O projeto será executado em quatro momentos: leitura e pesquisa sobre a matemática aplicada ao meio ambiente e o curtume de pele de peixe; organização e elaboração do material a ser utilizado nas aulas; aplicação das atividades no colégio; e exposição dos resultados na Feira das Profissões e em eventos locais. Espera-se, ao final, contribuir para o diálogo entre a universidade e a comunidade, socializando o conhecimento produzido e incentivando soluções inovadoras para problemas ambientais. Até o momento, mês de setembro de 2024, o projeto de extensão avançou significativamente, com a conclusão das atividades planejadas para o primeiro e segundo momentos.

Na primeira etapa, já foram realizados estudos sobre a aplicação da matemática na preservação do meio ambiente e o processo de curtimento da pele de peixe. Também foram realizadas visitas a Associação, que fica em Pontal do Paraná e à Ilha de Valadares localizada em Paranaguá com o objetivo de compreender a forma de trabalho da Associação e as características geográficas, econômicas e culturais, da Ilha.

Na visita à Associação dos Curtidores Artesanais de Pele de Peixe de Pontal do Paraná, foram observados os processos de transformação do couro de peixe para a comercialização e o uso em artesanato. Também foi realizada uma visita ao Colégio Estadual Cidália Rebello Gomes, localizado na Ilha dos Valadares, onde o projeto será aplicado, para alinhar as ações com a equipe pedagógica e compreender o ambiente escolar.

No segundo momento, o projeto está focado na organização e preparação dos materiais que serão utilizados nas aulas práticas, neste contexto, acadêmicos do 3º ano de Matemática, estão elaborando atividades de Geometria Plana e Espacial que utilizam o couro de peixe descartado.

Vale ressaltar que, a produção dos mosaicos geométricos foi planejada, levando em consideração tanto os aspectos técnicos quanto a dimensão ambiental e cultural do projeto. Estamos prontos para iniciar a aplicação das aulas no colégio, com o material e as atividades devidamente preparados, alinhando o conteúdo matemático à realidade local e ao contexto ambiental.

A aplicação do projeto reforça a relevância de utilizar o couro de peixe descartado como recurso pedagógico nas aulas de Geometria Plana e Espacial, unindo ensino e conscientização ambiental. Ao promover atividades práticas em uma comunidade insular de Paranaguá, o projeto não apenas contribui para o aprendizado matemático, mas também incentiva uma visão crítica sobre a gestão de resíduos e a sustentabilidade.

Sendo assim, a parceria com a Associação dos Curtidores Artesanais de Pele de Peixe e a comunidade local demonstra a eficácia das ações extensionistas na

aplicação do conhecimento acadêmico em problemas reais, fortalecendo o vínculo entre a universidade e a sociedade.

#### **Referências:**

[1] BRITTO, R. R.; KISTEMANN JR., M. A.; da SILVA, A. M. Sobre recursos e estratégias em educação financeira. **Jornal Internacional De Estudos em Educação Matemática**, v. 7 n. 1 (2014). Disponível em: <https://jjeem.pgskroton.com.br/article/view/90>. Acesso em 17 de mai. 2024. <https://doi.org/10.17921/2176-5634.2014v7n1p%p>

[2] MINAYO, M. C. O desafio da pesquisa social. In: Minayo, M. C. (Org.). **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. Rio de Janeiro, RJ: Vozes, 2009.

[3] ROOS, A.; BECKER, E. L. S. **Educação ambiental e sustentabilidade**. Revista Eletrônica em Gestão, Educação e Tecnologia Ambiental. Santa Maria, v. 5, n. 5, p. 857-866, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/reget/article>. Acesso em 15 de abril. 2024.

# Inclusão digital e ensino da matemática no contexto das instituições públicas da educação básica do litoral do Paraná.

Patricia Alves da Cruz\*  
*patricia.alves.cruz@hotmail.com*<sup>1</sup>

Patrícia Vieira Alves+  
*Patriciavieira.matematica@outlook.com*<sup>2</sup>

Edison Vieira de Souza (Orientador(a))  
*prof.edison.unespar@outlook.com*<sup>3</sup>

Licéia Alves Pires (Coorientador(a))  
*liceia.pires@unespar.edu.br*<sup>4</sup>

Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR

**Palavras-chave:** Inclusão digital, ensino de matemática, projeto de extensão.

## Resumo:

O Projeto de Extensão Universitária "Inclusão Digital e Ensino de Matemática no Contexto das Instituições Públicas da Educação Básica do Litoral do Paraná" que se efetivou no ano de 2023, visou fortalecer a formação crítica dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UNESPAR, integrando o saber científico e popular. Teve como objetivo promover a inclusão digital nas escolas públicas da região, utilizando *software* livre como ferramenta pedagógica no ensino de Matemática. A proposta reconheceu a importância das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TICs) no contexto educacional e buscou mitigar os efeitos da exclusão digital, que contribui para a desigualdade social. Nesse contexto o Tangram foi utilizado como material lúdico, tanto físico, quanto digital, através do *software* livre Geogebra, permitindo que os estudantes manipulassem as formas fisicamente e explorassem digitalmente não somente as formas, como as ferramentas tecnológicas associadas ao conceito matemático.

As etapas do projeto incluíram pesquisas bibliográficas e documentais para identificar softwares livres aplicáveis ao ensino da Matemática. Após a seleção e análise desses recursos, firmaram-se parcerias com três escolas estaduais em Paranaguá para organizar seminários acadêmicos com professores, alunos,

---

\* Bolsista/Voluntário do Programa de... nome ou sigla: Iniciação Científica/ PET-Matemática/ PIBID/ PICME ou outro programa.

+ Bolsista/Voluntário do...

coordenadores e diretores, onde se discutiu a inclusão digital por meio do uso de *software* livre.

Nesse contexto, os acadêmicos, em colaboração com os professores, escolheram alguns *softwares* livres para serem utilizados em sala de aula como uma forma de revisar o conteúdo pertinente. O Tangram foi selecionado para revisar as formas geométricas, sendo utilizado tanto de forma manual quanto digital, através do Geogebra, com alunos do 6º ano do ensino fundamental. Vale ressaltar que as escolas disponibilizaram seus laboratórios de informática e *tablets* para a oficina, demonstrando que a inclusão digital está gradualmente se consolidando.

Após a oficina, foram aplicados questionários para avaliar o impacto do projeto, cujas conclusões contribuíram para a elaboração do relatório final e a consolidação das aprendizagens dos participantes. A proposta buscou não apenas ampliar o conhecimento acadêmico, mas também promover a democratização dos saberes científicos e tecnológicos, colaborando para a transformação social e a melhoria da qualidade de vida das comunidades envolvidas.

As atividades desenvolvidas evidenciaram o potencial das ferramentas digitais em tornar o aprendizado mais interativo e acessível, reafirmando a importância da inclusão digital nas escolas como forma de reduzir a exclusão social. A curiosidade e o engajamento dos alunos confirmaram que a matemática, ensinada de forma inovadora e alinhada às novas tecnologias, pode ser mais atrativa. A escolha do Geogebra, aliado ao Tangram, demonstrou ser uma atividade que pode ser eficaz para promover a inclusão digital e aprimorar a aprendizagem de conceitos geométricos.

Além disso, o projeto reforçou o papel fundamental da universidade como agente de transformação social, ao estabelecer uma ponte entre o saber acadêmico e a comunidade. A iniciativa não só contribuiu para a formação crítica e cidadã dos acadêmicos envolvidos, como também pode-se notar alguns impactos positivos na comunidade local, como o despertar do interesse no tema proposto. Observou-se que os alunos entenderam na prática os conceitos de inclusão e exclusão digital, relacionando-os com situações cotidianas, como a falta de conectividade em suas famílias.

Em resumo, por meio do projeto foi possível verificar que a integração entre tecnologias digitais e práticas pedagógicas tradicionais no ensino da Matemática pode ser uma estratégia eficaz para promover a inclusão digital, melhorar a qualidade da educação. Ao utilizar ferramentas como o Tangram e o Geogebra, o projeto possibilitou que os estudantes não apenas compreendessem conceitos geométricos de forma lúdica e interativa, mas também desenvolvessem habilidades tecnológicas fundamentais para a redução da exclusão digital.

## Referências:

- [1] BLIP. **Tecnologia e software** [recurso eletrônico]. Disponível em: <https://www.blip.ai/blog/tecnologia/software/>. Acesso em: 05 ago. 2024.

- [2] GEOGEBRA. **Tangram** [recurso eletrônico]. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/ycuwva2b>. Acesso em: 22 jul. 2024.
- [3] FAGUNDES, E. **Linux e Software Livre** [recurso eletrônico]. Disponível em: <https://efagundes.com/artigos/linux-e-software-livre/>. Acesso em: 14 ago. 2024.
- [4] LEITURINHA. **Conheça a história do Tangram e confira 9 imagens para inspirar a criatividade das crianças** [recurso eletrônico]. Disponível em: <https://leiturinha.com.br/blog/conheca-a-historia-do-tangram-e-confira-9-imagens-para>. Acesso em: 08 jun. 2024.
- [5] NUNES, C. B. **A Informática na Educação: conceitos e aplicações**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2006. Disponível em: [https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=YRy1IKnniEC&oi=fnd&pg=PA13&dq=related:kil1dNmKgSkJ:scholar.google.com/&ots=zbd13sDb9d&sig=rbRuyiGWO4p4RFFs\\_NswaG\\_5aa4#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=YRy1IKnniEC&oi=fnd&pg=PA13&dq=related:kil1dNmKgSkJ:scholar.google.com/&ots=zbd13sDb9d&sig=rbRuyiGWO4p4RFFs_NswaG_5aa4#v=onepage&q&f=false). Acesso em: 23 jul. 2024.
- [6] PISCHETOLA, M. **Inclusão digital e educação: a nova cultura da sala de aula**. 1. ed. São Paulo: Vozes, 2016. E-book. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Acesso em: 09 ago. 2024.
- [7] VERASZTO, E. V.; SILVA, D. da; MIRANDA, N. A. de; SIMON, F. O. Tecnologia: buscando uma definição para o conceito [recurso eletrônico]. **Revista Prisma.com**, 2008, n. 7. ISSN: 1646-3153. Revista da Faculdade de Letras da Universidade do Porto, Portugal. Disponível em: <https://ojs.letras.up.pt/index.php/prisma.com/article/view/2065/1901>. Acesso em: 14 ago. 2024.

# Jogos de Matemática na terceira idade: estimulando a memória e o raciocínio

Patrícia Alves da Cruz<sup>1\*</sup>  
*patricia.alves.cruz@hotmail.com*<sup>1</sup>

Patrícia Vieira Alves<sup>2+</sup>  
*patricinha.v.alves@gmail.com*<sup>2</sup>

Alexsandra Camara (Orientador(a))  
*Alexsandracamara1108@gmail.com*<sup>3</sup>

Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

**Palavras-chave:** Jogos, matemática, terceira idade.

## **Resumo:**

O considerável aumento da população idosa tem provocado preocupação no que se refere à qualidade de vida destas pessoas, fato que mostra a educação como uma forma de auxílio para com esta demanda da sociedade. São muitas as possibilidades educativas que podem auxiliar na resolução deste problema, sendo a Matemática, através da prática de jogos, uma maneira de contribuir no progresso do raciocínio lógico – um dos elementos essenciais para a estruturação e manutenção da memória. Assim, o presente projeto de extensão teve como proposta a realização de oficinas de jogos que envolviam o pensamento lógico-matemático dos integrantes da Universidade Aberta à Terceira Idade (UNATI) de Paranaguá, promovendo a integração entre universidade e comunidade através da articulação entre ensino, pesquisa e extensão, proporcionando envolvimento de docentes, estudantes, funcionários e da comunidade externa, no que se refere às pessoas da terceira idade.

O objetivo geral do projeto foi promover ações integradas entre os estudantes da disciplina de Metodologia de Pesquisa do curso de Licenciatura em Matemática e o público da Universidade Aberta à Terceira Idade (UNATI), por meio de situações em contextos de jogos de Matemática, a fim de ampliar seus conhecimentos e experiências relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem da área.

O projeto foi realizado em várias etapas, começando com a leitura e discussão de textos sobre as necessidades dos idosos e uma reunião com a coordenação da UNATI para conhecer melhor o contexto do projeto. Em seguida, os estudantes leram e discutiram artigos sobre o uso de jogos no ensino de Matemática e sua aplicação com

---

<sup>1\*</sup> Licencianda do Curso de Matemática – Unespar Paranaguá – Executora do Projeto.

<sup>2+</sup> Licencianda do Curso de Matemática – Unespar Paranaguá – Executora do Projeto.

idosos, escolhendo jogos como Torre de Hanoi, Tangram, Sudoku e Bingo Matemático, e construindo-os com materiais recicláveis para uso nas oficinas.

Após a realização das partes teóricas, organização dos materiais e metodologia, as oficinas foram realizadas; como as aulas dos alunos da UNATI acontecem na faculdade, optou-se por realizar no mesmo local, para que não atrapalhasse ainda mais a rotina do público a ser atendido. As salas foram preparadas de modo acessíveis aos jogos e de fácil participação de todos, a timidez foi deixada de lado, tanto pelos acadêmicos, que realizavam algo diferente e inovador, quanto pelos idosos que experimentavam uma nova forma de praticar a matemática.

Nesse sentido, as oficinas foram conduzidas de forma a facilitar a compreensão e interação dos idosos. No Bingo Matemático, além de promover alegria e convívio social, o jogo exigiu atenção e coordenação motora. Para a oficina do Sudoku, foram utilizados jogos de diferentes níveis de dificuldade, permitindo uma participação gradual e satisfatória dos idosos. Jogos de memória estimularam a capacidade de raciocínio e a manutenção da memória ativa.



Bingo



Sudoku

No Tangram, várias funções cognitivas foram desenvolvidas, como orientação espacial, coordenação visual e motora, atenção, planejamento, raciocínio lógico-espacial e memória visual, além de promover socialização e melhorar a autoestima dos participantes. Já na oficina da Torre de Hanoi, geralmente um jogo individual, foi jogada em duplas ou grupos para enfatizar a interação social e o raciocínio lógico.



Tangram



Torre de Hanoi

Ao final das oficinas, foram realizadas entrevistas com os participantes, e o *feedback* foi muito positivo, a maioria destacou não conhecer a Torre de Hanoi, e foi denominado o jogo mais difícil, já o Sudoku, um pouco mais familiar por ser encontrado em livros de palavras cruzadas.

No relato da Sra. Paulina, pedagoga aposentada, quando lhe foi perguntado se as oficinas trouxeram algo novo para você, algo que você não conhecia? sua resposta foi: “Sim, eu não conhecia assim, não conhecia desse jeito fácil, eu sou formada, eu sou pedagoga, eu não vivi isso, mas eu achei bastante interessante porque olha, eu estou levando e eu vou brincar com a minha neta (se refere a lembrancinha do Tangram).

A produção de jogos permitiu aos futuros professores entender as contribuições desses jogos para o desenvolvimento cognitivo e social dos idosos, criando um ambiente lúdico e divertido. A construção com materiais recicláveis e versões online também desenvolveu competências tecnológicas e inovadoras essenciais para os formandos.

#### **Referências:**

- [1] CARVALHO, Noeme Cristina. **Dinâmicas para Idosos**. Petrópolis-RJ . Ed. Vozes. 2009.
- CACHIONI, M. & Neri, A. L. (2004). **Educação e Velhice bem-sucedida no contexto da terceira idade**. In: NERI, A. L. & YASSUDA, N. S. (Orgs). Velhice bem sucedida: aspectos afetivos e cognitivos. Campinas: Papyrus, p.29-49, 2004.
- [2] D’AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática – elo entre tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- [3] IBGE. **Censo Demográfico: Características da população e dos domicílios**. Rio de Janeiro: IBGE, 2022.
- [4] LIMA, L. F. de; PENTEADO, M. G.. Conversas sobre Matemática com pessoas na Terceira Idade. **Actas del VII CIBEM**, 2013.
- [5] NETTO, Francisco Luiz de Marchi. Aspectos Biológicos e Fisiológicos do Envelhecimento Humano e suas Implicações na Saúde do Idoso. **Pensar a Prática**, Goiânia, v. 7, n. 1, p. 75–84, 2006.

# Estudo sobre o ESMATE à luz da Hermenêutica de Profundidade

Pedro Dell'Agnolo Busarello<sup>1</sup>  
*pedrodellbusa@gmail.com*<sup>2</sup>

Emerson Rolkouski (Orientador)  
*rolkouski@uol.com.br*<sup>2</sup>

<sup>2</sup>UFPR

**Palavras-chave:** Hermenêutica de Profundidade, livro didático de matemática, ESMATE.

## **Resumo:**

Este trabalho analisa o Programa ESMATE, uma política pública implementada em El Salvador com o objetivo de aprimorar o ensino de matemática no país. Este Programa, se baseia em três componentes principais: o desenvolvimento de materiais educativos, assistência prestada a docentes e tempo de aprendizagem ativo. Para conduzir essa análise, foi adotada a metodologia da Hermenêutica de Profundidade (HP), desenvolvida por John B. Thompson (1995). Essa abordagem foca nas formas simbólicas, que englobam tudo o que o ser humano produz com uma intenção específica, seja em termos de cultura, linguagem ou artefatos sociais.

A Hermenêutica de Profundidade se divide em três fases distintas. Na primeira fase, chamada de análise sócio-histórica, busca-se reconstruir o contexto social e histórico em que o objeto de estudo foi produzido, circulado e recebido. Esse passo é essencial para compreender as influências e as condições que moldaram o desenvolvimento do ESMATE.

Na segunda fase, a análise formal, o foco se volta para o estudo detalhado do objeto em si, para isso buscamos informações sobre o ESMATE no trabalho Projeto de Melhoria da Aprendizagem de Matemática na Educação Básica e Média (ESMATE) em El Salvador (Madrid, 2024), o qual buscou sistematizar o programa. Nesse estágio o programa é examinado em termos de sua estrutura interna, buscando-se entender sua lógica e organização como uma forma simbólica.

A terceira fase, referida como reinterpretação, integra as análises sócio-histórica e formal. Aqui, o objetivo é relacionar os contextos e elementos identificados nas fases anteriores para construir um significado mais profundo e abrangente do ESMATE, considerando tanto suas implicações práticas quanto simbólicas.

A pesquisa foi inspirada por trabalhos que também utilizaram a Hermenêutica de Profundidade como metodologia, dois dos quais comento a seguir: Lopes (2021), que desenvolveu um trabalho sobre um programa de formação de professores, produzido em 2001 no Estado do Paraná, este programa se chamava Matemática Aplicada e foi contratado e desenvolvido pelo Colégio Bom Jesus em parceria com o

---

<sup>1</sup> Bolsista do Programa PET - Matemática.

CORD (Center for Occupational Research and Development) dos EUA; e Azevedo (2017) que analisou livros didáticos de Matemática, parte da coleção “EJA Mundo do Trabalho”; ambos proporcionaram uma base sólida para nossa pesquisa.

Com estas referências, entendemos as potencialidades e diferentes perspectivas oferecidas pela HP, de tal forma que traçamos um panorama das características espaciais e temporais de El Salvador, juntamente com uma investigação sobre as instituições sociais que influenciam e são influenciadas pelo programa. Além disso, descrevemos detalhadamente o funcionamento do ESMATE, seus principais componentes, as etapas de implementação e o material didático desenvolvido por meio dessa política pública.

### **Referências:**

[1] LOPES, B. C. **Matemática aplicada CORD: Análises do programa de formação de professores do estado do Paraná**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2021

[2] AZEVEDO, D. P. de. **Uma análise de livros didáticos de Matemática da coleção “EJA-Mundo do Trabalho”**. 2017. 112 f.

[3] MADRID, J. (2024). **Projeto de Melhoria das Aprendizagens de Matemática na Educação Básica e Média (ESMATE) em El Salvador**. Escritório para a América Latina e o Caribe do IIPÉ UNESCO.

[4] THOMPSON, J. B. **Ideologia e Cultura Moderna: Teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa**. (Tradução do Grupo de Estudos sobre Ideologia, Comunicação e Representações Sociais). Petrópolis: Vozes, 1995.

# Relato de experiência: dificuldades no processo de ensino-aprendizagem causadas pela simplificação da linguagem matemática

Samara Ortiz  
*samaraeq@gmail.com<sup>1</sup>*

Prof<sup>a</sup> Rosilene Beatriz Machado (Orientadora)  
*rosibmachado@gmail.com<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Licenciatura em Matemática – UFSC

<sup>2</sup> Departamento de Metodologia de Ensino – UFSC

**Palavras-chave:** relato de experiência, linguagem matemática adequada, processo de ensino-aprendizagem.

## Resumo:

A interação entre estudante e professor deve permear o mesmo universo discursivo de modo a facilitar o processo de ensino-aprendizagem. Para que o estudante tenha acesso e compreensão do discurso matemático, é preciso que o professor não apenas conheça a linguagem matemática adequada, mas também a aplique em sala de aula, seja na introdução de novos conceitos ou durante o decorrer das aulas. Por linguagem matemática adequada, entenda-se como a linguagem matemática formalizada, a qual é organizada de acordo com as estruturas sintáticas (SILVEIRA, 2010).

Conforme aprofundamento em leituras sobre educação matemática no decorrer do curso de licenciatura em Matemática, tornou-se evidente que questões de linguagem relacionadas com o ensino e aprendizagem constituem-se como um objeto de estudo no campo de pesquisa em educação matemática.

Nestas pesquisas, relata-se que a linguagem matemática adequada, que é uma linguagem matemática formalizada e organizada de acordo com as estruturas sintáticas (SILVEIRA, 2010), atua como uma barreira no entendimento das questões a serem resolvidas, compondo pauta de discussão e problematização por diversos autores. Afinal, ao se procurar por artigos científicos sobre ensino-aprendizagem em Matemática, não são poucas as pesquisas investigativas que avaliam as dificuldades presentes no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

O objetivo deste trabalho é relatar experiências nas quais foi possível observar a existência desta barreira e discutir de modo que nos possibilite explorar as problemáticas da simplificação de vocabulário durante as aulas de matemática.

Em um cenário de atuação docente no ensino superior, percebi algumas dificuldades dos estudantes em questões referentes à chamada 'matemática básica', que contempla as quatro operações básicas e mais alguns conteúdos classificados como elementares. Eu tentava sanar as dúvidas sobre esse conteúdo, de modo que os estudantes pudessem acompanhar a disciplina em questão. Porém, percebia que

a dificuldade, muitas vezes, estava na tradução da linguagem matemática para a linguagem natural e vice-versa, ou no conhecimento do vocabulário próprio da matemática.

Enquanto professora em um cursinho pré-vestibular comunitário, alguns estudantes comentavam que minha fala era muito 'técnica' e isto dificultava o acompanhamento da disciplina. Eu não entendia o que isto significava, de início. Mas, conversa vai e conversa vem, o que eles achavam que eram termos 'técnicos' nada mais era do que a linguagem matemática adequada. Como por exemplo a propriedade distributiva da multiplicação, a qual eles conheciam por 'chuveirinho'. Ou seja, eles sabiam a aplicação da propriedade em questão, mas por ouvir a linguagem matemática que era desconhecida por eles, criava-se uma barreira, como se eu estivesse falando de um assunto diferente do que eles estavam habituados.

Já na minha atuação como bolsista no PET (Programa de Educação Tutorial) da Matemática, tive a oportunidade de ministrar um minicurso do *software* GeoGebra. Durante este minicurso, percebi que alguns participantes apresentavam dificuldades em compreender o que estava sendo solicitado nas atividades. Ao conversar individualmente, notei que termos como 'polígono regular' ou 'reta transversal' causavam olhares de dúvida. Mas, ao explicar do que se tratava, logo o semblante ficava mais leve, pois os participantes relacionavam o que eu estava explicando com algo que sabiam, mas não conheciam o vocabulário próprio.

Estes, e outros eventos similares, me causavam inquietação e angústia, pois eu vejo como o uso da simplificação de vocabulário na sala de aula pode acarretar em percepções equivocadas por parte dos estudantes, causando possíveis prejuízos no processo de ensino-aprendizagem. Deste modo, procurei por pesquisas que discutem a problemática descrita, me permitindo refletir, questionar e me atentar mais à linguagem que é utilizada em sala de aula.

Para o aprendizado de conteúdos matemáticos mais aprofundados, se faz necessário que o estudante possua domínio de conceitos matemáticos fundamentais, bem como o conhecimento do vocabulário matemático apropriado, que facilite o entendimento do significado e não apenas o ato de decorar regras (FERREIRA, 2013). Silveira (2020) cita a necessidade de que o professor utilize palavras adequadas para esclarecer o significado do que se quer transmitir, sem priorizar por um vocabulário simples. Neste contexto cito, como descrevi anteriormente, a questão da propriedade distributiva da multiplicação ser chamada por 'chuveirinho'. Entendo que tal vocabulário possa ser utilizado para ilustrar a regra, mas creio que no decorrer da fala do professor, a linguagem matemática deve ser corretamente estabelecida.

Neste sentido, Stefani e Proença (2019) discorrem sobre as dificuldades dos estudantes na resolução de problemas de geometria e apontam que os conceitos de perímetro e área não estavam claros o suficiente para serem interpretados pelos estudantes no enunciado devido aos empecilhos presentes na tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, e vice-versa. Esta tradução pode estar sendo prejudicada pela maneira como o conteúdo é abordado em sala de aula, uma vez que se tende a simplificar as palavras por acreditar que as crianças

(estudantes) não conseguem aprender palavras e conceitos complexos (DOMAN, DOMAN; 2019).

De acordo com Sadovsky (2007), a superficialidade pedagógica ao se ensinar matemática e o uso de expressões como 'vai um', 'pegar emprestado', 'passa para o outro lado', dificultam o entendimento do que estas operações, de fato, significam. Concordando com esta fala, cito uma estudante do cursinho pré-vestibular que estava angustiada com o algoritmo da soma, pois não conseguia identificar o que fazer com o 'número que está em cima', uma vez que ela havia decorado tal operação. Sadovsky (2007) observa que a falta de formalidade na linguagem matemática no ambiente escolar acarreta perdas significativas na aprendizagem de conteúdos sequenciais por falta de compreensão de conceitos elementares.

Destaco que as experiências relatadas aqui são alguns exemplos de tantas outras situações similares vivenciadas em sala de aula. As leituras realizadas sobre o tema me fazem questionar e refletir sobre a responsabilidade do professor no preparo de suas aulas bem como na fala utilizada para se comunicar com os estudantes.

Sendo assim, o que trago para a conclusão deste trabalho são questionamentos. Como podemos preparar as aulas de modo que a linguagem utilizada seja acessível aos estudantes mas sem perder as características da linguagem matemática adequada? Como podemos, atuando em outras esferas da educação que não a dos primeiros anos do Ensino Fundamental, preencher as colunas do vocabulário faltante sem prejudicar o aprofundamento no conteúdo proposto?

#### Referências:

DOMAN, Glenn; DOMAN, Janet. **Como ensinar matemática ao seu bebê: a suave revolução**. Tradução: Thaisa V. Mendes. – São Paulo: Madras Editora, ISBN 978-85-370-1163-8, 2019.

FERREIRA, Camila Vieira. **Um estudo sobre as dificuldades dos alunos de 7º ano para compreender as quatro operações**. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 34 folhas, 2013.

SADOVSKY, Patricia. **Falta Fundamentação Didática no Ensino da Matemática**. *Nova Escola*. São Paulo, Ed. Abril, Jan./Fev. 2007.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Linguagem matemática e comunicação: um enfoque interdisciplinar**. *Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, v. 6, n. 12, 2010.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **A ênfase da linguagem na educação matemática: das palavras incertas às palavras com sentido**. *RenCiMa - Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v. 11, n.1, p. 1-12, 2020.

STEFANI, Amanda; PROENÇA, Marcelo Carlos de. **Análise das dificuldades de alunos dos anos finais do ensino fundamental na resolução de problemas de perímetro e área**. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, Campo Mourão/PR, v. 8, n. 16, páginas 97-118, 2019. Disponível em: <http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/606/503>. Acesso em: 29 ago. 2021.

# Mapeamento de provas e cadernos de prova no repositório institucional da UFSC

Sibeli da Rosa Da Rocha<sup>1</sup>  
sibarocha02@gmail.com<sup>1</sup>

Gabriel dos Santos e Silva (Orientador)  
gabriel.santos22@gmail.com<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** Mapeamento, Provas, Caderno de Provas.

## **Resumo:**

O Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática (GHEMAT - Brasil) foi fundado em 2018 com o propósito de promover e desenvolver pesquisas na temática da História da Educação Matemática no Brasil, buscando compreender a evolução histórica do Ensino e da Aprendizagem da Matemática ao analisar aspectos como currículos, métodos de ensino, livros didáticos, políticas educacionais e a formação de professores. Apesar da sua origem poder ser considerada recente, o surgimento do grupo se deu pela necessidade de institucionalizar uma rede de projetos coletivos de pesquisas no âmbito da História da Educação da Matemática que já vinham sendo realizados desde 2004 por diferentes grupos de estudo e pesquisa de diversas universidades brasileiras e que desde o início já promoviam encontros nacionais e internacionais para debater o tema estudado. O GHEMAT - Brasil se divide em alguns subgrupos tais como GHEMAT - SC, GHEMAT - UFJF, GHEMAT - DF, GHEMAT - SE, entre outros, além de trabalhar em colaboração com outros grupos independentes que também atuam na área da História da Educação Matemática.

O GHEMAT possui um Repositório de Conteúdo Digital (RCD) que está disponível no Repositório Institucional (RI) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), visando permitir o acesso a um espaço público de divulgação de fontes digitalizadas pelos pesquisadores do grupo de diferentes estados brasileiros. O RCD funciona como uma comunidade pública dentro do RI da UFSC com subcomunidades e coleções. Por sua vez, o Repositório Institucional da UFSC tem como missão o armazenamento, a preservação e a divulgação do acesso à produções científicas de forma permanente em um único local virtual.

A princípio, o objetivo deste trabalho era realizar um levantamento de provas e cadernos de provas disponibilizados pelo GHEMAT, para isso seriam usados as coleções “Cadernos Escolares” e “Provas - Exames - Avaliações” do RDC. Porém, visto que o Repositório de Conteúdo Digital do GHEMAT está contido no Repositório

---

<sup>1</sup> Voluntária de Iniciação Científica do Programa de Voluntariado Acadêmico

Institucional da UFSC, esperava-se que ao ampliar a busca para o RI fossem levantados todos os arquivos de provas e cadernos de provas. Dessa forma a busca teria início pela palavra-chave “caderno escolar”, uma vez que existe uma coleção do GHEMAT com esse nome. Todavia, já no estágio inicial do levantamento notou-se que não seria possível coletar todos os arquivos de provas e cadernos de provas por esse método visto que dentro da coleção “Cadernos Escolares” há cadernos com o nome de áreas da matemática, tais como “caderno de trigonometria”, “caderno de aritmética”, entre outros que não aparecem na busca da palavra-chave “caderno escolar” no Repositório Institucional da UFSC.

Defronte a esse imprevisto, optou-se por dividir o levantamento em duas partes. A primeira parte do levantamento foi realizada por meio da busca de cinco palavras-chaves, sendo estas: “caderno de prova”, “livro de prova”, “prova de matemática”, “caderno de matemática” e “caderno escolar” no Repositório Institucional da UFSC. Enquanto, a segunda parte do levantamento ocorreu por meio do mapeamento das coleções “Cadernos Escolares” e “Provas - Exames - Avaliações” do Repositório de Conteúdo Digital do GHEMAT. Portanto, o objetivo deste trabalho passou a ser construir um inventário de provas e cadernos de provas disponíveis no Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina com a justificativa de construir uma base de dados para trabalhos futuros.

Na primeira parte do levantamento foram encontrados 18 resultados para a palavra-chave “caderno de prova” (no dia 07/04/2024), nenhum resultado para “livro de prova” (no dia 10/04/2024), 125 resultados para “caderno de matemática” (no dia 15/04/2024), 127 resultados para “caderno escolar” (no dia 15/04/2024) e 100 resultados para “prova de matemática” (no dia 26/04/2024). Já na segunda parte do levantamento, foram encontrados 375 resultados na coleção “Cadernos Escolares” e 151 resultados na coleção “Provas - Exames - Avaliações”. Cabe destacar que já era esperado que alguns resultados encontrados na primeira parte do levantamento também fossem encontrados na segunda parte, visto que o RDC está contido no RI da UFSC. Dentre os resultados foram encontrados cadernos escolares, provas resolvidas sem nota, provas resolvidas com nota, provas sem resolução, cadernos e livros do professor, folhas de atividades, livro didático, artigos, documentos, trabalhos de conclusão de curso (TCC), dissertações e teses, alguns de Matemática e outros de disciplinas como Geografia, Física, Química, Música, Arte, etc. Os resultados serão separados por estado, década, série ou ano e autor.

Por fim, uma classificação que está sendo feita durante o levantamento é se o arquivo, seja caderno escolar, caderno de prova, prova ou outro, tem ou não nota. Por isso, destaca-se que um trabalho será entendido com nota se tiver tanto as notas por conceito, sendo conceito A, B, C, D ou Ótimo, Bom, Regular e etc, como as notas cifradas, isto é, as notas representadas por um número. Visto que ambas, a nota por conceito e a nota cifrada, representam um julgamento baseado por critérios que podem estar bem estabelecidos e expostos ou não, ainda assim, o número irá apresentar uma conotação afetiva tão forte quanto a palavra (Barlow, 2006).

## **Referências:**

BARLOW, C. M. **Avaliação escolar: mitos e realidades**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2006.

**GHEMAT - BRASIL**. O Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática. Disponível em: <https://ghemat-brasil.com.br/home/>.

**GHEMAT - BRASIL**. Repositório de Conteúdo Digital. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**. Repositório Institucional. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/>.

# Trajetória de Professores e Professoras do Sul Global do DMAT/UFPR: Vozes Latinoamericanas

Sibeli da Rosa Da Rocha\*

[sibarocha02@gmail.com](mailto:sibarocha02@gmail.com)<sup>1</sup>

Elenilton Vieira Godoy (Orientador)

[elenilton@ufpr.br](mailto:elenilton@ufpr.br)<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná

<sup>2</sup>Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** História Oral; Interseccionalidade; Professores Imigrantes

## Resumo:

Este trabalho é um subprojeto que faz parte da fase inicial do Projeto de Pesquisa "Narrativas de Docentes Imigrantes do Departamento de Matemática da UFPR", sob a orientação do Prof. Dr. Elenilton Vieira Godoy. O objetivo do projeto é narrar, por meio da História Oral, as trajetórias de professores e professoras imigrantes que integram o Departamento de Matemática (DMAT) da Universidade Federal do Paraná (UFPR). Para ser possível narrar essas histórias, é fundamental compreender a trajetória particular de cada docente, marcada e influenciada por seus marcadores sociais. O conceito de interseccionalidade oferece uma base teórica para entender a formação da identidade individual, conceitualizando a relação de interdependência não hierárquica entre os seus marcadores sociais, tais como raça, gênero, classe social, orientação sexual, capacidade física, dentre outros, e as complexas manifestações de discriminação influenciadas pela interação entre os marcadores sociais. (Hirata, 2018).

A importância da História Oral se destaca por permitir acessar informações de acontecimentos que não são registrados em documentos, bem como contemplar o registro de visões que foram invisibilizadas pela história oficial. Em vista disso, é por tal importância que se optou por utilizar premissas da História Oral para narrar as histórias dos professores e professoras imigrantes do Departamento de Matemática (DMAT) da Universidade Federal do Paraná (UFPR). O projeto foi iniciado pelo grupo de Iniciação Científica composto pelas licenciandas em Matemática Brenda Dal Puppo Monteiro e Sibeli da Rosa da Rocha e pela mestranda Núbia Symbalista, todas discentes da UFPR, sob a orientação do Prof. Dr. Elenilton Vieira Godoy e coorientado do Prof. Dr. Emerson Rolkouski.

Como ponto de partida, é definido que essa pesquisa é de caráter qualitativo e como mencionado seguirá a luz da História Oral, uma metodologia de pesquisa que visa à apreensão de narrativas através de entrevistas gravadas para a

---

\* Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) financiado pelo CNPq

elaboração de documentos e constituição de fontes históricas. Para mais, é preciso entender que a História Oral se apropria de fontes orais, as quais são uma visão particular de processos coletivos, dessa forma os depoimentos possuem dimensões individuais e coletivas. Cada fonte será única e não pode ser generalizada, de modo que a subjetividade do registro é fundamental para compreender a entrevista (Euzébio, 2014). Uma vez que a fonte oral se caracteriza como base primária para obtenção de conhecimento, à medida que essa pode refletir valores e emoções que ficariam escondidos em dados estatísticos (Gonçalves; Lisboa, 2007).

Optou-se por entrevistar os professores imigrantes do DMAT da UFPR que foram separados em grupos conforme a nacionalidade. O Departamento de Matemática da UFPR possui 15 professores não brasileiros, dos quais doze nasceram na América Latina e serão o foco deste trabalho. A amostra inicial tinha um(a) professor(a) de cada nacionalidade entre os professores do DMAT, visando atingir a diversidade de trajetórias inter-relacionadas para abarcar o campo da investigação. Entretanto, o único professor colombiano não foi entrevistado devido ao seu ingresso no DMAT ter ocorrido durante o andamento da pesquisa; assim, foram entrevistados quatro professores: uma professora argentina, uma professora cubana, um professor peruano e uma professora venezuelana; porém uma professora desistiu de participar e solicitou que sua entrevista não fosse utilizada neste trabalho.

Houve um contato preliminar com os professores por um e-mail que foi enviado para explicar a intenção do projeto. Como o objetivo da entrevista não era que os professores apenas respondessem perguntas, decidiu-se desenvolver cartas com subtemas dos temas gerais do roteiro de perguntas com algumas palavras-chaves que permitissem o(a) professor(a) discursar sobre sua trajetória com o mínimo de interrupções. Assim, apenas as perguntas do roteiro que não foram respondidas diretamente foram feitas aos professores. O roteiro de perguntas foi dividido por seis temas: Vida Pessoal, Formação Acadêmica, Currículo, Prática Docente, Desafios e Oportunidades, e Diversidade Cultural.

Antes da entrevista, o Currículo Lattes do(a) professor(a) foi analisado e anotações foram feitas para servirem como material de apoio durante o encontro. Ao dar início a cada entrevista, a Carta de Apresentação foi lida. Posteriormente, a gravação foi iniciada e foram registrados a data, os nomes das entrevistadoras, nome do depoente, local, tema e tipo de gravador. As cartas com os temas e palavras-chaves foram distribuídas na mesa de modo que o(a) professor(a) pudesse direcionar por onde e como gostaria de começar o seu depoimento.

A entrevista da professora argentina ocorreu no dia 01 de Dezembro de 2023 às 15:30 na sala de reunião do Departamento de Expressão Gráfica com a presença da entrevistada e das licenciandas Brenda e Sibeli, com duração de 1h15. A entrevista da professora cubana aconteceu no dia 14 de Abril de 2024, com início às 10h na sala de reunião do Departamento de Expressão Gráfica com a presença da entrevistada e das licenciandas Brenda e Sibeli, com duração de 1h18. Já a entrevista com a professora venezuelana foi realizada às 8h30 do dia 17 de abril de 2024, na sala do Professor Emerson, no Departamento de Expressão Gráfica com a

presença das alunas Brenda e Núbia, com duração de 47 minutos. Por fim, a entrevista com o professor peruano ocorreu no dia 24 de Abril de 2024, com início às 11h na sala de reunião do Departamento de Expressão Gráfica com a presença do entrevistado e das licenciandas Brenda e Sibeli, com duração de 1h25.

Após a entrevista, as gravações foram transcritas, textualizadas e enviadas para cada professor(a) junto à Carta de Cessão e ao Termo de Consentimento Livre e Esclarecido via email. De modo que a Carta de Cessão e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido deveriam ser devolvidos assinados caso o(a) professor(a) decida participar do projeto e autorize a divulgação das fontes.

Assim, o presente trabalho apresenta trechos das entrevistas realizadas no projeto e que possam ser relacionadas às interseccionalidades dos(as) participantes que autorizaram o uso de seus depoimentos. Estes estão organizados em cinco seções temáticas: “Qual é a minha pátria?”, “Escolhi partir, mas posso voltar?”, “Você me entende?”, “Somos iguais?” e “Oportunidades e Diversidades”. Embora a História Oral tenha como princípio a divulgação dos nomes dos entrevistados, na análise deste trabalho não serão divulgados os nomes de quais professores cada trecho pertence para que os os depoentes permaneçam anônimos.

Nos trabalhos subsequentes do projeto, o roteiro de entrevista será modificado, e espera-se entrevistar os demais professores imigrantes do DMAT da UFPR, com vistas à elaboração de um livro colaborativo que narre as trajetórias dos(as) docentes sob suas próprias perspectivas, permitindo dar ouvido a vozes que já são reconhecidas.

## Referências:

**EUZÉBIO, Alessandro.** *Oficina de Oralidade: Métodos e Técnicas a Partir da História Oral.* [s.l.: s.n.]. Disponível em: <https://pt.slideshare.net/fernandocaetano5/oficina-de-historia-oral>. Acesso em: 07 mar. 2024.

GONÇALVES, R. de C; LISBOA, T. K. Sobre o método da história oral em sua modalidade trajetórias de vida. **Revista Katálysis**, v. 10, n. spe, p. 83–92, 2007.

HIRATA, H. Gênero, patriarcado, trabalho e classe. **Revista Trabalho Necessário**, v. 16, n. 29, p. 14-27, 13 jun. 2018.

# Gincana de Educação Financeira no Ensino Fundamental: situação de ensino organizada para a revisão e a complementação de conteúdos financeiros

Wanderson dos Santos Rodrigues<sup>1</sup>  
*wandersonrodrigues@alunos.utfpr.edu.br*

Profa. Dra. Mirian Maria Andrade Gonzalez<sup>2</sup> (orientadora)  
*miriangonzalez@utfpr.edu.br*

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba

**Palavras-Chave:** Finanças, Jogos, Matemática.

## **Resumo:**

Este trabalho tem por objetivo compartilhar uma ação desenvolvida por um estudante do curso de Licenciatura em Matemática a partir de uma situação de ensino organizada no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), subprojeto de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Curitiba. Essa ação foi elaborada pelo estudante no decorrer do ano letivo de 2023 e desenvolvida no Colégio Estadual João Bettega, localizado na cidade de Curitiba (PR) no mesmo período, na qual envolveu a disciplina de Educação Financeira com estudantes do nono ano do Ensino Fundamental.

A Educação Financeira tornou-se obrigatória na Educação Básica devido às regulamentações educacionais, pois os conteúdos que a compõem apresentam uma relevância no cotidiano das pessoas. Com o intuito de tornar os temas de finanças mais próximos dos estudantes do Ensino Fundamental, é necessário realizar a adequação dos conceitos financeiros em relação à faixa etária e a realidade dos envolvidos, almejando trazer aspectos de ludicidade, materiais manipuláveis, jogos e discussões em sala para fortalecer os ensinamentos e revisar os aprendizados.

Silva (2015) salienta que, é possível promover uma aprendizagem importante aos indivíduos, principalmente se tratando do contexto da Educação Básica e seus

---

<sup>1</sup> Graduando em Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba. Bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) da Componente Curricular de Matemática (2022/2024).

<sup>2</sup> Doutora em Educação Matemática. Departamento Acadêmico de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba. Coordenadora de Área do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) da Componente Curricular de Matemática (2022/2024).

respectivos estudantes, com o apoio de metodologias voltadas para o ensino e a aprendizagem. Desta forma, com o devido planejamento, acompanhado de uma organização adequada, conciliando abordagens e métodos voltados para o campo educacional, tais como dinâmicas e jogos para o contexto da Educação Financeira, é viável complementar os ensinamentos compartilhados e fortalecer o ensino.

Em 2023, um estudante de Iniciação à Docência organizou análises e mapeamentos durante as observações da prática docente no Colégio Estadual João Bettega, com a intenção de identificar possíveis ações para o desenvolvimento de uma situação de ensino. Considerando a coleta e a análise dos dados, juntamente com as reuniões semanais realizadas com a professora supervisora, a turma do nono ano do Ensino Fundamental foi selecionada para participar de uma situação de ensino, que por sua vez, estaria envolvendo a disciplina de Educação Financeira.

Tendo em vista as observações e os diálogos, foi decidido desenvolver uma ação com a temática da disciplina e, dentre algumas propostas, foi escolhida a elaboração de uma gincana para revisar, complementar e fortalecer o ensino dos conteúdos de finanças. Durante as reuniões semanais no espaço escolar, buscou-se planejar a gincana, definindo os planejamentos, os objetivos, o referencial teórico, a metodologia e os materiais. Por conta da área de finanças ser abrangente, foi necessário pesquisar e estudar tópicos envolvendo normativas educacionais vigentes, almejando conhecer os conteúdos presentes no Ensino Fundamental.

A gincana abordou temas de finanças pessoais, orçamento familiar, tipos de investimentos, situações que envolviam consumo consciente, noções de crédito, despesas e receitas familiares e responsabilidade social. Pretendendo abordar esses temas, foram preparados oito momentos para serem realizados durante a gincana, com a intenção de revisar e rever os conteúdos trabalhados na disciplina, proporcionando uma vivência prática para acrescentar na teoria ensinada em sala de aula. A Gincana de Educação Financeira ocorreu em duas datas presente em 2023, e contou com o acompanhamento e apoio da professora regente da disciplina.

Os estudantes do nono ano foram divididos em três equipes, possuindo cores e nomes específicos para a identificação dos respectivos integrantes. Cada momento previsto na gincana possuía uma pontuação agregada, que auxiliaria na definição do pódio. A cada momento proposto na ação, eram realizadas revisões dos conteúdos envolvidos, gerando espaços para esclarecimentos de dúvidas sobre a temática trabalhada. A gincana apresentou questões de múltipla escolha,

perguntas de verdadeiro e falso, questões subjetivas, reflexões do cotidiano envolvendo finanças, charadas financeiras, cálculos financeiros e estudos de casos.

O tempo definido para cada momento proposto no planejamento poderia ser reajustado conforme necessário no dia de desenvolvimento, com o objetivo de complementar os assuntos apresentados. Após a finalização da gincana nas duas datas estipuladas e com os *feedbacks* dos estudantes participantes, foram realizadas reuniões no ambiente escolar para analisar a ação desenvolvida, com a intenção de destacar os pontos positivos e potenciais melhorias para ações futuras.

Para Teixeira (2015), a Educação Financeira envolve o entendimento da importância de gerenciar os recursos econômicos com responsabilidade e competência. Ao ensinar essa temática, é essencial incorporar assuntos do cotidiano, garantindo que eles estejam mais próximos dos indivíduos, pois os seus conteúdos influenciam as decisões no dia a dia. Para desenvolver um ambiente oportuno de diálogos sobre questões financeiras, principalmente voltadas para o público em idade escolar, é importante apresentar uma base teórica, combinando procedimentos educacionais, para desenvolver experiências e práticas envolventes.

Portanto, as gincanas são relevantes para a promoção do fortalecimento da Educação Financeira em sala de aula, mas é essencial que os tópicos a serem trabalhados sejam elaborados conforme o nível de ensino. Com ações simples, é possível auxiliar os estudantes a desenvolverem habilidades financeiras para as diversas situações no cotidiano (Silva, 2015). Ao conciliar as temáticas de finanças com jogos, é possível desenvolver um ambiente interessante com a intenção de fortalecer os conhecimentos financeiros na Educação Básica pelo viés de colaboração, ludicidade e diversão, gerando resultados nos processos de ensino.

## Referências Bibliográficas

SILVA, Alex Fabiano Metello. **A importância da Matemática Financeira no Ensino Básico**. 2015. 149 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: [https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/Alex\\_Fabiano\\_Metello\\_Silva.pdf](https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/Alex_Fabiano_Metello_Silva.pdf). Acesso em: 09 ago. 2024.

TEIXEIRA, James. **Um estudo diagnóstico sobre a percepção da relação entre Educação Financeira e Matemática Financeira**. 2015. 160 f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11025>. Acesso em: 09 ago. 2024.

# Educação financeira e as mulheres: uma perspectiva histórica e escolar das relações financeiras e disciplinares no Brasil

Wécia Luiza Bhering Konell<sup>1</sup>  
*wecia.koenll@escola.pr.gov.br*<sup>1</sup>

Licéia Alves Pires Orientadora  
*liceia.pires@unespar.edu.br*<sup>2</sup>

Cleonis Viater Figueira Orientadora  
*cleonis@utfpr.edu.br*<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Unespar - Paranaguá

<sup>3</sup>Utfpr – Pato Branco

**Palavras-chave:** mulheres, educação financeira, finanças.

## **Resumo:**

Por mais que a educação financeira seja considerada como essencial para a autonomia e sustentabilidade dos indivíduos, no contexto escolar, é um campo relativamente novo no currículo, seja ele da Educação Básica ou do Ensino Superior. Com a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) e com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), segundo Forte (2020), entende-se que a educação adentra o ambiente escolar promovendo conhecimentos financeiros a população em geral. Esse movimento se torna mais significativo se considerarmos grupos historicamente marginalizados pela falta de acesso a esse tipo de educação, dentre esses grupos pode-se destacar o das mulheres.

Ao longo dos anos e, possivelmente, séculos, as mulheres têm enfrentado diversas formas de dependências e vulnerabilidade em relação aos homens, especialmente no que diz respeito ao aspecto financeiro. Por muito tempo, a responsabilidade pela administração financeira tem recaído predominantemente sobre pais e maridos, deixando as mulheres à margem desse processo.

Foi apenas há alguns anos que as mulheres conquistaram o direito à gestão de seu próprio dinheiro. Em 1962, especificamente, foi estabelecido o direito da mulher a trabalhar sem necessidade de consentimento do marido. Anteriormente, conforme previsto na Lei 3.071/1916, a mulher só poderia trabalhar, aceitar herança ou viajar com a permissão do marido, como expresso no Art. 247, parágrafo único da mencionada lei: “Considerar-se-á sempre autorizada pelo marido a mulher que ocupar cargo público, ou, por mais de 6 (seis) meses, se entregar a profissão exercida fora do lar conjugal” (Brasil, 1916, p.31).

Outro marco interessante na história econômica da mulher ocorreu em 1974, quando passaram a ter direito a um cartão de crédito após a aprovação da Lei de

---

<sup>1</sup>Bolsista de Iniciação Científica (PIBIC) com financiamento da Fundação Araucária do Paraná

Igualdade e Oportunidade de Crédito. Antes disso, mulheres solteiras ou divorciadas precisavam de um homem para assinar contratos ao solicitar cartões de crédito ou empréstimos.

É notável que, por muitos anos, as mulheres estiveram financeiramente subordinadas aos seus maridos, um cenário que começou a mudar com o tempo e com a implementação de novas leis. Gradualmente, as mulheres passaram a se tornar economicamente ativas sem a necessidade de autorização dos maridos para poder exercerem profissões remuneradas fora de casa. Por mais que as mulheres brasileiras tenham conseguido o direito de exercer uma profissão, ainda enfrentam os problemas salariais e financeiros.

Segundo Sandler (2021), além do Brasil apresentar desigualdades salariais entre homens e mulheres, o dinheiro é considerado como algo que não é assunto para mulheres. Um estudo do Banco de Investimentos UBS, apresentou que 93% das brasileiras que acreditam que homens entendem mais de dinheiro que elas. Essas questões relativas às mulheres e as suas questões financeiras podem ser observadas sob a ótica da educação financeira, ou até mesmo pela falta dela quando se trata de uma educação formal. Com base no contexto descrito é que se propôs esse projeto de pesquisa de iniciação científica que busca investigar as percepções históricas com relação às mulheres, as questões financeiras e como a educação financeira, enquanto disciplina, pode quebrar as barreiras sociais, econômicas e culturais enfrentadas ao longo do tempo pelas mulheres.

Para cumprir com esse objetivo foram traçados caminhos a serem percorridos, entre eles estão: realização de revisão bibliográfica abordando a relação entre as mulheres e as questões financeiras bem como sua educação financeira, explorando as barreiras históricas enfrentadas pelas mulheres nessas áreas especialmente devido a estereótipos de gênero e falta de acesso à educação; investigação da importância da disciplina de Educação Financeira como uma ferramenta para capacitar as mulheres a superar as barreiras nas áreas de matemática e finanças promovendo uma maior autonomia e empoderamento por meio da educação financeira e, por fim, a realização de uma pesquisa com acadêmicas da Universidade Aberta da Terceira Idade - Unati e também dos cursos de Licenciatura em Matemática, Administração e Contábeis da Unespar de Paranaguá para entender as dificuldades em áreas relacionadas à matemática e finanças, a fim de compreender experiências e identificar necessidades de trabalho com a disciplina de Educação Financeira.

Com esse trabalho de pesquisa acredita-se que nos será mostrado certos fatos históricos, como nos apresentam a sociedade, podem ter sido resultados de interpretações e também de representação, relacionada as questões de poder, e também de uma construção histórica e social onde um determinado grupo teve uma dominação sobre o outro. Para Colling (2014, p.12) "Foram os homens os autores das grandes construções conceituais. Este universalismo que negou a diferença entre os sexos, ou melhor, que estabeleceu uma divisão simbólica dos sexos, mascarou o privilégio do modelo masculino sob a pretensa neutralidade

sexual dos sujeitos”. E acredita-se que tal fato também deva ter ocorrido na área que envolve as questões financeiras.

O trabalho da pesquisa se apoiará metodologicamente na História Cultural, com Chartier (1990) e Barros (2011), que em meados do século XX trouxe uma nova forma de fazer história, especialmente a partir da quarta geração dos *Annales*<sup>2</sup>. Por meio da análise de alguns vestígios como documentos, outros trabalhos desenvolvidos na área e também por questionários/entrevistas será possível entender a realidade por meio das apropriações sobre o dinheiro e as mulheres, e entender como isso pode ser estudado sob a ótica de uma disciplina como a Educação Financeira.

Esse estudo se justifica na medida que se entende que a educação financeira é uma ferramenta essencial para capacitar as mulheres a entender e gerenciar suas finanças de forma eficaz. No entanto, as barreiras históricas enfrentadas pelas mulheres em áreas como Matemática e finanças podem dificultar o acesso a esse conhecimento. Investigar como a educação financeira pode ajudar a superar essas barreiras e promover o empoderamento feminino, é crucial para desenvolver intervenções eficazes e inclusivas

#### Referências:

- [1] **AGÊNCIA SENADO**. Sancionada a lei de igualdade salarial entre mulheres e homens. *Senado Notícias*, Brasília, set. 2023. Disponível em: <https://www12.senado.leg.br/noticias/materias/2023/07/04/sancionada-lei-deigualdade-salarial-entre-mulheres-e-homens>.
- [2] **BARROS, José D’Assunção**. A nova história cultural: considerações sobre o seu universo conceitual e seus diálogos com outros campos históricos. *Cadernos de História*, v. 12, n. 16, p. 38-63, maio 2011. Disponível em: <https://periodicos.pucminas.br/index.php/cadernoshistoria/article/view/P.2237-8871.2011v12n16p38>.
- [3] **COLLING, Ana M**. *Tempos diferentes, discursos iguais*. Dourados: Editora da UFGD, 2014.
- [4] **SANDLER, Carol**. 10 verdades sobre mulheres e dinheiro. *Forbes Brasil*, Colunas, maio 2021. Disponível em: <https://forbes.com.br/colunas/2021/05/carol-sandler-10-verdades-sobre-mulheres-e-dinheiro>.
- [5] **CHARTIER, Roger**. *A história cultural: entre práticas e representações*. Trad. Maria Manuela Galhardo. Rio de Janeiro: Berthand Brasil, 1990..
- [6] **BRASIL. Ministério da Educação**. *Base Nacional Comum Curricular BNCC*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_publicacao.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf).
- [7] **FORTE, Claudia M. J.** (Org.). *Estratégia nacional de educação financeira (ENEF): em busca de um Brasil melhor*. 1. ed. São Paulo: Riemma Editora, 2020. Disponível em: [www.vidaedinheiro.gov.br](http://www.vidaedinheiro.gov.br).

---

<sup>2</sup> A escola dos *Annales* é um movimento historiográfico do século XX que se desenvolveu em torno do periódico acadêmico francês *Annales d’histoire économique et sociale*, se destacando por incorporar métodos das Ciências Sociais e História.

# *Equações Diferenciais*

*Comissão Científica:*

Prof<sup>a</sup>. Dra. María Rosario Astudillo Rojas

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Santos Júnior

# Método de Feynman para integrais e aplicações em Geometria Diferencial e Teoria dos Campos

André Teixeira Viana \*

*andre.teixeira.viana07@aluno.ifce.edu.br*<sup>1</sup>

Francisco Odécio Sales (Orientador(a))

*odecio.sales@ifce.edu.br*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instituto Federal do Ceará, IFCE – Campus Itapipoca

<sup>2</sup> Instituto Federal do Ceará, IFCE – Campus Itapipoca

**Palavras-chave:** Método de Feynman, Integrais Impróprias, Física Matemática, Geometria Diferencial.

## Resumo:

A Teoria Quântica de Campos é a aplicação conjunta da Mecânica Quântica e da relatividade aos campos que fornece uma estrutura teórica usada na física de partículas e na física da matéria condensada. Em particular, a teoria quântica do campo eletromagnético, conhecida como eletrodinâmica quântica (tradicionalmente abreviada como QED, do inglês “Quantum ElectroDynamics”), é a teoria provada experimentalmente com maior precisão na Física. Resumidamente, pode-se dizer que a teoria quântica dos campos é uma teoria que, na denominação mais antiga, se chama segunda quantização, isto é, realiza a quantização dos campos, ao passo que a Mecânica Quântica apenas realiza a quantização da matéria. A teoria quântica dos campos considera tanto a matéria (hadrons e leptons) quanto os condutores de força (bosons mensageiros) como excitações de um campo fundamental de energia mínima não-nula (vácuo). Nesse contexto apresentamos formulações atribuídas a Richard Feynman, baseada no método de Leibniz, para diferenciar sobre o sinal da integral, generalizando assim o teorema fundamental do cálculo. Nesse trabalho apresentaremos a técnica estruturada, alguns resultados clássicos em Análise (como a convergência da Integral de Leibniz e a integral Gaussiana) através desse método e descreveremos alguns resultados relacionados a Física Matemática e Mecânica Quântica, em especial Equação de Schrödinger (uma equação de difusão com uma constante de difusão imaginária), sendo sua integral de caminho uma continuação analítica do método para a soma de todas as possíveis caminhadas aleatórias. O Objetivo é apresentar um método alternativo para resolver integrais impróprias com interpretações físicas e geométricas (curvaturas de variedades mergulhadas no  $\mathbb{R}^3$ ) e então apresentar a um aluno de graduação, visto que não há ainda em português material que faça esse tratamento.

---

\* Bolsista do Programa de Iniciação Científica.

**Referências:**

TENENBLAT, Ketí. **Introdução à Geometria Diferencial**. São Paulo: Editora Blucher, 2ª edição, 2008.

Feynman, R. P. (1965). **Quantum Electrodynamics**. W.A. Benjamin.

Griffiths, D. J. (2005). **Introduction to Quantum Mechanics** (2nd ed.). Pearson Prentice Hall.

Estudo do Modelo Dinâmico Regulatório de glicose insulina com o Auxílio de  
Programas de Álgebra Computacional

Cassiano Fuziki\*  
*cassianofuziki@gmail.com*<sup>1</sup>

Wanderley Cerniauskas (orientador)  
*wanderley@uepg.br*<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Estadual de Ponta Grossa

<sup>2</sup>Universidade Estadual de Ponta Grossa

**Palavras-chave:** Modelagem de Sistemas Biológicos, Farmacocinética, Equações Diferenciais, Área de Concentração: Matemática Aplicada

**Resumo:**

Diabetes Mellitus (DM) é definida como uma doença metabólica crônica caracterizada pelo controle inadequado dos níveis séricos de glicose, sendo, geralmente, causada pela secreção ou ação inadequada da insulina (SAPRA; BHANDARI, 2024). Estima-se que no ano de 2013, 382 milhões de pessoas eram portadoras de DM no mundo, e que esse valor será de 592 milhões no ano de 2035; A doença pode ser classificada de diversas formas conforme sua etiologia, sendo o DM do tipo 1 ou tipo 2 suas formas mais comuns (>85% de toda a prevalência) (FOROUHI; WAREHAM, 2014).

Pode-se dividir a regulação da glicose sanguínea da seguinte maneira: após uma refeição, há um aumento na concentração de glicose sérica, que por sua vez, induz à secreção de insulina pelo pâncreas na corrente sanguínea, responsável pela deposição do açúcar no fígado sob a forma de glicogênio; De forma oposta, a queda nos níveis de glicose leva a secreção de glucagon pancreático que leva à deposição do açúcar na corrente sanguínea, criando, assim, um mecanismo de balanceamento. (NAKRANI; WINELAND; ANJUM, 2024).

Diabetes do tipo 1 é caracterizado pela destruição autoimune das células-beta pancreáticas produtoras de insulina, resultando em níveis séricos baixos ou mesmo inexistentes de insulina. Já o diabetes do tipo 2 envolve um processo lento de diminuição da atividade efetiva da insulina, e diminuição da capacidade de internalização da glicose nos tecidos do corpo. Assim, em ambos os casos, tem-se como resultado um estado hiperglicêmico, e, conseqüentemente a destruição de órgãos-alvo como coração, rins, olhos, vasos sanguíneos, sistema nervoso e outros,

---

\*Bolsista do Programa PICME: Iniciação Científica

motivados pela exposição prolongada a concentrações elevadas de glicose. (SAPRA; BHANDARI, 2024).

Grodsky (1972) realizou um estudo experimental com a perfusão de glicose pelo pâncreas de ratos por meio de diversos padrões de infusão, dentre elas inclui-se estimulações em escada, etapas únicas prolongadas, re-estimulações e funções de rampa. Posteriormente, foi analisada a concentração de insulina liberada pelo órgão, e, com os resultados obtidos, pôde-se realizar a hipótese do armazenamento da insulina em pacotes. Dessa forma, um aumento na concentração de glicose sérica leva a um pico de liberação de insulina, motivada pelo aumento na quantidade de colisões entre as partículas disponíveis; essa liberação inicial seria feita por um primeiro compartimento lábil mais sensível à oscilações iniciais da glicose. Posteriormente, caso as concentrações de glicose na corrente sanguínea se mantivessem elevadas, a liberação de insulina continuaria acontecendo, contudo, de forma mais insidiosa. Isso seria motivada pela depleção do compartimento lábil e síntese lenta de mais moléculas de insulina por um compartimento maior.

Com base nesse e outros modelos, Santos (2023) propôs analisar como ocorre a regulação na interação glicose-insulina, demonstrando a existência de um perfil caótico na avaliação de dados experimentais. A autora demonstra que, na análise dos efeitos de uma perturbação paramétrica no modelo glicose-insulina para análise da sensibilidade de parâmetro em sistemas dinâmicos, a perturbação é capaz de alterar o comportamento dinâmico ou mesmo suprimir o caos.

O presente estudo, portanto, teve como objetivo o estudo de modelos matemáticos desenvolvidos com o objetivo de analisar o comportamento das taxas de glicose no sangue, levando em conta sua interação com a concentração de insulina. Associou-se conhecimentos teóricos de cálculo analítico propostos por Boyce e Diprima (2010) com conhecimentos práticos de ciências médicas em projetos de transição de linguagem e modelagem farmacocinética. A temática foi selecionada com base na grande quantidade de possíveis projetos que poderiam ser desenvolvidos nesta temática associada à dificuldade de oportunidade de associação destas duas áreas do conhecimento.

Como ferramenta auxiliar para análise e para a compreensão dos modelos, e dos resultados apresentados os softwares de manipulação algébrica *Maxima*, foram utilizados com uma abordagem similar à feita por Mancera (2002) e por Bianchini (2018). Foi dada preferência ao uso do *Maxima* por ser um software livre, de acesso gratuito na Internet, análogo ao *Maple* e compatível com a maioria dos sistemas operacionais utilizados atualmente. A utilização do software *Maxima*, de interesse para este trabalho, é descrita por Vaz (2016) e por Ferreira (2022).

## Referências:

1. BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. **Euações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 11ª edição ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2020.
2. FERREIRA, Juciara. **Euações Diferenciais Ordinárias: uma abordagem computacional utilizando o software wxMaxima**. 2017. Disponível em: [https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica\\_aplicada/2017/Juciara\\_Ferreira.pdf](https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica_aplicada/2017/Juciara_Ferreira.pdf). Acesso em setembro, 2022
3. FOROUHI, N. G.; WAREHAM, N. J. Epidemiology of diabetes. **Medicine (Abingdon, England : UK Ed.)**, v. 42, n. 12, p. 698–702, dez. 2014.
4. GRODSKY, G. M. A threshold distribution hypothesis for packet storage of insulin and its mathematical modeling. **Journal of Clinical Investigation**, v. 51, n. 8, p. 2047–2059, 1 ago. 1972.
5. MANCERA, P. F. A. **Matemática para Ciências Biológicas: Notas de Aulas**. Departamento de Bioestatística , 2002. Disponível em <https://www.esalq.usp.br/departamentos/leb/aulas/lce164/MODMAT.pdf>. Acesso em setembro de 2022.
6. NAKRANI, M. N.; WINELAND, R. H.; ANJUM, F. Physiology, Glucose Metabolism. Em: **StatPearls**. Treasure Island (FL): StatPearls Publishing, 2024.
7. SANTOS, M. A. DOS. **Modelo Dinâmico Regulatório de Glicose-Insulina e Robustez Sob a Ação de Perturbações Externas**. Disponível em <https://tede2.uepg.br/jspui/bitstream/prefix/3947/1/Margarete%20Aparecida%20Odos%20Santos.pdf> . Acesso em agosto de 2024.
8. SAPRA, A.; BHANDARI, P. Diabetes. Em: **StatPearls**. Treasure Island (FL): StatPearls Publishing, 2024.
9. VAZ, C.L.D. . **O software Maxima e aplicações**. 1. ed. Belém: EditAedi, 2016. v. 1. 173p. Disponível em [https://www.livroaberto.ufpa.br/jspui/bitstream/prefix/200/1/Livro\\_SoftwareMaximaAplicacoes.pdf](https://www.livroaberto.ufpa.br/jspui/bitstream/prefix/200/1/Livro_SoftwareMaximaAplicacoes.pdf). Acesso em setembro de 2022.

# Teorema de Poincaré-Bendixson e aplicação em Sistemas Dinâmicos

Eduardo Teixeira de Oliveira\*  
oliveira.eduardo.tdo@gmail.com<sup>1</sup>

Alexandre N. Oliveira Sousa  
alexandrenosousa@gmail.com<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Dpto. de Matemática UFSC

**Palavras-chave:** semigrupos, atratores,  $\omega$ -limites, SIR.

## Resumo:

Esse trabalho visa atrair olhares para um teorema sobre dinâmica planar e como ele pode ser utilizado na análise qualitativa de EDO's. O teorema em questão (Poincaré-Bendixson) resume por completo todos os possíveis comportamentos assintóticos de soluções de EDO's que definem um fluxo planar (dadas certas hipóteses), simplificando o escopo de estudo quando trabalhamos em  $\mathbb{R}^2$ .

Primeiramente, precisaremos de alguns resultados auxiliares e definições, para que possamos entender um pouco mais sobre o protagonista desse trabalho. O primeiro grande resultado será o Teorema do Fluxo Tubular.

**Definição.** *Seja  $E$  um espaço vetorial de dimensão  $n$ .*

1. Um **campo vetorial** de  $B \subset E$  é uma função  $f : B \rightarrow E$ . Mapeia cada ponto de  $B$  em um vetor de  $E$ ;
2. Um **ponto regular**  $p$  de  $f$  (campo vetorial de  $E$ ) é tal que  $f(p) \neq \vec{0}$ . Um **ponto de equilíbrio** de  $f$  é um ponto não regular de  $f$ ;
3. Uma **seção transversal** de  $f$  em  $x \in E$  é um segmento de reta aberto  $S$  centrado em  $x$ , transversal ao vetor  $f(x)$  em  $x$  e para todo  $y \in S$ ,  $f(y)$  em  $y$  apontam para o mesmo lado de  $S$  (e são não nulos). A existência de tal seção é garantida pelo Teorema do Fluxo Tubular.

**Teorema** (Teorema do Fluxo Tubular). *Sejam  $f : B \subset E \xrightarrow{Cr} E$  um campo em que  $r \geq 0$ ,  $E$  é espaço euclidiano de dimensão  $n$  e  $p \in B$  é um ponto regular de  $f$ . Fixemos uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  para  $E$  e considere o campo constante  $\tilde{f} = e_1$  definido no cubo  $C = \{x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n \in E \mid |x_i| < 1, i = 1, \dots, n\}$ . Então existe difeomorfismo  $h : V_p \xrightarrow{C^\infty} C$  que conjuga localmente os fluxos de  $f$  e de  $\tilde{f}$ , onde  $V_p$  é uma vizinhança aberta de  $B$ .*

\*Apoiado pelo PET-Matemática UFSC. Bolsa FNDE

Esse Teorema basicamente nos diz que próximo de um ponto regular, todos os vetores apontam para uma direção próxima deste, não ocorrem pontos em que sua direção aponta para o lado contrário. Agora, apresentemos mais um importante resultado para a demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixon (tal resultado utiliza o Teorema anterior e o Teorema da Curva de Jordan para ser provado).

**Lema** (Lema da Sequência Monótona). *Seja  $x \in S$  um ponto da seção transversal local  $S$  de  $f$ . Se a órbita  $x(t) = T(t)x (= T(t)h(s))$  de  $f$  por  $x$  volta a bater em  $S$  para tempos crescentes  $0 < t_1 < \dots < t_k$ , então a sequência de pontos  $x_n = T(t_n)x$  é monótona em  $S$  no seguinte sentido: no segmento  $S$ ,  $x_n$  sempre está entre  $x_{n-1}$  e  $x_{n+1}$ . Além disso, existem  $t_n < t_{n+1}$  tal que  $x_n = x_{n+1} \Leftrightarrow$  a órbita de  $f$  por  $x$  é periódica.*

**Definição.** *Seja  $X$  um espaço métrico.*

4. *Uma família  $\{T(t)|t \geq 0\}$  (que denotaremos por  $T(\cdot)$ ) de aplicações contínuas do espaço métrico  $X$  nele mesmo é chamado de **semigrupo** em  $X$ , quando ele possuir as seguintes propriedades:*

- $T(0) = Id$ , sendo  $Id$  a aplicação identidade de  $X$ ;
- $T(t + s) = T(t)T(s)$ ,  $\forall t, s \geq 0$ ;
- A aplicação  $[0, \infty[ \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$  é uma aplicação contínua;

5. *O conjunto  $\omega$ -limite de  $B$  (subconjunto de  $X$ ) é tal que*

$$\omega(B) = \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n \mid \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ e } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B \right\};$$

6. *Uma **solução global** de  $T(\cdot)$  é uma função  $\xi : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$  tal que  $\xi(t + s) = T(t)\xi(s) \forall s, t \geq 0$ . Uma solução se diz **periódica**, se existir  $\tau \geq 0$  tal que  $\xi(t + \tau) = \xi(t) \forall t \geq 0$ ;*

7. *A **órbita** de  $\xi$  é a imagem de  $\xi$ , denotada por  $\gamma(\xi)$ . A órbita se diz **periódica**, se  $\xi$  for periódica. Note que  $\gamma(\xi) = \gamma(x) \forall x = \xi(t)$  para algum  $t \geq 0$ .*

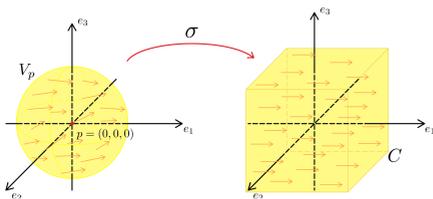


Figura 1: Ilustração do Teorema do Fluxo Tubular

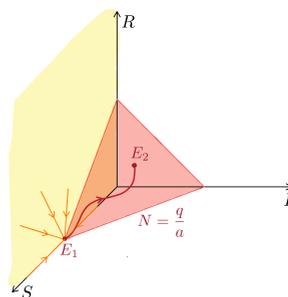


Figura 2: Atrator do SIR caso  $\gamma > a + b + c$

Agora iremos enunciar e dar uma ideia da demonstração do resultado principal deste trabalho: o Teorema de Poincaré-Bendixon.

**Teorema (Poincaré-Bendixson).** *Seja  $T(\cdot)$  limitado dissipativo com finitos pontos de equilíbrio e  $x \in E$  ( $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ ), então vale uma das teses abaixo:*

(i)  $\omega(x)$  é um único ponto de equilíbrio;

(ii)  $\omega(x)$  é uma órbita periódica;

(iii)  $\omega(x)$  contém uma quantidade finita de pontos de equilíbrio e um conjunto de órbitas  $\gamma_s$  tais que  $\alpha(\gamma_s)$  e  $\omega(\gamma_s)$  são ambos pontos de equilíbrio para cada  $\gamma_s$ .

*Ideia da demonstração.* Aqui, dizer que  $T(\cdot)$  é limitado dissipativo serve apenas para garantirmos que o  $\omega(x)$  é não vazio, compacto, conexo e invariante. Para provarmos o Teorema, vamos separar em três casos.

(i)  $\omega(x)$  não possui pontos regulares.

Nesse caso, como  $\omega(x)$  é não vazio, tem um ponto de equilíbrio lá, mas como  $\omega(x)$  é conexo, ele deve ser um conjunto unitário.

(ii)  $\omega(x)$  possui pontos regulares e uma órbita periódica.

Aqui, com a ajuda do Lema da Sequência Monótona, conseguimos provar que se  $\omega(x)$  possui uma órbita periódica, então ele é a própria órbita.

(iii)  $\omega(x)$  possui pontos regulares mas nenhuma órbita periódica.

Esse é o caso mais trabalhoso, porém, em resumo utilizamos novamente o Teorema da Sequência Monótona para garantir que, para cada ponto regular  $y$  que exista em  $\omega(x)$ , tanto  $\omega(y)$  quanto  $\alpha(y)$  são pontos de equilíbrio. Pela conexidade de  $\omega(x)$ , temos o resultado.  $\square$

Agora, mostremos um exemplo em que podemos aplicar esse Teorema. Considere o modelo biológico S.I.R. (que descreve a dinâmica entre as populações de suscetíveis (S), infectados (I) e recuperados (R) com relação a uma determinada doença) dado pelo seguinte sistema de três EDO's:  $\dot{S}(t) = qN - \beta S(t)I(t)/N(t) - \mu S(t) + cI(t)$ ,  $\dot{I}(t) = \beta S(t)I(t)/N(t) - \gamma I(t) - (\mu - c)I(t)$  e  $\dot{R}(t) = \gamma I(t) - \mu R(t)$ .

Utilizando da Teoria de Atratores, conseguimos mostrar que todas as soluções globais desse sistema entram em um plano onde a população é constante. O que nos leva a estudar a dinâmica em tal plano. Assim, utilizando o Teorema de Poincaré-Bendixson e o Critério de Dulac (que, em vias gerais, oferece-nos um critério para determinarmos quando órbitas periódicas não estão presentes em um campo planar), concluímos que as soluções são todas atraídas para os dois pontos de equilíbrio contidos no plano e a solução global que conecta eles (ver Figura 2). Com isso podemos afirmar que a doença nunca vai acabar, visto que o ponto de equilíbrio livre de infecção ( $E_1$ ) é instável e o ponto de equilíbrio com infectados ( $E_2$ ) faz parte do Atrator (união de todas as soluções globais limitadas) do sistema.

## Referências

- [1] LÓPEZ-DE-LA-CRUZ, Javier; OLIVEIRA-SOUSA, Alexandre N. **SIR models with vital dynamics, reinfection, and randomness to investigate the spread of infectious diseases.** ARXIV. 2404.12776, 2024.
- [2] DOERING, Claus Ivo; LOPES, Artur Oscar. **Equações diferenciais ordinárias:** IMPA, 2014.
- [3] HALE, Jack K. **Ordinary Differential Equations:** Courier Corporation, 2009.

# Equivalência entre Semigrupos Gradientes e Dinamicamente Gradientes

Guilherme Oliveira Cunha\*  
goc.cunha1703@gmail.com<sup>1</sup>

Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa (Orientador)  
alexandre.n.o.sousa@ufsc.br<sup>1</sup>

Matheus Cheque Bortolan (Coorientador)  
m.bortolan@ufsc.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Santa Catarina

**Palavras-chave:** Sistemas Dinâmicos, Sistemas Dinâmicos Gradientes, Sistemas Dinâmicos Dinamicamente Gradientes.

## Resumo:

Um dos principais problemas na área de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares e Equações Diferenciais é o estudo da robustez destes sistemas, quando sujeitos a pequenas perturbações. Mais especificamente, no que diz respeito aos sistemas gradientes, a pergunta que surge é: ao fazermos uma pequena perturbação num sistema gradiente, o sistema perturbado permanece sendo gradiente?

Esta era uma pergunta em aberto até recentemente. Em [4] os autores atacaram este problema da seguinte maneira:

1. definiram a classe dos *sistemas dinamicamente gradientes* (chamados anteriormente de *sistemas gradient-like*), extraindo dos sistemas gradientes apenas as suas propriedades dinâmicas;
2. mostraram que a classe dos sistemas dinamicamente gradientes era robusta quando sujeita à perturbações.

Diretamente da definição de sistemas dinamicamente gradientes apresentada em [4] segue que sistemas gradientes eram também dinamicamente gradientes. Assim, o resultado obtido até esse momento era: pequenas perturbações de sistemas gradientes davam origem a sistemas dinamicamente gradientes. Mas, ainda restava responder o seguinte: a classe dos sistemas dinamicamente gradientes era estritamente maior do que a classe dos sistemas gradientes, ou elas coincidiam?

A resposta para tal pergunta aparece em [3] (resultados estes que estão contidos em [1]): as classes são iguais, isto é, todo sistema dinamicamente gradiente é um

---

\*Bolsista de Iniciação Científica

sistema gradiente. A demonstração desse fato está baseada na construção de uma *função de Lyapunov* para um sistema dinamicamente gradiente, que só é possível utilizando os conceitos de *pares atratores-repulsores* e *decomposição de Morse*. É justamente nessa construção que o trabalho está firmado, isto é, o objetivo principal é: provar que as classes dos sistemas gradientes e dinamicamente gradientes coincidem. Para isso seguimos o trabalho [1], complementando o estudo com os trabalhos [2] e [5].

Para isso, seguimos a seguinte sequência: Começamos ao introduzir o conceito de semigrupos e algumas de suas propriedades, que serão a base para toda a teoria desenvolvida, além de também apresentar atratores globais e conjuntos  $\omega$ -limites, juntamente de suas propriedades, as quais serão usadas consistentemente para alcançar nosso objetivo. Em seguida, temos a introdução da definição de semigrupos gradientes e um estudo sobre suas propriedades dinâmicas, concluindo com um resultado sobre a existência de atratores globais para tais semigrupos.

Logo após, introduziremos a classe dos sistemas dinamicamente gradientes e faremos um estudo acerca dos pares de atratores locais e seus repulsores associados, que nos permitirá fazer uma análise mais fina nos atratores globais e obter uma função de Lyapunov associada a tais pares. Finalmente, introduziremos a decomposição de Morse para assim sermos capazes de contruir a função de Lyapunov para um semigrupo dinamicamente gradiente e demonstrar a equivalência desejada.

## Referências

- [1] Aragão-Costa, Éder Rítis. **Sistemas gradientes, decomposição de Morse e funções de Lyapunov sob perturbação**. Universidade de São Paulo, 2012.
- [2] Bortolan, Matheus C.; Carvalho, Alexandre N. and Langa, José A. **Attractors under autonomous and non-autonomous perturbations**. American Mathematical Soc., 2020.
- [3] Aragão-Costa, Éder Ritis; Caraballo, Tomás; Carvalho, Alexandre N and Langa, José A. **Stability of gradient semigroups under perturbations**. IOP Publishing, 2011.
- [4] Carvalho, Alexandre N. and Langa, José A. **An extension of the concept of gradient semigroups which is stable under perturbation**. Elsevier, 2009.
- [5] Sousa, Alexandre do Nascimento Oliveira and Ávila, Luciana. **Sistemas dinâmicos autônomos**. PETMAT UnB, 2016.

# Uma Introdução ao Caos através da Equação Logística Discreta

Lucas Bisoni\*

Licenciatura em Matemática

lucas.bisoni@ufpr.br<sup>1</sup>

Prof. Wagner Augusto Almeida de Moraes (Orientador)

Departamento de Matemática

wagnermoraes@ufpr.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná (UFPR)

**Palavras-chave:** equações de diferenças, estabilidade, ciclos, equação logística.

## Resumo:

As equações de diferenças são objetos matemáticos que permitem descrever o comportamento de fenômenos diversos através de modelos discretos, geralmente atrelados à evolução dos estados de um sistema ao longo do tempo. Sua relevância se estende às mais diversas áreas, como a biologia e ecologia, com a modelagem do crescimento populacional em certas espécies; a economia, com projeções sobre o comportamento de ativos financeiros; a engenharia e ciência da computação, com o processamento de sinais e controle digital; e a Análise Numérica, com os métodos para problemas de valor inicial, de ponto fixo e integração numérica.

O seguinte trabalho visa averiguar algumas propriedades da equação logística discreta, equação de diferenças utilizada inicialmente na modelagem do crescimento de populações, e descrita por

$$x(n+1) = \mu x(n)(1-x(n)), \quad (1)$$

considerando  $\mu \in [1, 4]$  constante.

Apesar de sua aparente simplicidade, esse modelo revela uma dinâmica curiosamente complexa, principalmente ao investigarmos a atratividade de seus  $2^n$ -ciclos,  $n \in \mathbb{N}$ . Tomando  $\mu_n$  como o maior valor de  $\mu$  para o qual o  $2^n$ -ciclo é atrator, constrói-se a sequência  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , que é caracterizada pela validade do limite abaixo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta, \quad (2)$$

em que  $\delta = 4,6692016\dots$  é conhecida como constante de Feigenbaum, e é universal para uma certo conjunto de mapas quadráticos. Devido a sua difícil construção,

---

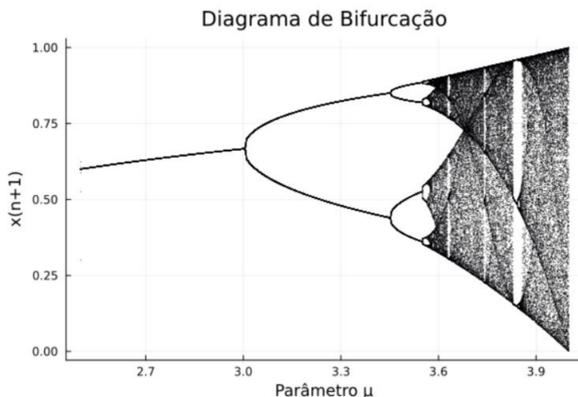
\*Voluntário do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).

pouco se sabe sobre esse número: sua transcendência e mesmo irracionalidade, por exemplo, ainda são apenas conjecturas. Além disso, também temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 3,57\dots = \mu_\infty, \quad (3)$$

de modo que, para  $\mu > \mu_\infty$ , o comportamento dos ciclos atratores da equação logística fica completamente caótico, tornando difícil prever para onde cada estado inicial irá convergir.

Isso é visível no diagrama de bifurcação abaixo, que associa a cada valor de  $\mu$  os pontos (ou ciclos) para os quais a sequência gerada pela iteração de (1) converge:



Elaborado com a linguagem Julia

## Referências

- [1] ELAYDI, Saber. **An Introduction to Difference Equations**. 3ªed. Estados Unidos: Springer, 2005.
- [2] HILBORN, Robert C.. **Chaos and Nonlinear Dynamics: An introduction for scientists and engineers**. 2ªed. Estados Unidos: Oxford University Press, 2001.
- [3] STROGATZ, Steven H.. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. 2ªed. Estados Unidos: CRC Press, 2018.

# *Geometria e Topologia*

*Comissão Científica:*

Prof. Dr. Diego Mano Otero

Prof. Dr. Juan Sebastián Herrera Carmona

# Introdução a Teoria de Nós

Felipe Monteiro Kiotheka\*  
felipe.kiotheka@ufpr.br<sup>1</sup>

Carlos Eduardo Durán Fernández (Orientador)  
cduran@ufpr.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná — UFPR

**Palavras-chave:** Nó, movimentos de Reidemeister, invariantes.

## Resumo:

Pegue um pedaço de corda, dê um *nó* nela. Agora cole as duas pontas da corda juntas para formar um laço com *nó*. O resultado é uma corda que não tem pontas soltas e que está realmente atada. A menos que usemos uma tesoura, não há como desatar a corda. Um nó é um laço atado de corda, exceto que pensamos nessa corda como se não tivesse espessura, e suas seções transversais são consideradas como um único ponto. Ou seja, é uma curva simples fechada no espaço.

Uma curva  $\alpha$  é dita equivalente a  $\beta$  se existe uma isotopia  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\phi(\alpha) = \beta$ . Como essa relação é de equivalência [2], dizemos que curvas da mesma classe de equivalência são o mesmo nó.

Chamamos essas imagens da figura (1) de projeções do nó. Isto é, uma projeção da curva do nó em um plano, mas mantendo a informação das interseções geradas. Estes pontos são chamados de cruzamentos, dizemos que eles passam por cima ou por baixo. Eles guardam a informação de qual parte da curva original está mais próximo do plano de projeção.

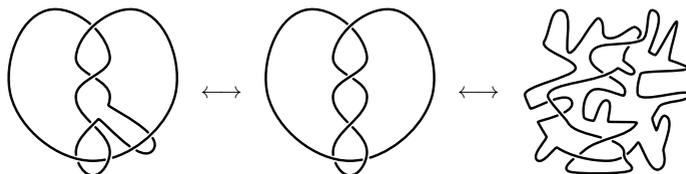


Figura 1: Projeções do mesmo nó, representado por diferentes curvas.

Nesse contexto, chamamos toda e qualquer isotopia  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de isotopia ambiente. Note que nem toda isotopia ambiente tem efeito na projeção de um nó, por exemplo, uma translação ao longo do eixo normal ao plano de projeção. Chamamos de isotopia plana as isotopias no plano de projeção de um nó. Diferente da isotopia

\*Bolsista do PET Matemática UFPR

ambiente, não é possível gerar novos cruzamento na projeção por meio de isotopia plana. [2]

Dentre todas as possíveis isotopias ambiente, vamos nos restringir a quatro tipos. Os três movimento de Reidemeister e a isotopia plana. O primeiro movimento de Reidemeister nos permite adicionar um remover uma torção ao nó. Podemos adicionar ou remover dois cruzamentos por meio do segundo movimento. E, por fim, com o terceiro movimento de Reidemeister somos capazes de deslizar uma parte do nó de um lado de um cruzamento para o outro. Com esses três movimentos, mais a deformação dada por uma isotopia plana, se duas projeções são de nós equivalentes, então conseguimos encontrar uma sequência de operações que leva uma projeção a outra [1].

Em uma projeção, chamamos de segmento um pedaço da curva que vai de um cruzamento por baixo a outro, passando apenas por cruzamentos por cima. Dizemos que uma projeção de um nó é tricolorável se cada um dos segmentos da projeção puder ser colorido com uma de três cores diferentes, de modo que em cada cruzamento: ou três cores diferentes se encontram ou todas as mesmas cores se encontram. Para que uma projeção seja tricolorável, também exigimos que pelo menos duas cores sejam usadas.

Suponha que um nó seja tricolorável e peguemos uma parte desse nó. É facilmente verificável que, se aplicar o movimento de Reidemeister I nessa parte, a tricolorabilidade é mantida. Já o segundo e terceiro movimentos, se dividirmos-os em vários casos, também podemos verificar que a tricolorabilidade é preservada [1]. Isso mostra que essa propriedade é invariante sob os movimentos de Reidemeister e, logo, se uma projeção a satisfaz então todas as projeções do mesmo satisfazem. Concluímos que a tricolorabilidade é uma característica, além das projeções, do nó.

Dito isso, considere o nó trivial da figura (5) e o nó trevo da figura (6). O que nos garante que eles não são o mesmo nó, diferindo apenas por movimentos de Reidemeister? A tricolorabilidade. Note que, o nó trivial não é tricolorável e o nó trevo é. Portanto, é impossível encontrar uma sequência de movimentos que leva a projeção do nó trivial à do nó trevo e, assim, representam nós distintos.

Agora sabemos que existem ao menos dois nós: aqueles tricoloráveis e os não tricoloráveis. O nó figure-eight não é tricolorável, a partir disso, não podemos afirmar que ele é equivalente ao nó trivial, entretanto certamente é diferente do nó trevo.

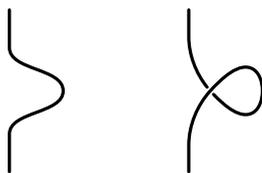


Figura 2: Movimento de Reidemeister I.

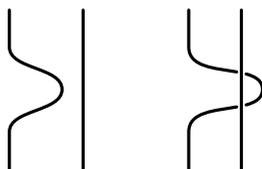


Figura 3: Movimento de Reidemeister II.

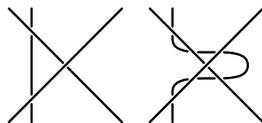


Figura 4: Movimento de Reidemeister III.

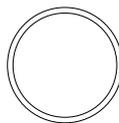


Figura 5: Uma projeção do nó trivial de um segmento.



Figura 6: O nó trevo é tricolorável.

## Referências

- [1] ADAMS, C. C. **The Knot Book**. New York: American Mathematical Society, 1994.
- [2] JOHNSON, I.; HENRICH, A. K. **An Interactive Introduction to Knot Theory**. New York: Courier Dover Publications, 2017.

# Homologias simplicial e singular como invariantes topológicos

Gabriel Luiz de Freitas\*  
gabrielfreitas@ufpr.br<sup>1</sup>

Gisele Teixeira Paula (Orientadora)  
giseleteixeira@ufpr.br<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** Homologia, Topologia Algébrica.

## Resumo:

No contexto da topologia algébrica, a homologia é o estudo que visa associar a determinados espaços topológicos certos objetos algébricos, denominados grupos de homologia, que servem como invariantes topológicos. Em outras palavras, estes grupos são tais que, se dois espaços forem topologicamente equivalentes (homeomorfos), então seus respectivos grupos de homologia serão algebricamente equivalentes (isomorfos).

O estudo da homologia é bastante geral dentro da topologia algébrica, sendo o conceito algébrico de homologia aplicável em diversos contextos. Os principais temas abordados aqui serão homologia formal, onde é estudada a teoria básica de homologia geral, homologia simplicial e homologia singular, onde são estudadas situações específicas em que podemos aplicar a homologia formal, a primeira sendo aplicável ao estudo de espaços homeomorfos a poliedros e a segunda sendo utilizada para um estudo mais abrangente de espaços.

Seja  $A$  um anel unitário comutativo e sejam, para cada  $p$  inteiro não negativo,  $C_p$  um  $A$ -módulo e  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  um homomorfismo de módulos tal que  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ . Dizemos que a sequência  $C = (C_p, \partial_p)$  é um complexo de cadeias, e escrevemos

$$C : \cdots \rightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0.$$

Definimos o  $p$ -ésimo grupo de homologia do complexo  $C$  como sendo o módulo quociente  $H_p = \frac{\text{Ker}(\partial_p)}{\text{Im}(\partial_{p+1})}$ .

## Homologia simplicial

Um primeiro exemplo de uma possível aplicação do conceito algébrico formal de homologia é a homologia simplicial. Com ela, definimos complexos de cadeias associados a poliedros e estudamos seus respectivos grupos de homologia.

---

\*Bolsista de Iniciação Científica no Programa INCTMat.

Sejam  $a_0, a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^n$ . Diremos que estes pontos são independentes quando os vetores  $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_r - a_0$  forem linearmente independentes.

Um **simplexo  $r$ -dimensional** é um conjunto  $s$  de elementos da forma  $\sum_{i=0}^r \alpha_i a_i$ , com cada  $\alpha_i \geq 0$  e  $\sum_{i=0}^r \alpha_i = 1$ , e com  $a_0, a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^n$  sendo pontos independentes fixos, e escrevemos  $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$ . Uma face de um simplexo  $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$  é um simplexo  $\langle a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_r} \rangle$ , com  $\{i_0, i_1, \dots, i_r\} \subset \{0, 1, \dots, r\}$ .

Um **poliedro** é um conjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  dado pela união de uma coleção finita de simplexos de  $\mathbb{R}^n$  tais que:

1. Se  $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$  é um simplexo de  $K$ , então qualquer face de  $s$  também é um simplexo de  $K$ ;
2. Se  $s$  e  $t$  são simplexos de  $K$ , então  $s \cap t = \emptyset$  ou  $s \cap t$  é uma face de um simplexo de  $K$ .

O primeiro passo da definição do complexo simplicial associado a um determinado poliedro  $K$  é orientar seus simplexos. Se  $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$  é um simplexo de  $K$ , passaremos a escrever  $\mathbf{s} = [a_0, a_1, \dots, a_r]$  para denotar o mesmo simplexo, mas dotado da orientação determinada pela ordem  $a_0 < a_1 < \dots < a_r$ .

Consideraremos que duas orientações de simplexos são equivalentes quando for possível obter uma por meio de uma permutação par na ordem dos vértices da outra. Duas orientações serão consideradas opostas quando não forem equivalentes. Assim, haverá duas formas de orientar um simplexo  $s = \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$ :  $[a_0, a_1, \dots, a_r]$  e  $[a_1, a_0, \dots, a_r]$ , as quais são opostas. Se  $\mathbf{s} = [a_0, a_1, \dots, a_r]$ , usaremos o símbolo  $-\mathbf{s}$  para fazer referência a  $s$  dotado da orientação oposta a  $\mathbf{s}$ , ou seja, escreveremos  $-\mathbf{s} = [a_1, a_0, \dots, a_r]$ .

Sendo  $A$  um anel unitário comutativo, seja, para cada  $r \geq 0$  inteiro,  $C_r(K, A)$  o  $A$ -módulo livre gerado pelos simplexos orientados de dimensão  $r$  de  $K$ , com a restrição de que, para todo  $\mathbf{s}$  simplexo de  $K$ , temos  $\mathbf{s} + (-\mathbf{s}) = 0$ . Exceto quando há a necessidade de sermos mais explícitos, denotamos  $C_r(K, A)$  por  $C_r(K)$ .

Cada operador bordo  $\partial_r : C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K)$  será dado por

$$\partial_r[a_0, a_1, \dots, a_r] = \sum_{i=0}^r (-1)^i [a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_r],$$

onde  $[a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_r]$  representa o simplexo orientado  $(r-1)$ -dimensional que tem como vértices cada ponto  $a_j$ , para  $j \neq i$ . Além disso, se  $p = \sum \alpha_i \mathbf{s}_i \in C_r(K, A)$ , então colocamos  $\partial_r p = \sum \alpha_i \partial_r \mathbf{s}_i$ .

Com os operadores bordo assim definidos vale que, para cada  $r > 1$  inteiro, a composição  $C_r(K) \xrightarrow{\partial_r} C_{r-1}(K) \xrightarrow{\partial_{r-1}} C_{r-2}(K)$  é nula. Com isso, obtemos que a sequência

$$C(K) \cdots \rightarrow C_{r+1}(K) \xrightarrow{\partial_{r+1}} C_r(K) \xrightarrow{\partial_r} C_{r-1}(K) \rightarrow \cdots \rightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \rightarrow 0$$

é um complexo de cadeias, chamado de complexo simplicial de  $K$ , e seus grupos de homologia são chamados de grupos de homologia simplicial de  $K$ .

Alguns dos principais resultados de homologia simplicial seguem de outros resultados de homologia singular, que é uma generalização da homologia simplicial.

## Homologia singular

Sejam  $\Delta_r = \{(t_0, \dots, t_r); t_i \geq 0, \sum_{i=0}^r t_i = 1\}$  e  $A$  um anel unitário comutativo. Definimos um  $r$ -simplexo singular em um determinado espaço topológico  $X$  como uma aplicação contínua  $\sigma : \Delta_r \rightarrow X$ .

Para cada  $r$  inteiro não negativo, seja  $S_r(X, A)$  o  $A$ -módulo livre gerado pelos  $r$ -simplexos de  $X$ , denotado apenas por  $S_r(X)$  em contextos gerais. Para  $i = 0, \dots, r$ , definimos a  $i$ -ésima face de um  $r$ -simplexo  $\sigma$  de  $X$  como o  $(r-1)$ -simplexo  $\partial_i \sigma : \Delta_{r-1} \rightarrow X$ , dado por

$$\partial_i \sigma(t_0, \dots, t_{r-1}) = \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{r-1}).$$

Cada operador bordo  $\partial : S_r(X) \rightarrow S_{r-1}(X)$  é definido por  $\partial \sigma = \sum_{i=0}^r (-1)^i \partial_i \sigma$ . A composição  $S_r(X) \xrightarrow{\partial_r} S_{r-1}(X) \xrightarrow{\partial_{r-1}} S_{r-2}(X)$  também é nula para  $r > 1$  inteiro, e então a sequência

$$S(X) : \dots \rightarrow S_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial_{p+1}} S_p(X) \xrightarrow{\partial_p} \dots \rightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \rightarrow 0$$

é um complexo de cadeias. Esse é o complexo singular do espaço  $X$ , e seus grupos de homologia são os grupos de homologia singular de  $X$ .

Por fim, temos os seguintes resultados:

**Teorema 1.** Se  $X$  e  $Y$  são dois espaços topológicos homeomorfos, então  $H_r(S(X)) \cong H_r(S(Y))$  para todo  $r$  inteiro não negativo.

**Teorema 2.** Se  $K$  é um poliedro e  $A$  é um anel unitário comutativo, então  $H_r(C(K, A)) \cong H_r(S(K, A))$  para todo  $r$  inteiro não negativo, isto é, os grupos de homologia singular de  $K$  são isomorfos aos grupos de homologia simplicial de  $K$  em cada dimensão.

Com esses teoremas, conclui-se a fundamentação teórica das teorias de homologia singular e simplicial. O primeiro teorema implica que grupos de homologia singular são invariantes topológicos. O segundo teorema estabelece uma equivalência entre as homologias singular e simplicial, e como consequência segue que grupos de homologia simplicial também são invariantes topológicos. Mais ainda, se  $X$  é um espaço topológico triangulável, ou seja, se  $X$  é homeomorfo a um poliedro  $K_1$ , então podemos generalizar e definir os grupos de homologia simplicial de  $X$  como sendo os grupos de homologia simplicial de  $K$ . Esta definição independe da triangulação de  $X$  pois, mesmo que  $X$  seja triangulado por um outro poliedro  $K_2$ , segue que  $K_1$  e  $K_2$  são homeomorfos e então  $H_r(C(K_1)) \cong H_r(C(K_2))$ .

## Referências

- [1] LAGES, E.; **Homologia básica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [2] HATCHER, A.; **Algebraic topology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

# Uma relação entre redução de formas binárias e geometria hiperbólica

Gabrieli Kmiecik

`gabi.kmiecik@hotmail.com`<sup>1</sup>

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Gisele Teixeira Paula (Orientadora)

`giseleteixeira@ufpr.br`<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bacharelado em Matemática - UFPR

<sup>2</sup>Departamento de Matemática - UFPR

**Palavras-chave:** Formas quadráticas, Domínio fundamental; Ação de grupos.

## Resumo:

O objetivo deste estudo é entender um exemplo onde a teoria de redução de formas quadráticas binárias se relaciona com encontrar pontos no domínio fundamental da ação do grupo modular  $PSL(2, \mathbb{Z})$  no plano hiperbólico.

Inicialmente apresentaremos as definições de domínio fundamental e de ação de grupos. Dado um grupo  $(G, *)$ , uma ação desse grupo em um espaço  $X$  é uma função  $f : G \times X \rightarrow X$  que leva cada par  $(g, x)$  a um ponto  $g \cdot x$  de modo que  $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 * g_2) \cdot x$  e  $e \cdot x = x$  para todo  $g_1, g_2 \in G$  e  $x \in X$ , em que  $e$  é o elemento neutro do grupo.

Um domínio fundamental para a ação de um grupo  $G$  em um espaço  $X$  é um subconjunto  $\mathcal{F} \subset X$  tal que:

1.  $X = \bigcup_{g \in G} g \cdot \mathcal{F}$ ;
2.  $\text{int}(\mathcal{F})$  é denso em  $\mathcal{F}$  e  $\partial\mathcal{F}$  tem medida nula;
3.  $\text{int}(\mathcal{F}) \cap g(\text{int}\mathcal{F}) = \emptyset$  para todo  $g \in G$  que seja diferente de  $e$ .

Depois, será feita uma breve introdução sobre formas quadráticas e como é possível enérgá-las como matrizes. Apresentaremos os conceitos de matriz reduzida de Minkowski e propriamente reduzida. Em seguida, entenderemos o que significa reduzir formas quadráticas, em termos de exibir um domínio fundamental para a ação do grupo das matrizes unimodulares, isto é, matrizes inteiras com determinante  $\pm 1$ , no conjunto das formas quadráticas positivas definidas.

Por fim, mostraremos como podemos relacionar o exemplo da ação do grupo modular em geometria hiperbólica com a busca por formas binárias reduzidas.

## Referências

- [1] RAMANATHAN, K. G.. **Lectures on Quadratic Forms by C.L. Siegel**. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1957.

# Grupos de Lie em relação com as hiperoperações exponenciais.

Saulo Minatti\*

saulominatti@outlook.com<sup>1</sup>

Francisco Carlos Caramello Junior<sup>†</sup>

francisco.caramello@ufsc.br<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Santa Catarina

<sup>2</sup>Universidade Federal de Santa Catarina

**Palavras-chave:** tetração, hiperoperação exponencial, grupos de Lie.

## Resumo:

A ideia que incitou a realização desse trabalho foi de visualizar a “tetração” em contexto de espaços topológicos. A tetração e as hiperoperações foram estudadas no ano passado, em uma outra Iniciação Científica.

No entanto, a ideia foi deixada um pouco de lado quando descobrimos uma interessante relação entre os grupos de Lie e as hiperoperações exponenciais: elas foram definidas na IC do ano passado, e são uma família de operações obtidas através de uma recursão natural que preservam propriedades algébricas.

Sendo assim, nessa apresentação, pretendemos falar sobre os Grupos de Lie e a exponencial de Lie, e de alguns resultados que os relacionam com as hiperoperações exponenciais. A seguir, apresentamos definições e resultados prévios necessários:

Sejam  $\mathbb{K}, \mathbb{L}$  corpos ordenados, e  $\varphi: K \rightarrow L$  um isomorfismo ordenado. Denotamos:

$$\mathbb{K} \equiv_{\varphi} \mathbb{L}.$$

Sejam  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Então, a **tetração** de  $x$  por  $n$  é dada por:

$${}^n x := x^{x^{x^{\dots^x}}}.$$

Em que há  $n$  cópias de  $x$ , incluindo a base.

Para  $n \in \{-1, 0\}$ , por conta da recursão, definimos:

$${}^0 x = 1 \quad \text{e} \quad {}^{-1} x = 0.$$

---

\*Bolsista do PET Matemática UFSC.

<sup>†</sup>Orientador e professor do Departamento de Matemática da UFSC.

As definições e resultados a seguir são todas contribuições da IC realizada no ano passado:

Sejam  $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  e  $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ . A  $n$ -ésima hiperoperação exponencial de base  $b$  é definida por:

$$\begin{cases} x \cdot_b^n y := x + y & \forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ se } n = -1; \\ x \cdot_b^n y := \exp_b(\log_b(x) \cdot_b^{n-1} \log_b(y)) & \forall x, y \in K_b^n, \text{ se } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

O conjunto de todos os valores em que  $\cdot_b^n$  está bem definida é denotado por  $K_b^n$ :

$$K_b^n \times K_b^n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot_b^n y \text{ está bem definido}\}.$$

**Proposição.** Sejam  $b \in (1, \infty)$  e  $n \in \mathbb{N}^*$ . Então:

$$K_b^n = (b^{n-2}, \infty).$$

**Teorema.** Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $b \in (1, \infty)$ . Então, a quádrupla a seguir é um corpo ordenado:

$$(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq).$$

O chamamos de  $n$ -ésimo corpo exponencial de base  $b$ .

**Corolário.** Sob as hipóteses do Teorema anterior, temos os seguintes isomorfismos de ordem:

$$(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq) \cong_{\exp_b} (K_b^{n+1}, \cdot_b^n, \cdot_b^{n+1}, \leq);$$

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \cong_{\exp_b^n} (K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq).$$

Em que  $\exp_b^n$  é a  $n$ -ésima composição de  $\exp_b$  com si mesma  $\exp_b$ , e  $\exp_b(x) := b^x$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

A partir de agora, as definições e resultados são frutos da IC atual. Os resultados a seguir são parte da literatura, salve dito o contrário.

Seja  $M$  uma variedade suave. O colchete de Lie de campos vetoriais suaves  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  são o campo vetorial  $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$  tal que:

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

A partir de agora utilizaremos  $e$  para representar o elemento neutro de um grupo arbitrário.

Seja  $G$  uma variedade suave e um grupo. Dizemos que  $G$  é um grupo de Lie quando sua operação e a aplicação de inversão são ambas funções suaves entre variedades diferenciáveis.

Seja  $G$  um grupo de Lie. A álgebra de Lie de  $G$  é  $\mathfrak{g} := T_e G$ , munida do colchete  $[\cdot, \cdot]$  tais que, para cada  $v^1, v^2 \in T_e G$ ,  $[v^1, v^2] := [\tilde{v}^1, \tilde{v}^2]_e$  em que  $\tilde{v}_g^i := d(L_g)_e(v^i) \quad \forall g \in G, i \in \{1, 2\}$ , e  $[\tilde{v}^1, \tilde{v}^2]_e$  é o colchete de Lie usual aplicado em  $e$ .

Note que  $\tilde{v}^i \in \mathfrak{X}(G)$ . De fato, dado  $g \in G$ ,  $\tilde{v}_g^i := d(L_g)_e(v^i)$  é uma derivação em  $L_g(e) = ge = g$ , isto é,  $\tilde{v}_g^i \in T_g G$ , para cada  $i \in \{1, 2\}$ .

Seja  $G$  um grupo de Lie. Um subgrupo a 1-parâmetro de  $G$  é um homomorfismo de grupos  $\varphi: (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$ .

Dado  $G$  um grupo de Lie e  $X \in \mathfrak{g}$ , denotamos  $\lambda_X$  como o único<sup>1</sup> subgrupo a 1-parâmetro de  $G$  tal que  $\lambda'_X(0) = X$

Seja  $G$  um grupo de Lie. A exponencial de Lie de  $G$  é definida como a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \text{Exp}: \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \lambda_X(1). \end{aligned}$$

Agora sim, com as ferramentas estudadas nessa IC, foi possível visualizar a sequência de corpos isomorfos via função exponencial como uma sequência de grupos de Lie isomorfos a Lie (isto é, isomorfos como grupos e difeomorfos). Todos os resultados a seguir são contribuições do nosso trabalho.

Sejam  $b \in (1, \infty)$  e  $n \in \mathbb{N}$ . O  $n$ -ésimo grupo exponencial de base  $b$  é o grupo representado pelo par ordenado  $(K_b^n, {}_b^{n-1})$ .

**Observação.** A Definição acima faz sentido pois, como as triplas  $(K_b^n, {}_b^{n-1}, {}_b^n)$  são todas corpos, cada  $K_b^n$ , com sua respectiva primeira operação, é um grupo.

**Proposição.** Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $b \in (1, \infty)$ . Então, o  $n$ -ésimo grupo exponencial de base  $b$  é um grupo de Lie de dimensão 1.

**Teorema.** Sejam  $b \in (1, \infty)$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Então,  $\exp_b: (K_b^n, {}_b^{n-1}) \rightarrow (K_b^{n+1}, {}_b^n)$  é um isomorfismo de grupos de Lie.

Seja  $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ . Denotamos  $(K^n, \cdot^n) := (K_e^{n+1}, \cdot_e^n)$  como o  $n$ -ésimo grupo exponencial natural.

**Teorema.** Sejam  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  e  $\text{Exp}_n: \mathfrak{g}_n \rightarrow K^n$  a exponencial de Lie do grupo exponencial natural  $K^n$  ( $K^n$  é um grupo de Lie de dimensão 1 por uma Proposição anterior).

Então,  $\mathfrak{g}_n \cong \mathbb{R} e$ :

$$\text{Exp}_n(X) = \exp^{n+1} \left( \frac{X}{\prod_{k=0}^n k_e} \right).$$

Para cada  $X \in \mathbb{R} e$ .

<sup>1</sup>a existência e unicidade são provadas na referência [2], nos teoremas 1.23 e 1.28, utilizando a conexidade de  $\mathbb{R}$ .

## Referências

- [1] LEE, John M. **Introduction to Smooth Manifolds**. Springer, 2012.
- [2] ALEXANDRINO, Marcos M.; BETTIOL, Renato G. **Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions**. Springer, 2015.

# *Otimização*

*Comissão Científica:*

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Evelin Heringer Manoel Krulikovski

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Mael Sachine

Prof. Dr. Thiago de Oliveira Quinelato

# Otimização Livre de Derivadas Aplicado a Compressão de Imagens

Bianca Mendes Francisco \*

bianca.francisco@ufpr.br <sup>1</sup>

Evelin H. M. Krulikovski (Orientadora)

evelin.krulikovski@ufpr.br <sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bacharelado em Ciência da Computação - UFPR

<sup>2</sup>Departamento de Matemática - UFPR

**Palavras-chave:** Otimização livre de derivadas, Busca direta direcional, Otimização restrita. Compressão de imagens.

## Resumo:

Neste trabalho temos como objetivo tratar de otimização livre de derivadas para problemas de otimização escalar. Especificamente, iremos considerar uma restrição geométrica denominada restrição de cardinalidade (Programas Matemáticos com Restrições de Cardinalidade (MPCaC)). Tais problemas são difíceis de resolver, mas fornecem soluções esparsas. Portanto, usaremos este resultado para trabalharmos com o problema de Compressão de imagens.

Consideramos problemas de otimização definidos por:

$$\begin{array}{ll} \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} & f(x) \\ \text{sujeito a} & g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, \dots, p, \\ & h_j(x) = 0, \forall j = 1, \dots, m, \\ & \|x\|_0 \leq \alpha, \end{array}$$

onde  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são funções continuamente diferenciáveis (linear ou não linear) e a restrição de cardinalidade  $\|x\|_0 \leq \alpha$  implica na solução esparsa. Além disso, nós assumimos que as derivadas das funções envolvidas ( $f$ ,  $g$  e  $h$ ) não podem ser calculadas ou explicitamente aproximadas.

Primeiramente, para lidar com a difícil restrição de cardinalidade, utilizamos uma reformulação contínua relaxada [1]:

---

\*Bolsista do **PICME**: Programa de Iniciação Científica e Mestrado do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0078034523496683>

$$\begin{aligned} & \underset{x,y}{\text{minimizar}} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && x \in \Omega, e^T y \geq n - \alpha, \\ & && x_i y_i = 0, \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n, \\ & && 0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

onde  $e \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de uns e  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$  [4, 5]. Além disso, para garantir que a solução respeite a condição de Hadamard  $x \circ y = 0$ , aplicamos uma penalização à função objetivo, resultando na seguinte reformulação:

$$\begin{aligned} & \underset{x,y}{\text{minimizar}} && f(x) + \tau h(x, y) \\ & \text{sujeito a} && x \in \Omega, e^T y \geq n - \alpha, \\ & && 0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

onde  $\tau > 0$  é o parâmetro de penalização e  $h(x, y)$  é uma função continuamente diferenciável. Levando em conta que não podemos calcular as derivadas de tais problemas, iremos resolver tal esquema de penalização usando o algoritmo proposto em [3]. Nele foi utilizado o Generalized Pattern Search (GPS), um dos métodos de otimização livre de derivadas baseado na busca direta direcional.

Os métodos livres de derivadas baseados na busca direta direcional são utilizados quando as derivadas da função objetivo não estão disponíveis, não são confiáveis, ou são custosas em questão de tempo e/ou memória. Eles são algoritmos que buscam um ponto de derivada nulo, ou seja, o ponto de mínimo ou máximo local mais próximo, usando apenas os valores da função objetivo para explorar o domínio e procurar esse ponto, sem calcular a derivada de fato.

Estamos interessados em aplicar este problema geral em Compressed Sensing (CS), técnica baseada em otimização convexa, que utiliza a redundância e a esparsidade dos sinais amostrados para poder reconstruí-los. A CS é uma técnica que permite a conversão de sinais em um conjunto discreto de números, proporcionando que eles sejam processados, analisados, armazenados e transmitidos por sistemas computacionais. Então temos

$$x = \Psi s$$

onde:  $x$  é o vetor com as medidas ou amostras iniciais,  $\Psi$  é matriz de transformação em base com representação esparsa (como a de Fourier, veja Figura 1),  $\Phi$  é a matriz de amostragem e  $s$  é o vetor de coeficientes (esparso). O novo sistema que representa o processo de amostragem é

$$y = \Phi x.$$

O novo problema pode ser traduzido como a obtenção da solução  $s \in \mathbb{R}^n$  com a representação mais esparsa possível para o sistema linear

$$y = \Phi x \Rightarrow y = \Phi \Psi s.$$

Na CS, o sinal é obtido por meio de amostras, que são computadas em outra base na qual a representação deste sinal é esparsa, ou seja, em que a maioria de seus coeficientes são nulos. Isso nos permite armazenar menos informações, pois só é preciso guardar os coeficientes não nulos, por isso consideramos a restrição de cardinalidade.

As aplicações de CS cobrem a compressão de dados, criptografia de imagens, reconstrução e sensoriamento remoto de radares, melhoria da qualidade de sinais de áudio e determinadas aplicações médicas. Neste trabalho, é tratada a compressão e reconstrução de imagens (Figura 1). Foi realizada uma busca por um banco de dados de imagens e a compressão das imagens é realizada por meio de algoritmos de otimização nas linguagens de programação C e Matlab. Esses resultados serão apresentados no evento. Além do artigo de Krulikovski et al. [3] usamos também o livro de Conn et al. [2].

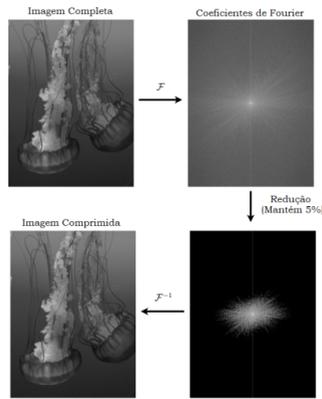


Figura 1: Exemplo de Compressão de Imagens.  $\mathcal{F}$  denota a transformada de Fourier.

## Referências

- [1] BURDAKOV, O. P., KANZOW, C., and SCHWARTZ A. **Mathematical programs with cardinality constraints: reformulation by complementarity-type conditions and a regularization method**. SIAM J. Optim., 26(1): 397–425, 2016.
- [2] CONN, A.R., SCHEINBERG, K., and VICENTE, L.N. **Introduction to Derivative-Free Optimization**. Philadelphia: SIAM, 2009.
- [3] CUSTÓDIO, A.L., KRULIKOVSKI, E.H.M., and RAYDAN, M. **A hybrid direct search and projected simplex gradient method for convex constrained minimization**. Taylor & Francis: Optimization Methods and Software, pp.1–35, 2023.
- [4] KRULIKOVSKI, E. H. M., RIBEIRO, A. A., and SACHINE, M. **On the weak stationarity conditions for mathematical programs with cardinality constraints: a unified approach**. Appl. Math, 84: 3451-3473, 2021.
- [5] KRULIKOVSKI, E. H. M., RIBEIRO, A. A., and SACHINE, M. **A Comparative Study of Sequential Optimality Conditions for Mathematical Programs with Cardinality Constraints**, JOTA, 192:1067–1083, 2022.

# Otimização com Restrição de Cardinalidade aplicada a Compressão de Imagens

Frank Wolff Hannemann \*

frankhannemann@ufpr.br <sup>1</sup>

Evelin H. M. Krulikovski (Orientadora)

evelin.krulikovski@ufpr.br <sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bacharelado em Ciência da Computação - UFPR

<sup>2</sup>Departamento de Matemática - UFPR

**Palavras-chave:** Restrição de Cardinalidade, Sistema Linear, Método do Gradiente Projetado, Compressão de imagens.

## Resumo:

**Compressed sensing (CS)** é uma técnica inovadora para aquisição de dados e processamento de sinais que permite a reconstrução de sinais esparsos a partir de um número de amostras muito menor do que o exigido pelo teorema de Nyquist-Shannon [1]. A base dessa técnica reside em dois princípios fundamentais: esparsidade e incoerência.

- **Esparsidade:** Refere-se à propriedade de um sinal que pode ser representado por um número reduzido de coeficientes não nulos em algum domínio (por exemplo, frequência ou wavelet).
- **Incoerência:** Garante que as medições capturadas no domínio original contenham informações suficientes para a reconstrução do sinal esparsos no domínio transformado.

As aplicações do CS são amplas, indo desde compressão de imagens em dispositivos médicos, como ressonância magnética, até a otimização de aquisição de dados em sensores e redes de comunicação.

## Explicação do Processo de Compressão:

O processo de compressão ilustrado na Figura 1 segue os princípios do CS. Na primeira etapa, temos a equação  $y = \Phi x$ , onde  $y$  é um vetor de medições obtido a partir de  $x$  (a imagem original) por meio da matriz  $\Phi$ , que corresponde à matriz de amostragem (ou medições comprimidas). O vetor  $x$  representa a imagem original, que é esparsa no domínio transformado. Na segunda etapa, busca-se a reconstrução da

---

\*Aluno Pesquisador no Grupo Ciência de Dados, Aprendizagem de Máquina e Otimização (C-DAMO).

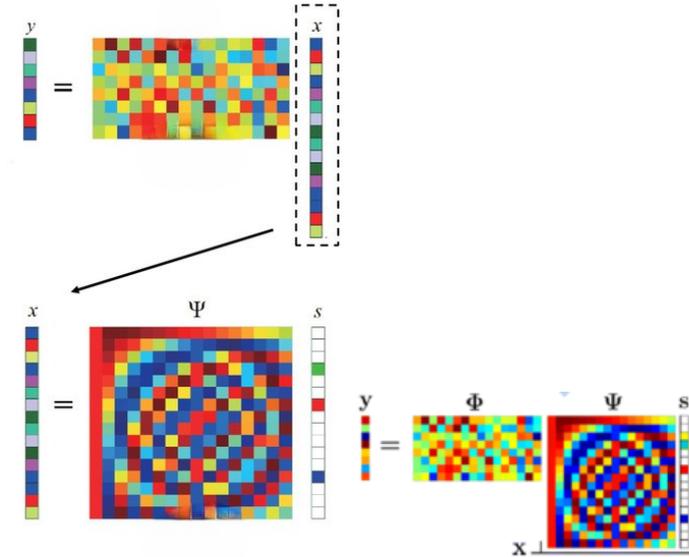


Figura 1: Compressão de Imagens.

imagem original a partir das medições  $y$ . Para isso, utiliza-se a transformação  $\Psi$ , que é uma matriz de base (por exemplo, uma base wavelet ou Fourier), onde a imagem  $x$  pode ser esparsa. O vetor  $s$  é o vetor esparsa que contém poucos coeficientes não nulos após a transformação pela matriz  $\Psi$ , representando a imagem original no domínio transformado. Assim, o processo pode ser descrito pelas equações:

$$y = \Phi x \quad \text{e} \quad x = \Psi s,$$

onde:  $x$  é o vetor que representa a imagem original,  $y$  é o vetor de medições comprimidas,  $\Phi$  é a matriz de amostragem,  $\Psi$  é a matriz de base esparsa (por exemplo, Fourier),  $s$  é o vetor esparsa com poucos coeficientes não nulos. O objetivo é encontrar uma solução esparsa  $s$  que, quando transformada de volta por  $\Psi$ , nos dê uma boa aproximação da imagem original  $x$ .

Portanto, neste trabalho temos como objetivo tratar de Programas Matemáticos com Restrições de Cardinalidade (MPCaC) [3, 4] aplicados a CS. Tais problemas são difíceis de resolver, mas fornecem soluções esparsas. Portanto, usaremos o algoritmo proposto em [2] para resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} && f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 + \lambda_{reg} \|x\|^2 \\ & \text{sujeito a} && g(x) \leq 0, \\ & && h(x) = 0, \\ & && Hx = z, \\ & && l \leq x \leq u, \\ & && \|x\|_0 \leq \alpha, \end{aligned}$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e o conjunto viável (exceto a última restrição) é não vazio, convexo,

fechado e fácil de projetar (caixa, esferas, semi-espaços).

Além disso, nós usaremos uma abordagem para melhorar soluções obtidas pelo chamado método LASSO, que usa a norma L1. O método L1 é uma técnica clássica utilizada no CS para resolver problemas de reconstrução de sinais esparsos. O método de restrição de cardinalidade oferece uma abordagem alternativa à minimização da norma L1 [2]. Em vez de minimizar a norma L1, o método de restrição de cardinalidade limita explicitamente o número de coeficientes não nulos na solução. Especificamente, o problema é formulado como a minimização de uma função objetivo, sujeita a uma restrição que impõe um limite superior à cardinalidade (ou seja, o número de elementos não nulos) do vetor de solução. Isso significa que a solução final terá, no máximo,  $\alpha$  coeficientes não nulos, promovendo uma solução altamente esparsa. Essa abordagem é útil em cenários onde a esparsidade é conhecida a priori ou onde há uma necessidade de limitar explicitamente o número de coeficientes não nulos.

A escolha do método de restrição de cardinalidade como alternativa à minimização da norma L1 oferece maior controle sobre a esparsidade, o que pode ser vantajoso em cenários específicos. No entanto, implementar essa abordagem para compressão de imagens utilizando compressed sensing ainda apresenta desafios. Nosso projeto visa justamente aplicar o método de restrição de cardinalidade para comprimir imagens, explorando a esparsidade inerente delas.

## Referências

- [1] SHANNON, C. E. **A Mathematical Theory of Communication**. Bell System Technical Journal, 27(3): 379-423, 1948.
- [2] KREJIĆ, N., KRULIKOVSKI, E. H. M., E RAYDAN, M. **An augmented Lagrangian approach for cardinality constrained minimization applied to variable selection problems**. Applied Numerical Mathematics, 2023, <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2023.12.006>.
- [3] KRULIKOVSKI, E. H. M., RIBEIRO, A. A., and SACHINE, M. **On the weak stationarity conditions for mathematical programs with cardinality constraints: a unified approach**. Appl. Math, 84: 3451-3473, 2021.
- [4] KRULIKOVSKI, E. H. M., RIBEIRO, A. A., and SACHINE, M. **A Comparative Study of Sequential Optimality Conditions for Mathematical Programs with Cardinality Constraints**, JOTA, 192:1067–1083, 2022.

# Redes Neurais MLP e o Algoritmo de Backpropagation na Simulação da Superfície de Uma Esfera

Halena Kulmann Duarte\*

halenakulmann@gmail.com<sup>1</sup>

Eder Augusto Penharbel (Orientador)

eder.penharbel@ifc.edu.br<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto Federal Catarinense - Campus Blumenau

<sup>2</sup>Departamento de Ensino – IFC campus Blumenau

**Palavras-chave:** Aprendizado de Máquina, Multilayer Perceptron, Backpropagation.

## Resumo:

As Redes Neurais Artificiais (RNAs) têm se destacado como uma ferramenta poderosa no aprendizado de máquina. Entre os modelos mais populares está o Multilayer Perceptron (MLP), que consiste em múltiplas camadas de neurônios organizadas em uma camada de entrada, uma ou mais camadas ocultas e uma camada de saída. Elas são amplamente utilizadas para resolver problemas não linearmente separáveis, utilizando funções de ativação como a sigmoide ou a tangente hiperbólica.

O principal método utilizado para o treinamento das MLPs é o algoritmo de Backpropagation, que ajusta os pesos das conexões entre os neurônios para minimizar o erro entre a saída prevista pela rede e o valor desejado. O processo envolve duas etapas principais: na propagação direta, os dados de entrada são processados pela rede, resultando em uma saída. Na fase de retropropagação, o erro é calculado e propagado para trás, permitindo o ajuste dos pesos e dos biases, que proporcionam maior flexibilidade na saída da rede.

A função de erro mais comumente utilizada é o erro quadrático médio (RMSE), definido por

$$E = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - a_i)^2}, \quad (1)$$

onde  $t_i$  é o valor esperado e  $a_i$  é a saída da rede [2]. Para ajustar os pesos e biases, utilizamos o método de descida do gradiente. O gradiente da função de erro em relação a um peso  $W_{jk}^m$  na camada  $m$  é dado por

---

\*Graduanda em Ciência da Computação, desenvolvendo o projeto como parte do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) no IFC Campus Blumenau.

$$\frac{\partial E}{\partial W_{jk}^m} = \delta_j^m a_k^{m-1}, \quad (2)$$

tal que  $\delta_j^m$  é a sensibilidade, também chamada de delta, do neurônio  $j$  na camada  $m$ , e  $a_k^{m-1}$  é a ativação do neurônio  $k$  na camada anterior [1]. A atualização dos pesos é então realizada por

$$W_{jk}^m(k+1) = W_{jk}^m(k) - \eta \frac{\partial E}{\partial W_{jk}^m}, \quad (3)$$

e, fazendo a substituição de (2) em (3), obtemos:

$$W_{jk}^m(k+1) = W_{jk}^m(k) - \eta \delta_j^m a_k^{m-1}, \quad (4)$$

em que  $\eta$  é a taxa de aprendizado, fixada em 0,01 neste trabalho. Esse valor foi escolhido após testes, pois não é baixo a ponto de desacelerar a convergência, mas também não é alto demais, o que ajuda a evitar o sobreajuste.

Para os biases  $b_j^m$ , o gradiente é dado por

$$\frac{\partial E}{\partial b_j^m} = \delta_j^m, \quad (5)$$

e a atualização deles é realizada por

$$b_j^m(k+1) = b_j^m(k) - \eta \frac{\partial E}{\partial b_j^m}. \quad (6)$$

Substituindo a equação (5) na equação (6), concluímos que

$$b_j^m(k+1) = b_j^m(k) - \eta \delta_j^m. \quad (7)$$

A sensibilidade  $\delta_j^m$  é calculada com base na função de ativação utilizada. Para uma função de ativação  $f$  e a saída desejada  $t_j$ , o delta para a camada de saída  $m$  é

$$\delta_j^m = (t_j - a_j^m) f'(z_j^m),$$

na qual  $a_j^m$  é a saída do neurônio  $j$  na camada  $m$  e  $f'(z_j^m)$  é a derivada da função de ativação. Para camadas ocultas, a sensibilidade é calculada como

$$\delta_j^m = \left( \sum_k \delta_k^{m+1} W_{jk}^{m+1} \right) f'(z_j^m), \quad (8)$$

onde  $\delta_k^{m+1}$  e  $W_{jk}^{m+1}$  são, respectivamente, as sensibilidades e os pesos da camada seguinte [1].

Seguindo os conceitos apresentados, a implementação de uma rede MLP e do algoritmo de Backpropagation foi realizada em Python para simular a superfície de uma esfera. O objetivo era prever as coordenadas tridimensionais de pontos em uma esfera a partir de parâmetros de entrada que, no caso, foram ângulos esféricos. A rede foi treinada para aprender a relação entre as entradas (ângulos) e as saídas (coordenadas cartesianas), utilizando um conjunto de treinamento criado através de [3]

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi), \quad (9)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi), \quad (10)$$

$$z = r \cos(\theta), \quad (11)$$

tal que  $\theta$  e  $\phi$  são ângulos em coordenadas esféricas, e  $r$  é o raio da esfera. Durante o treinamento, o erro foi propagado para trás e os pesos e vieses foram ajustados com base no gradiente do erro, buscando minimizar a função de custo.

Os resultados experimentais demonstram a evolução do aprendizado da rede. Na primeira tentativa, os pontos plotados formam um pequeno aglomerado fora da região esperada da esfera, obtidos da rede sem treinamento. Em seguida, após o início do mesmo, os pontos começam a se distribuir de maneira mais coerente, mas ainda formam um plano disperso.

À medida que o treinamento avança, observa-se uma redução gradual do erro, o que resulta em uma melhora significativa na predição. Uma curva parcial emerge, indicando que a rede está começando a capturar a relação correta entre os ângulos esféricos e as coordenadas cartesianas. Aumentando o número de iterações, chamadas de épocas, a rede prevê uma saída que, a olho humano, se assemelha satisfatoriamente à superfície de uma esfera, atingindo a menor taxa de erro observada. Assim, os testes foram encerrados, pois o valor do RMSE se aproximou de zero, ficando abaixo de 0,05.

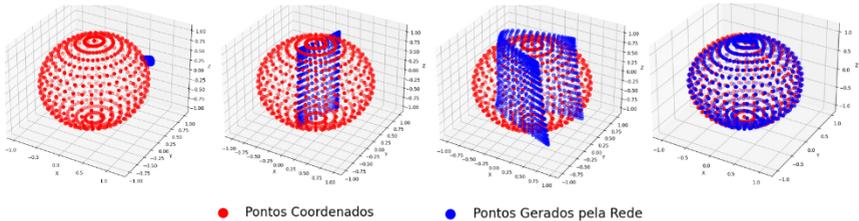


Figura 1: Predição da rede sem treinamento e resultados das predições com variações nos valores de cada parâmetro, ordenadas de forma decrescente, da esquerda para a direita, de acordo com o RMSE obtido.

Com os resultados obtidos, este estudo demonstra a eficácia das redes MLP, treinadas com o algoritmo de Backpropagation, para a simulação de fenômenos complexos como a superfície esférica, evidenciando sua capacidade de modelar relações não lineares.

## Referências

- [1] HAGAN, M. T.; DEMUTH, H. B.; BEALE, M. H.; DE JESÚS, O. **Neural Network Design (2nd Edition)**. Martin Hagan, 2014.
- [2] HAYKIN, S. O. **Neural Networks and Learning Machines**. Pearson, 2008.
- [3] FLEMING, H. **Coordenadas esféricas**. 2003. Disponível em: <https://fma.if.usp.br/~fleming/diffeo/node4.html>. Acesso em: 29 ago. 2024.

# Implementação de Algoritmos Evolucionários Multiobjetivos em Redes Neurais Informadas pela Física

Lucas Xavier\*

xavierlucassrl@gmail.com<sup>1</sup>

Thiago de Oliveira Quinelato (Orientador)

thiago.quinelato@ufpr.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** redes neurais, algoritmos evolucionários, equações diferenciais.

**Resumo:** Introduzidas em [1], as Redes Neurais Informadas pela Física (PINNs) provaram ser uma ferramenta poderosa e inovadora para encontrar soluções aproximadas para Equações Diferenciais Parciais (EDPs). Essas redes distinguem-se da formulação geral de outros modelos de redes neurais por incorporarem em seu treinamento EDPs (possivelmente não lineares) que modelam fenômenos físicos.

Embora poderosas, essas redes ainda enfrentam obstáculos, pois, para certas EDPs, as PINNs não apresentam resultados numéricos satisfatórios [2]. No presente estudo, analisamos o emprego da formulação original das PINNs utilizando a biblioteca DeepXDE [3] com três EDPs: Korteweg-de-Vries modificada (mKdV), Sine-Gordon e a equação de Schamel. Os resultados numéricos são bastante satisfatórios para a solução da mKdV; por outro lado, há desafios significativos para a solução da equação de Schamel e da Sine-Gordon usando PINNs.

Para estudar o erro da aproximação da rede em cada uma das EDPs citadas, adotamos a perda na norma  $L^2$  feita pela biblioteca numpy [4] com a fórmula

$$\text{np.linalg.norm}(y_{\text{true}} - y_{\text{pred}}) / \text{np.linalg.norm}(y_{\text{true}}),$$

onde  $y_{\text{true}}$  é um vetor contendo em cada elemento a solução exata para um valor de  $x$  no domínio e  $y_{\text{pred}}$  é um vetor com a solução prevista pela rede. Tal cálculo foi empregado a cada valor de  $a$  e de  $t$  na grade mostrada na Figura 1, na resolução da Sine-Gordon:

---

\*Voluntário do Programa de Voluntariado Acadêmico.

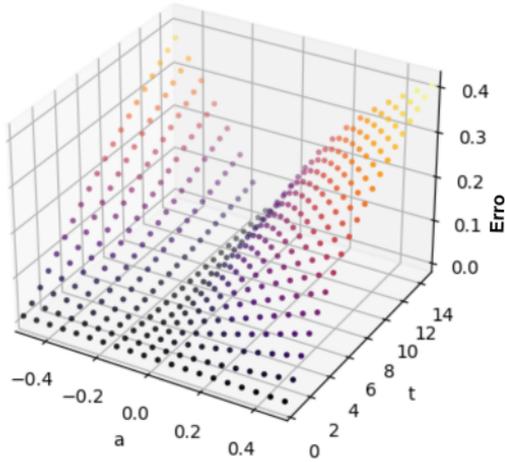


Figura 1: Erro na norma  $L^2$  ao longo do tempo ( $t$ ) e velocidade ( $a$ ) da Sine-Gordon.

**Equação de Korteweg-de-Vries modificada (mKdV):** A mKdV é uma equação diferencial parcial não linear obtida a partir de uma alteração na equação de Korteweg-de-Vries. Sua expressão é dada por:

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \quad (1)$$

Para o treinamento da rede nos pontos de borda e condição inicial, usamos a solução exata:

$$u(x, t) = a \operatorname{sech}(k(x - ct)). \quad (2)$$

Comparada às outras duas EDPs analisadas no presente estudo, a mKdV foi a que gerou os resultados mais satisfatórios quando implementada na formulação original de PINNs.

**Equação de Sine-Gordon:** A equação de Sine-Gordon é uma equação diferencial parcial não linear usada principalmente para descrever a dinâmica de sistemas de ondas com acoplamento não linear e comportamento solitônico, ela é expressa por:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) = 0. \quad (3)$$

A rede terá como objetivo aproximar a solução  $u(x, t)$ . Utilizaremos em seu treinamento a seguinte solução para definir suas condições inicial e de borda:

$$u(x, t) = 4 \arctan \left( \exp \left( \gamma \frac{x - at}{\sqrt{1 - a^2}} \right) \right). \quad (4)$$

Após o treinamento, embora a PINN tenha demonstrado uma queda significativa em seu erro durante o treinamento, a aproximação da rede se provou insatisfatória para todas as arquiteturas e parâmetros testados, já que a solução aproximada não coincidia com a solução de referência.

**Equação de Schamel:** A equação de Schamel é uma equação diferencial parcial não-linear que modela o desenvolvimento de uma estrutura de onda localizada e coerente que se propaga em um meio dispersivo não linear. A equação pode ser expressa como:

$$u_t + d\sqrt{u}u_x + u_{xxx} = 0. \quad (5)$$

A solução exata da equação de Schamel que usaremos para definir as condições inicial e de borda será:

$$u(x, t) = a \operatorname{sech}^4(k(x - ct)). \quad (6)$$

Nenhuma arquitetura de PINNs testada foi capaz de aproximar bem a solução da equação de Schamel.

Por fim, diante das presentes dificuldades apresentadas pela aproximação das EDPs acima, os próximos passos deste trabalho envolvem aprimorar a formulação das Redes Neurais Informadas pela Física incorporando algoritmos de otimização já bem estabelecidos. Recentemente, resultados promissores nessa área foram apresentados em [5] ao integrar algoritmos evolucionários multiobjetivos às PINNs (as EMOPINNs). Entretanto, ainda é incerto se a aproximação da solução das três EDPs estudadas nesta pesquisa será tão satisfatória quanto aquelas vistas em [5]. Assim, serão empregados na resolução das equações mKdV, Sine-Gordon e equação de Schamel os três seguintes algoritmos evolucionários multiobjetivos: NSGA-II, NSGA-III e MOEA/D.

## Referências

- [1] RAISSI, M.; PERDIKARIS, P.; KARNIADAKIS, G. E. **Physics-informed neural networks:** A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. Providence: Elsevier, 2019.
- [2] WANG, S.; YU, X.; PERDIKARIS, P. When and why PINNs fail to train: A neural tangent kernel perspective. **Journal of Computational Physics**, v. 449, p. 110768, 2022. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110768>.
- [3] LU, L.; MENG, X.; MAO, Z.; KARNIADAKIS, G. E. DeepXDE: A deep learning library for solving differential equations. **SIAM Review**, v. 63, n. 1, p. 208–228, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/19M1274067>.
- [4] HARRIS, C. R.; MILLMAN, K. J.; WALT, S. J. van der; GOMMERS, R.; VIRTANEN, P.; COURNAPEAU, D.; WIESER, E.; TAYLOR, J.; BERG, S.; SMITH, N. J.; KERN, R.; PICUS, M.; HOYER, S.; KERKWIJK, M. H. van; BRETT, M.; HALDANE, A.; RÍO, J. F. del; WIEBE, M.; PETERSON, P.; GÉRARD-MARCHANT, P.; SHEPPARD, K.; REDDY, T.; WECKESSER, W.; ABBASI, H.; GOHLKE, C.; OLIPHANT, T. E. Array programming with NumPy. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 585, n. 7825, p. 357–362, set. 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [5] de Wolff, T.; LINCOPI, H. C.; MARTÍ, L.; SANCHEZ-PI, N. MOPINNs: an evolutionary multi-objective approach to physics-informed neural networks. In: **Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion**. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2022. (GECCO '22), p. 228–231. ISBN 9781450392686. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/3520304.3529071>.

# *Splines* para Representação de Características Faciais com Aplicação em Biometria

Maria Luiza Sampaio Logrado\*

logradomalu@gmail.com<sup>1</sup>

Thiago de Oliveira Quinelato (Orientador)

thiago.quinelato@ufpr.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná – UFPR

**Palavras-chave:** *splines*, visão computacional, reconhecimento facial.

## Resumo

O reconhecimento facial é uma área de crescente interesse devido às suas inúmeras aplicações em segurança, vigilância e autenticação. No entanto, o desenvolvimento de sistemas robustos e precisos enfrenta desafios, especialmente na detecção e extração de características faciais. Este trabalho resume uma abordagem inovadora que utiliza *splines* e redes neurais para melhorar o reconhecimento facial. A metodologia proposta foca na detecção precisa de pontos-chave no rosto, a partir dos quais *splines* cúbicas são geradas e usadas como entrada para o treinamento de uma rede neural utilizada para reconhecimento de faces.

## Metodologia

A metodologia proposta combina técnicas de processamento de imagens e aprendizado de máquina, destacando-se por sua capacidade de capturar e representar características faciais.

A detecção de características faciais é realizada utilizando o classificador Haar Cascades [1, 2], que é amplamente utilizado em reconhecimento facial. Classificadores calibrados e validados para detecção de olhos, nariz e boca foram aplicados após a detecção inicial do rosto na imagem.

Para a extração dos contornos faciais, foi aplicado o algoritmo de Canny [3, 4] nas imagens. Esse método assegura a identificação dos contornos mais relevantes, sendo especialmente eficaz na definição das características faciais.

Após a detecção dos contornos, um processo de redução de pontos é aplicado para selecionar apenas os pontos mais representativos, simplificando a criação das *splines* e removendo pontos espúrios. Essa etapa é crucial para reduzir a complexidade do modelo, permitindo que a *spline* mantenha a forma geral dos contornos faciais sem comprometer a precisão. A partir de um grafo, criado com os *pixels* que formam os contornos das características faciais, são selecionadas as linhas contínuas mais

---

\*Voluntária do Programa de Voluntariado Acadêmico.

representativas (as componentes conexas do grafo com mais nós) e, a partir delas, os *pixels* mais relevantes, que são usados para gerar as *splines* que representam cada característica facial.

Para criar uma *spline* que passe por uma sequência de pontos, utilizam-se curvas de Hermite, encaixando uma curva à outra nos pontos finais de cada curva. A técnica utilizada, baseada em *splines* Catmull-Rom [5, 6], garante suavidade e continuidade na transição entre as curvas geradas localmente, facilitando a modelagem das características faciais.

A abordagem proposta utiliza *splines* para modelar as características faciais extraídas, como olhos, nariz e boca, gerando representações que servem de entrada para a rede neural. A combinação da detecção de bordas e sua descrição por *splines* permite a criação de representações precisas e eficientes das características faciais.

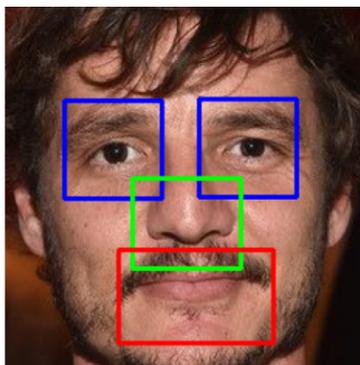
### Aplicação e Resultados

Primeiramente, é realizada a detecção do rosto e a imagem é recortada para facilitar a identificação das características faciais, conforme ilustrado na Figura 1.

Uma vez identificadas as características na imagem, como, por exemplo, o nariz (ver Fig. 2a), extraímos seus contornos, conforme mostrado na Figura 2b. Em seguida, é necessário reduzir os pontos que representam a característica facial, o que é feito utilizando grafos. Com isso, é possível eliminar componentes conexas com menos nós, obtendo o resultado mostrado na Figura 2c.



(a) Detecção do rosto.



(b) Detecção das características faciais.

Figura 1: Detecções feitas pelo modelo Haar Cascades.



Figura 2: Seleção dos pontos por onde passará a *spline*.

## Conclusão

A metodologia proposta explora a combinação de *splines* e redes neurais no reconhecimento facial. A aplicação de *splines* para modelar características faciais extraídas por meio de técnicas avançadas de detecção, como o algoritmo de Canny, resulta em uma abordagem robusta. Os resultados sugerem que essa metodologia pode superar os desafios tradicionais do reconhecimento facial, como variações de pose e iluminação, oferecendo uma solução promissora para aplicações práticas.

O trabalho está em fase de desenvolvimento, com foco atual na eliminação de pontos espúrios restantes. Isso será realizado por meio do uso de árvores geradoras mínimas, uma abordagem que facilitará a identificação dos principais pontos relevantes. Uma vez estabelecidos esses pontos, eles serão ordenados de forma que a *spline* passe por eles de maneira orientada. Posteriormente, será implementada a modelagem de uma rede neural para aprimorar ainda mais os resultados do reconhecimento facial.

## Referências

- [1] VIOLA, P.; JONES, M. Rapid object detection using a boosted cascade of simple features. In: **Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. CVPR 2001**. [S.l.: s.n.], 2001. v. 1.
- [2] OpenCV. **haarcascades**. Disponível em: (<https://github.com/opencv/opencv/tree/master/data>).
- [3] CANNY, J. A computational approach to edge detection. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, PAMI-8, n. 6, p. 679–698, 1986.
- [4] OpenCV. **Canny Edge Detection**. Disponível em: ([https://docs.opencv.org/3.4/da/d22/tutorial\\_py\\_canny.html](https://docs.opencv.org/3.4/da/d22/tutorial_py_canny.html)).
- [5] CATMULL, E.; ROM, R. A class of local interpolating splines. In: BARNHILL, R. E.; RIESENFELD, R. F. (Ed.). **Computer Aided Geometric Design**. Academic Press, 1974. p. 317–326. ISBN 978-0-12-079050-0. Disponível em: (<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-079050-0.50020-5>).
- [6] TWIGG, C. **Catmull-Rom splines**. Pittsburg: CMU school of computer science, 2003. Disponível em: (<http://graphics.cs.cmu.edu/nsp/course/15-462/Fall04/assts/catmullRom.pdf>).

# Aplicação de Pesquisa Operacional para a Modelagem de um Portfólio de Investimentos <sup>1</sup>

Pedro Henrique Cardoso

Licenciatura em Matemática - UFSCar Campus Sorocaba

pedrohenriquecardoso@estudante.ufscar.br

**Orientador:** Sadao Massago

Departamento de Física, Química e Matemática - UFSCar Campus Sorocaba

sadao@ufscar.br

**Palavras-chave:** Pesquisa Operacional; Teoria de Markowitz; Otimização Linear; Otimização Não-Linear; Método Simplex; Matemática Financeira.

## **Resumo:**

O presente trabalho de pesquisa teve como objetivo a construção de uma carteira de investimentos formada por ativos negociados na BOVESPA para o ano de 2024, utilizando como principal ferramenta a Pesquisa Operacional, e dentro dessa ciência matemática, utilizar teorias do universo da Economia, como por exemplo a Teoria de Markowitz. Dentro da Pesquisa Operacional, existem diferentes tipos de modelagem matemática para a construção do problema, como a Otimização Linear e a Não-Linear. A modelagem matemática se deu através da utilização de equações lineares, construindo um problema de Otimização Linear para a otimização de um portfólio de investimentos, no qual a solução desse problema é fornecido por meio do Método Simplex, com o auxílio do software MATLAB. Os ativos inseridos na pesquisa referem-se a uma análise do desempenho dos mesmos referente ao ano de 2023, na qual foram analisados os dez melhores ativos durante esse período, e selecionados os cinco ativos que tiveram as melhores correlações. O trabalho também foi acrescido com conceitos de Matemática Financeira, de alguns Parâmetros Estatísticos, e também da caracterização da Otimização Não-Linear, por ter muitas condições similares a da Linear, como as Condições de Karush-Kuhn-Tucker.

A **Pesquisa Operacional** (PO) se determina como uma ciência matemática que possui como principal objetivo a aplicação de diversos métodos científicos para a resolução de inúmeros problemas detentores de uma alta complexidade. A PO desempenha de maneira fundamental o papel de ferramenta para o auxílio na tomada de decisões, e de otimização da operação de recursos finitos [1].

A **Otimização Linear** se estabelece como um modelo matemático empregado para descrever um determinado problema, na qual a palavra "linear" evidencia que todas as funções matemáticas existentes dentro desse modelo são funções lineares, enquanto a palavra "programação" se compreende como sinônimo de "planejamento" [1].

A solução de um Problema de Programação Linear (PPL) se dá pelo processo de otimização, isto é, encontrar uma solução ótima para o problema, respeitando todas as restrições do mesmo. O problema de otimização se estabelece pelo descobrimento dos minimizadores (ou maximizadores) de uma função existente em uma certa região [3].

O **Método Simplex** é um algoritmo utilizado para a busca de soluções de problemas de otimização linear, na qual o mesmo possibilita que computacionalmente consiga resolver problemas com um alto número de variáveis e restrições, e encontrar a solução ótima

---

<sup>1</sup>Trabalho recebeu auxílio do PIBIC

do PPL de maneira eficiente. Ele se determina como um algoritmo de busca, que inicia sua procura em um vértice existente na região factível, e desloca-se pelos outros vértices do espaço factível, até obter o vértice ótimo, que contém a solução ótima do problema [3].

Ao criar uma carteira de investimentos, o interesse do investidor geralmente está em obter o maior lucro com o menor risco de perda de capital. Para tanto, há a necessidade de utilizar algum modelo matemático para atingir o objetivo esperado ou se aproximar o máximo possível deste. A **Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz** veio para auxiliar nesta perspectiva e nas tomadas de decisões do mercado financeiro. Na realidade, o modelo média - variância de Markowitz foi o precursor na área de otimização de portfólio, onde o retorno esperado e a volatilidade do mesmo são de extrema importância na definição da melhor carteira de investimento. O problema é formulado de modo a se minimizar o risco do portfólio ou maximizar o nível de retorno do mesmo [2].

Modelando um problema para um investidor de perfil moderado, o mesmo deve sempre buscar a minimização dos riscos da carteira, sendo que os critérios de minimização do risco da carteira variam de investidor para investidor, assim como as restrições a serem inseridas no problema.

Para a escolha dos ativos que compõem o portfólio de investimentos, foi necessário realizar uma análise dos ativos que tiveram bons desempenhos no ano de 2023, como também fazer uma avaliação sobre o cenário econômico previsto para 2024. Com isso foram escolhidos dez ativos oriundos de diferentes setores da Economia, na qual depois foram selecionados os cinco ativos que apresentaram as melhores correlações para compor a carteira. Esses cinco ativos são: GOGL34 (ALPHABET), SBSP3 (SABESP), JBSS3 (JBS), PETR4 (PETROBRÁS) e DISB34 (WALT DISNEY), sendo que o rendimento percentual médio que esses ativos tiveram no ano de 2023, estão na Tabela 1.

**Tabela 1** - Rendimento percentual médio dos cinco melhores ativos no ano de 2023

Ano	GOGL34	SBSP3	JBSS3	PETR4	DISB34
2023	3,2967%	2,9017%	1,8008%	5,2992%	-0,0242%

Fonte: INVESTING. Dados Históricos

Levando em conta, que os ativos escolhidos GOGL34, SBSP3, JBSS3, PETR4 e DISB34 possuem um retorno individual médio anual de  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$  e  $u_5$ , respectivamente, fornecido pelos valores que estão presentes da Tabela 1, com isso, o retorno total da carteira ( $R_p$ ) é concedido por:

$$R_p = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 + x_5u_5$$

no qual:

$x_1$  : peso do ativo GOGL34 (ALPHABET);

$x_2$  : peso do ativo SBSP3 (SABESP);

$x_3$  : peso do ativo JBSS3 (JBS);

$x_4$  : peso do ativo PETR4 (PETROBRÁS);

$x_5$  : peso do ativo DISB34 (WALT DISNEY).

Com todas as restrições, que foram definidas por meio da análise de variância e covariância entre os ativos, forma-se um problema de Programação Linear a ser resolvido pelo Método Simplex:

$$\text{Maximizar } f(x) = 0,032967x_1 + 0,029017x_2 + 0,018008x_3 + 0,052992x_4 - 0,000242x_5$$

$$\text{Sujeito a } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_4 \leq 0,45$$

$$x_1 \geq 0,05$$

$$x_2 \geq 0,05$$

$$x_3 \geq 0,05$$

$$x_4 \geq 0,05$$

$$x_5 \geq 0,05$$

$$x_5 \leq 0,07$$

$$x_5 + x_2 \leq 0,3$$

$$x_1 + x_3 \geq 0,4$$

$$\text{e } x_1 \leq 0,25.$$

Utilizando o *software* MATLAB, e a linha de comando Linprog, para resolver o problema pelo Método Simplex, a otimização fornece o retorno total da carteira para o ano de 2024, que é fornecido pela maximização da função objetivo:

$$f(x) = 0,037678950 \text{ ou } f(x) = 3,767895\%$$

Como também os valores dos pesos que cada ativo irá ter na composição da carteira otimizada:

$$x_1 = 25\%; x_2 = 10\%; x_3 = 15\%; x_4 = 45\%; x_5 = 5\%.$$

Não é possível construir um modelo de carteira ótima, pois cada uma delas é formada para um tipo de perfil de investidor específico. Desta forma, observa-se que a formação de um portfólio, bem como sua modelagem, é algo extremamente pessoal. Por fim, investir em uma carteira ações pode ser benéfico para os indivíduos que têm a o discernimento de dar os passos corretos. Todo o estudo matemático presente nesta pesquisa serve para que este fim seja alcançado. A Matemática não garante na prática a rentabilidade dada em seus resultados, porém direciona o investidor para o horizonte que almeja, minimizando possíveis resultados indesejáveis.

A **Otimização Não-Linear** também pode ser utilizada para a construção de um Problema Não-Linear (PNL), mas a modelagem se determina pela existência de equações não-lineares, na qual a procura pelo ponto ótimo envolve uma complexidade maior, sendo que para a obtenção do mesmo, podem ser utilizados diferentes métodos, como por exemplo, o Método de Newton [3].

## Referências

- [1] ARENALES, M. N., ARMENTANO, V. A., AND MORABITO NETO, REINALDO ; YANASSE, H. H. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- [2] ASSAF NETO, A. **Mercado financeiro**. São Paulo: Atlas, 2014.
- [3] LUENBERGER, D. G., YE, Y., ET AL. **Linear and nonlinear programming**, vol. 2. Nova York: Springer, 1984.

# Resolução de Problemas de Regressão Linear Utilizando Aproximações por Autovalores em Problemas Quadráticos

Rafaella Gulin dos Santos <sup>\*</sup>  
rafaellagulin@ufpr.br <sup>1</sup>

Mael Sachine (Orientadora)  
mael@ufpr.br <sup>1</sup>

Ademir Alves Ribeiro (Coorientador)  
ademir.ribeiro@ufpr.br <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** Otimização Irrestrita, Problemas Quadráticos, Decomposição Espectral.

## Resumo:

Neste trabalho, focamos na transformação de um problema genérico de regressão linear em um problema quadrático equivalente e sem restrições, com o objetivo principal de investigar métodos para melhorar a eficiência computacional dessa transformação.

Dado um conjunto de  $N$  amostras de treinamento  $\{(\omega_i, \xi_i)\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , o problema de regressão linear pode ser formulado como:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\xi_i - x^\top \omega_i)^2 + \eta^{-1} \|x\|_2^2 \right\},$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  representa os coeficientes do modelo de regressão e  $\eta$  é um parâmetro de regularização. Este pode ser reescrito como o seguinte problema quadrático [1]:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ c^\top x + x^\top Q x + \eta^{-1} \|x\|_2^2 \right\},$$

onde:

- $Q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i \omega_i^\top$  é uma matriz semidefinida positiva;
- $c = \frac{-2}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \omega_i \in \mathbb{R}^n$ .

---

<sup>\*</sup>Voluntária do Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME

Para melhorar a eficiência computacional, investigamos a aproximação da matriz  $Q$  através do truncamento da sua decomposição espectral.

Sendo  $Q$  uma matriz simétrica, existe uma matriz ortogonal  $P$  e uma matriz diagonal  $D$  tal que  $Q = PDP^T$ , onde as entradas de  $D$  são os autovalores de  $Q$  e as colunas de  $P$  são os autovetores correspondentes. Assim,  $Q$  pode ser expressa como [2]:

$$Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T,$$

em que  $\lambda_i$  são os autovalores e  $v_i$  são os autovetores de  $Q$ .

No contexto do estudo, truncamos a matriz  $Q$  utilizando seus  $k$  principais autovalores, denotando a aproximação por  $Q_k$ , da forma:

$$Q_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i v_i^T,$$

com  $\lambda_i$  sendo os  $k$  maiores autovalores de  $Q$ , ordenados em ordem decrescente, e  $v_i$  os autovetores correspondentes.

A maneira utilizada para verificar a proximidade entre a matriz truncada  $Q_k$  e a matriz original  $Q$  foi selecionar o menor valor de  $k$  tal que:

$$\frac{\|Q - Q_k\|_2}{\|Q\|_2} < tol,$$

onde  $tol$  é uma tolerância predefinida.

Utilizando quatro conjuntos públicos de dados de diferentes dimensões, disponíveis no UCI Machine Learning Repository [3], buscamos determinar a quantidade ideal de autovalores a serem considerados em cada caso, de modo que a aproximação seja eficaz e a integridade das informações da matriz original seja mantida. Comparamos os resultados obtidos a partir da matriz original com aqueles derivados da matriz aproximada, para avaliar o impacto do truncamento espectral na solução do problema quadrático.

A implementação foi feita na linguagem de programação Octave. Em cada conjunto de dados, realizamos 100 replicações aleatórias, utilizando 70% dos dados originais para selecionar o valor de  $k$  em cada caso. Após a definição de  $k$ , minimizamos o problema quadrático através do gradiente, dado pela equação

$$2 \left( Q + \frac{1}{\eta} I \right) x + c = 0,$$

onde  $I$  é a matriz identidade com mesma dimensão de  $Q$ . Calculamos então a distância entre o vetor  $x_k$  obtido através do truncamento da matriz, que considera os  $k$  autovalores mais significativos, e o vetor  $x$  obtido a partir da matriz original, por meio do erro relativo.

Concluímos que a escolha do valor de  $k$  é sensível à natureza do problema, uma vez que a quantidade ideal de autovalores necessária para uma boa aproximação varia de acordo com a estrutura dos dados. Em particular, para os conjuntos de dados analisados, que apresentam muitas colunas linearmente dependentes, observamos que a aproximação se estabiliza de maneira eficiente com um número reduzido de autovalores. Além disso, o desempenho das soluções também é influenciado pelo parâmetro  $\eta$ , que controla o nível de regularização aplicado.

## Referências

- [1] VREUGDENHIL, R.; NGUYEN, V. A.; EFTEKHARI, A.; MOHAJERIN ESFAHANI, P. **Principal Component Hierarchy for Sparse Quadratic Programs**. arXiv e-print, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.12022>.
- [2] GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F. **Matrix Computations**. 4th ed. Philadelphia, Johns Hopkins University Press, 2013.
- [3] KELLY, M.; LONGJOHN, R.; NOTTINGHAM, K. **The UCI Machine Learning Repository**. <https://archive.ics.uci.edu>.

# Redes Neurais Fisicamente Guiadas (PINNs) na Aproximação de Soluções para a Equação de Benjamin-Bona-Mahony

Samuel Kutz Paranhos \*  
samuelkutzparanhos1@gmail.com <sup>1</sup>

Roberto Ribeiro (Orientador)  
robertoribeiro@ufpr.br <sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais, Deep Learning, Physics-Informed Neural Networks, Equação de BBM

## Resumo:

As equações diferenciais parciais (EDPs) desempenham um papel fundamental na modelagem de diversos fenômenos físicos, como a propagação de ondas, a condução de calor e em áreas de estudo como mecânica quântica e dinâmica de fluidos [1]. Tradicionalmente, a solução dessas equações é obtida por métodos numéricos, como diferenças finitas e elementos finitos, que oferecem soluções discretas e podem ser computacionalmente custosos conforme as dimensões do problema aumentam. Neste trabalho, apresentamos uma abordagem moderna para a aproximação de soluções: as redes neurais fisicamente guiadas (Physics-Informed Neural Networks, PINNs). As PINNs permitem encontrar uma solução aproximada contínua para o problema ao treinar uma rede neural para minimizar o resíduo da EDP juntamente com a sua função perda, tirando proveito de todo o ferramental disponível para *Deep Learning*, como Diferenciação Automática (AD) [2].

Especificamente, o objetivo deste trabalho é investigar a técnica de PINNs, apresentada em [2], na aproximação da solução da equação de Benjamin-Bona-Mahony (BBM) na forma:

$$\begin{aligned}u_t + u_x + u u_x - u_{xxt} &= 0, & (x, t) &\in (-10, 20) \times (0, 4) \\u(x, 0) &= u_0(x), & x &\in (-10, 20), \\u(-10, t) &= g_1(t), \\u(20, t) &= g_2(t) & t &\in (0, 4),\end{aligned}\tag{1}$$

onde  $u_0(x)$  é a **condição inicial** e  $g_1, g_2$  são **condições de contorno** que nos dizem como  $u$  se comporta nas bordas do domínio de  $x$ .

\*Voluntário do Programa de Iniciação Científica no programa PIBIC/2024

A equação de BBM foi deduzida por Benjamin, Bona e Mahony como uma alternativa mais estável numericamente do que o modelo de KdV, o qual é aplicado na modelagem da dinâmica de ondas aquáticas assim como em diversas outras situações práticas [3].

A equação (1) possui solução viajante

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2(k(x - ct)), \quad (2)$$

onde dado  $A$ ,  $k = \sqrt{\frac{A}{12 + 4A}}$  e  $c = 1 + \frac{A}{3}$ .

Fisicamente, uma solução viajante de uma EDP pode ser entendida como uma onda que se propaga com velocidade constante sem mudar de forma. Neste contexto, a solução (2) pode ser entendida como uma onda de amplitude  $A$  que se propaga com velocidade  $c$ .

Uma vez que conhecemos uma solução exata para a equação (1), vamos utilizá-la como referência para investigar a acurácia do procedimento numérico proposto (PINNs). Isto posto, considere as funções  $g_1$  e  $g_2$  como a própria solução exata, aplicada nos extremos de  $x$ , respectivamente. Assim, a EDP que queremos resolver via PINNs se resume em:

$$\begin{aligned} u_t + u_x + u u_x - u_{xxt} &= 0, & (x, t) &\in (-10, 20) \times (0, 4) \\ u(x, 0) &= A \operatorname{sech}^2(kx), & x &\in (-10, 20), \\ u(-10, t) &= A \operatorname{sech}^2(k(-10 - ct)) \\ u(20, t) &= A \operatorname{sech}^2(k(20 - ct)) & t &\in (0, 4). \end{aligned} \quad (3)$$

A técnica de PINNs consiste em treinar a rede com uma função perda que incorpore os seguintes problemas de otimização dos resíduos da EDP:

1.

$$\min |\mathcal{D}(x, t)| \quad \text{s.a.} \quad (x, t) \in (-10, 20) \times (0, 4),$$

onde

$$\mathcal{D} := u_t + u_x + u u_x - u_{xxt}$$

2.

$$\min |u(x, 0) - u_0(x)| \quad \text{s.a.} \quad x \in (-10, 20).$$

3.

$$\min |u(-10, t) - g_1(t)| + |u(20, t) - g_2(t)| \quad \text{s.a.} \quad t \in (0, 4).$$

Podemos utilizar o Erro Quadrático Médio associado a cada resíduo:

$$\text{EMQ} = \text{EMQ}_{\mathcal{D}} + \text{EMQ}_0 + \text{EMQ}_b$$

com

$$\text{EMQ}_{\mathcal{D}} = \frac{1}{N_{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{D}}} |f(x_i, t_i)|^2,$$

- $(x_i, t_i)$ ,  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{D}}$ ,  $N_{\mathcal{D}}$  representa pontos de colocação escolhidos aleatoriamente em  $(-10, 20) \times (0, 4)$

$$\text{EMQ}_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} |u(x_i, 0) - u_0(x_i)|^2,$$

- $x_i, i = 1, \dots, N_0$  representa  $N_0$  pontos de colocação no intervalo  $(-10, 20)$

$$\text{EMQ}_b = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} |u(x_i, t_i)|^2,$$

- $(x_i, t_i), i = 1, \dots, N_b$ , pontos de colocação no intervalo em  $(-10, 20) \times (0, 4)$

Este procedimento numérico foi implementado em Python por meio da biblioteca DeepXDE [4]. A figura 1 ilustra a solução aproximada pela rede no tempo  $t = 2$ . O erro relativo é da ordem de  $10^{-3}$ , o que mostra que o método é eficaz. Os próximos passos serão testar a eficiência das PINNs na equação de BBM com diferentes condições de contorno, assim como investigar se a PINN é capaz de capturar algumas propriedades físicas das ondas viajantes como por exemplo, colisões de ondas.

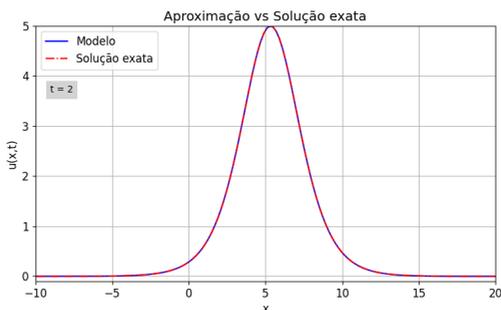


Figura 1: Aproximação para a equação de BBM usando PINNs em  $t = 2$ . Pontos de colocação:  $N_f = 15000$ ,  $N_b = 100$ ,  $N_0 = 100$ . Arquitetura da rede: 50 neurônios em cada camada, 3 camadas. Função ativação:  $\tanh$ , Número de iterações: 15.000.

## Referências

- [1] ALSHMARY, R. M. H. Applications of Partial Differential Equations. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 1591, p. 012105, 2020. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1591/1/012105>. Acesso em: 6 set. 2024.
- [2] RAISSI, M.; PERDIKARIS, P.; KARNIADAKIS, G. E. Physics Informed Deep Learning (Part I): Data-driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations. *arXiv preprint arXiv:1711.10561*, 2017. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1711.10561>. Acesso em: 6 set. 2024.
- [3] CRIGHTON, D. G. Applications of KdV. *Acta Applicandae Mathematicae*, v. 39, p. 39-49, 1995.
- [4] LU, L.; MENG, X.; MAO, Z.; KARNIADAKIS, G. E. DeepXDE: A deep learning library for solving differential equations. *arXiv preprint arXiv:1907.04502*, 2020. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1907.04502>. Acesso em: 6 set. 2024.

# Comparação do Perceptual Hashing e Redes Neurais Convolucionais na Busca Reversa de Imagens

Sandy Hoffmann\*  
manglesan98@gmail.com<sup>1</sup>

Prof. Ricardo de la Rocha Ladeira (Orientador)  
ricardo.ladeira@ifc.edu.br<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bacharelado em Ciência da Computação – IFC campus Blumenau

<sup>2</sup>Departamento de Ensino – IFC campus Blumenau

**Palavras-chave:** Redes Neurais Convolucionais, Perceptual Hashing, Busca reversa de imagens.

## Resumo:

O presente trabalho aborda a comparação entre o uso do *perceptual hashing* e das Redes Neurais Convolucionais para a busca reversa de imagens. O campo da busca reversa de imagens (RIS – *Reverse Image Search*) consiste em uma forma de pesquisa com base em imagens onde a busca é feita utilizando características específicas da figura de entrada, de forma a encontrar resultados similares ou idênticos [1]. É importante que a busca seja precisa em seus resultados, trazendo um alto nível de proximidade à imagem pesquisada. A acurácia do algoritmo utilizado pode ser afetada por modificações nas imagens, como rotação, corte e espelhamento.

O *perceptual hashing* é um tipo de *hash* que comprime as características das mídias de forma a manter a proximidade nos seus códigos por similaridades [2], tendo o objetivo de facilitar a busca de imagens parecidas ou modificadas visualmente. Nesse contexto, considerando  $H_p$  como a função *hash*,  $X$  a figura alvo,  $X'$  sendo semelhante a  $X$ ,  $Y$  como uma figura visualmente distinta de  $X$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  sendo valores de *hash*, e  $0, 1^L$  como sequências binárias de comprimento  $L$  [5], o *perceptual hashing* possui quatro propriedades desejáveis [5]:

- Robustez perceptual:

$$\text{Probabilidade}(H_p(X) = \alpha) \approx \frac{1}{2^L}, \forall \alpha \in 0, 1^L. \quad (1)$$

- Independência de par entre valores de duas figuras perceptualmente diferentes:

$$\text{Probabilidade}(H_p(X) = \alpha | H_p(Y) = \beta) \approx \text{Probabilidade}(H_p(X) = \alpha). \quad (2)$$

---

\*Graduanda em Ciência da Computação, desenvolvendo o projeto de pesquisa iniciado na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

- Invariância para imagens visualmente semelhantes:

$$\text{Probabilidade}(Hp(X) = Hp(X')) \approx 1. \quad (3)$$

- Distinção para imagens visualmente diferentes:

$$\text{Probabilidade}(Hp(X) = Hp(Y)) \approx 0. \quad (4)$$

Na propriedade 2 denota-se  $A|B$  como a operação de probabilidade condicional, dada por  $\frac{\text{Probabilidade}(A \cap B)}{\text{Probabilidade}(B)}$ . As propriedades 3 e 4 pertencentes ao *perceptual hashing* são necessárias para que a busca reversa funcione de modo assertivo, pois é desejado que figuras semelhantes tenham representações (*hashes*) próximas, enquanto imagens diferentes produzam representações distintas.

O *perceptual hashing* abordado nesse trabalho é o DCT (*Discrete Fourier Transformation* – Transformada Discreta de Fourier), sendo aplicado nessa área por conta de sua propriedade de estabilidade a modificações que seus coeficientes de baixa frequência proporcionam [3]. A variação mais comum do DCT é o tipo II, tendo matriz definida considerando  $N$  como seu tamanho,  $n$  como índice da linha e  $m$  como índice da coluna [7]:

$$c[n, m] = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \cos\left(\frac{(2m + 1) \cdot n\pi}{2N}\right). \quad (5)$$

A Rede Neural Convolutiva (CNN – *Convolutional Neural Network*) é um campo da área de Inteligência Artificial responsável por processar dados com uma topologia em grade [4], sendo definida como arquitetura padrão no caso de processamento de imagens [6]. A CNN utiliza da operação de convolução para aprender as características mais importantes da imagem, utilizando blocos menores de pesos [6], diminuindo o número de parâmetros da rede. Sua arquitetura utiliza como método de otimização a descida do gradiente, tendo o objetivo de minimizar a função de perda. Este processo utiliza o cálculo das derivadas e assim indica como ajustar os pesos da rede afim de obter a mudança desejada na saída [4].

A convolução é uma operação matemática entre duas funções com valores reais [4]. Sendo  $K$  um *kernel* bi-dimensional,  $I$  a matriz representativa da imagem e  $S$  a nova função resultante, chega-se à seguinte equação geral da convolução na CNN [4]:

$$S(i, j) = (K * I)(i, j) = \sum_m \sum_n I(i - m, j - n)K(m, n). \quad (6)$$

Para comparar os dois métodos, utilizou-se um banco de imagens unindo figuras de borboletas pertencentes aos conjuntos de dados Caltech 101 e Caltech 256<sup>1</sup>. No conjunto de imagens, foram aplicadas as operações de desfoque gaussiano, colorização preto e branco, redução de resolução, realce de nitidez, rotação, espelhamento e corte. Estas alterações possuem o objetivo de avaliar se os algoritmos aplicados para a busca mantêm a assertividade dos resultados diante das mudanças na imagem alvo. Os resultados da comparação podem ser vistos na Figura 1, que contém a quantidade de acertos entre as técnicas DCT e CNN. No caso das operações em imagens originais, desfoque gaussiano, preto e branco, alteração no tamanho e realce de nitidez, ambas as técnicas possuem desempenhos semelhantes. Já em operações de rotação, espelhamento e corte, a CNN conseguiu mais acertos, obtendo, respectivamente, um aumento de 316,6%, 560,0% e 200,0% em relação ao DCT.

<sup>1</sup>Disponíveis em: <https://data.caltech.edu/>

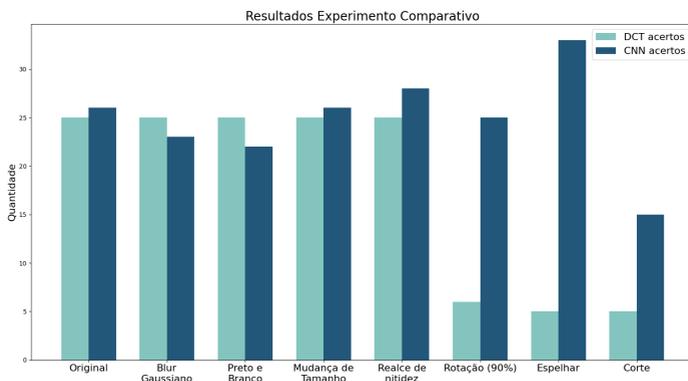


Figura 1: Comparação entre técnicas DCT e CNN por número de acertos.

Conclui-se que, neste cenário de testes, a CNN obteve uma taxa de acertos maior, sendo considerada mais robusta a mudanças visuais feitas a imagens se comparada com a técnica de *perceptual hashing* DCT.

## Referências

- [1] CHUTEL, P. et al. **Content Based Reverse Image Search. SAMRIDDDHI : A Journal of Physical Sciences, Engineering and Technology**, v. 14, p. 1–5, jun. 2022. DOI: 10.18090/samridddhi.v14spli01.1. Acesso em: 13 ago. 2024.
- [2] FARID, H. **An Overview of Perceptual Hashing**. [S.l.]: Journal of Online Trust e Safety, 2021. Disponível em: <https://tsjournal.org/index.php/jots/article/view/24/14>. Acesso em: 13 ago. 2024.
- [3] GAILLARD, M. **Perceptual Hashing using Convolutional Neural Networks for Large Scale Reverse Image Search**. [S.l.]: INSA, 2017. Disponível em: <https://github.com/mgaillard/MasterThesis/blob/master/Thesis.pdf>.
- [4] GOODFELLOW, I.; BENGIO, Y.; COURVILLE, A. **Deep Learning**. [S.l.]: MIT Press, 2016.
- [5] MEIXNER, A.; UHL, A. **Robustness and security of a wavelet-based CBIR hashing algorithm**. In: PROCEEDINGS of the 8th Workshop on Multimedia and Security. Geneva, Switzerland: Association for Computing Machinery, 2006. (MM&Sec '06), p. 140–145. ISBN 1595934936. DOI: 10.1145/1161366.1161392. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/1161366.1161392>.
- [6] WEIDMAN, S. **Deep learning from scratch: Building with python from first principles**. [S.l.]: O'Reilly Media, 2019.
- [7] ZAUNER, C. **Implementation and benchmarking of perceptual image hash functions**, 2010. Disponível em: [https://phash.org/docs/pubs/thesis\\_zauber.pdf](https://phash.org/docs/pubs/thesis_zauber.pdf). Acesso em: 21 mai. 2024.

# Otimização de Carteira de Ações: um estudo com base no perfil do cliente

Tânia Valasky\*

tania.valasky@ufpr.br <sup>1</sup>

Evelin H. M. Krulikovski (Orientadora)

evelin.krulikovski@ufpr.br <sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR

<sup>2</sup>Departamento de Matemática - UFPR

**Palavras-chave:** otimização convexa, restrição de cardinalidade, ações.

## Resumo:

Este trabalho investiga a extensão de métodos baseados em derivadas para problemas de otimização com restrições geométricas, mais especificamente uma restrição de cardinalidade, com foco na aplicação em otimização de carteiras de ações [1]. Inicialmente, utilizamos métodos de gradiente projetado de baixo custo com o esquema de projeção alternada de Dykstra [3] para resolver Programas Matemáticos com Restrições de Cardinalidade (MPCaC), que são difíceis de resolver, mas fornecem soluções esparsas. A ideia principal é utilizar reformulações contínuas desenvolvidas para relaxar a restrição de cardinalidade, aproveitando que essas restrições resultam em conjuntos convexos fáceis de projetar, como caixas e esferas [4].

Consideramos problemas de otimização na forma:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimizar}} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && x \in \Omega, \|x\|_0 \leq \alpha, \end{aligned}$$

onde  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, \dots, p \text{ e } h_j(x) = 0, \forall j = 1, \dots, m\}$  são funções continuamente diferenciáveis, e a restrição de cardinalidade  $\|x\|_0 \leq \alpha$  requer que a solução seja esparsa.

Para lidar com a difícil restrição de cardinalidade, utilizamos uma reformulação contínua relaxada [2]:

---

\*Aluna pesquisadora no Grupo Ciência de Dados, Aprendizagem de Máquina e Otimização (CIDAMO)

$$\begin{aligned} & \underset{x,y}{\text{minimizar}} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && x \in \Omega, e^\top y \geq n - \alpha, \\ & && x_i y_i = 0, \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n, \\ & && 0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

onde  $e \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de uns. Esta reformulação transforma o problema original em um problema de programação inteira quando as restrições binárias  $y_i \in \{0, 1\}$  são aplicadas [5, 6].

Além disso, utilizamos o método SPG (Spectral Projected Gradient), onde se o conjunto viável for uma interseção finita de conjuntos convexos, aplicamos o método de projeção alternada de Dykstra. Para garantir que a solução respeite a condição de Hadamard  $x \circ y = 0$ , aplicamos uma penalização à função objetivo, resultando na seguinte reformulação:

$$\begin{aligned} & \underset{x,y}{\text{minimizar}} && f(x) + \tau h(x, y) \\ & \text{sujeito a} : && x \in \Omega, e^\top y \geq n - \alpha, \\ & && 0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

onde  $\tau > 0$  é o parâmetro de penalização e  $h(x, y)$  é uma função continuamente diferenciável, escolhida para satisfazer certas propriedades.

Aplicando este esquema de penalização, o problema de otimização da carteira de ações pode ser modelado como:

$$\begin{aligned} & \underset{x,y}{\text{minimizar}} && \frac{1}{2} x^\top Q x \\ & \text{sujeito a} : && v^\top x \geq \rho, e^\top x = 1, \\ & && 0 \leq x_i \leq u_i, \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n, \\ & && e^\top y \geq n - \alpha, \\ & && x \circ y = 0, \\ & && 0 \leq y_i \leq 1, \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

onde  $u, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\rho > 0$  e a matriz de covariância  $Q$  são dados. Tais valores contemplam as condições do limite de investimento, de risco e a expectativa de retorno de um investidor de ações.

O desenvolvimento do projeto ocorre utilizando as linguagens de programação Julia e Matlab, com o objetivo de criar um aplicativo que auxilie investidores na seleção e alocação otimizadas de ativos financeiros (Figura 1). Dito de outra forma, o cliente indica o nível do risco, a lucratividade esperada e seu capital e então o aplicativo indica sugestões de ações e a quantidade para investir em cada uma delas.

O nosso foco está no problema de otimização de carteira de ações de média-variância padrão, para o qual só podemos investir em um número limitado preestabelecido de ativos, em uma variedade de conjuntos de dados envolvendo índices do mercado de capitais do mundo real dos principais mercados de ações.



Figura 1: Aplicativo para selecionar e alocar ativos financeiros.

## Referências

- [1] BECK, A. and ELDAR, Y. C. **Sparsity constrained nonlinear optimization: Optimality conditions and algorithms**. SIAM J. Optim. 23(3): 1480–1509, 2013.
- [2] BURDAKOV, O. P., KANZOW, C., and SCHWARTZ A. **Mathematical programs with cardinality constraints: reformulation by complementarity-type conditions and a regularization method**. SIAM J. Optim., 26(1): 397–425, 2016.
- [3] ESCALANTE, R. and RAYDAN, M. **Alternating Projection Methods**, SIAM, Philadelphia, 2011.
- [4] KREJIC, N., KRULIKOVSKI, E. H. M., and RAYDAN, M. **A low-cost alternating projection approach for a continuous formulation of convex and cardinality constrained optimization**, Operations Research Forum, 2023.
- [5] KRULIKOVSKI, E. H. M., RIBEIRO, A. A., and SACHINE, M. **On the weak stationarity conditions for mathematical programs with cardinality constraints: a unified approach**. Appl. Math, 84: 3451-3473, 2021.
- [6] KRULIKOVSKI, E. H. M., RIBEIRO, A. A., and SACHINE, M. **A Comparative Study of Sequential Optimality Conditions for Mathematical Programs with Cardinality Constraints**, JOTA, 192:1067–1083, 2022.

# *Projetos*

*Comissão Científica:*

Prof<sup>a</sup>. Dra. Eloisa Rosotti Navarro  
Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva

# Brincando de Matemático: uma experiência de ensino e aprendizagem

Ana Cleo Matias Vieira da Motta, Brenda Dal Puppo Monteiro, Daniel Thiago Ivanchechen, Elissandro Antonio Sikora, Felipe Monteiro Kiotheka, Kaiky Yuji Ishiy, Kevyan Uehara de Moraes, Laura Carolina Aymore Ferrandin, Leonardo Cortez do Nascimento, Lucas Xavier, Otavio Augusto Salomao Recacho, Pedro Dell’Agnolo Busarello, Thiago Batista dos Santos Martins e Samuel Adam Trindade de Souza. \*

petmatematica@ufpr.br <sup>1</sup>

Cleber de Medeira (Orientador)

clebermedeira@ufpr.br <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** Educação Matemática, Ensino de Matemática, Ensino de funções.

## Resumo:

O Brincando de Matemático é um evento de extensão promovido pelo grupo PET Matemática da UFPR e tem como público-alvo os alunos do Ensino Médio e dos Anos Finais do Ensino Fundamental. O principal objetivo do evento é apresentar assuntos matemáticos variados, que podem ser vistos ou não na escola, mas que neste evento são abordados de forma dinâmica e interessante, explorando temas já conhecidos de forma mais profunda ou apresentando tópicos completamente novos, instigando a curiosidade dos alunos. Além disso, o evento promove uma oportunidade de prática de ensino aos integrantes do grupo.

Nesse ano, tivemos a 19ª edição do Brincando de Matemático e o tema escolhido foi “Funções e afins”. O planejamento do evento foi feito pelos integrantes do grupo PET Matemática, que definiram o tema através de seminários internos nos quais foram apresentadas várias propostas. Posteriormente à escolha do tema, foi realizada uma pesquisa em diversas referências bibliográficas e produzido um material didático com todo o conteúdo necessário para o desenvolvimento das atividades realizadas nos dias do evento. Também foram elaborados planos de aula e uma lista de atividades práticas que foram desenvolvidas com os alunos. Além dessas ações pedagógicas, todo o processo de divulgação, inscrição, produção de certificados, e outros aspectos logísticos foram realizados pelo grupo PET Matemática.

Neste ano, o evento foi realizado presencialmente no Centro Politécnico da UFPR nos dias 13 e 14 de julho de 2024. No primeiro dia do evento foi apresentado o con-

---

\*Integrante do PET Matemática.

ceito de função, o que ele significa intuitivamente e matematicamente, o que é o diagrama de flechas e a tabela de valores e, após muitos exemplos, também foi apresentada a ideia de gráfico de uma função, com auxílio do software Geogebra para mostrar alguns gráficos interessantes. No segundo dia do evento, foram trabalhados os conceitos de injetividade e sobrejetividade, inicialmente sobre conjuntos finitos, sempre se atentando a relação da cardinalidade dos conjuntos envolvidos. Por fim, foram comparadas as cardinalidades de alguns conjuntos numéricos infinitos, revelando resultados que contrariam a intuição sobre o conceito de infinito. Nos dois dias do evento foram realizadas várias dinâmicas e atividades lúdicas para o desenvolvimento dos temas matemáticos abordados.

## Referências

- [1] FERRER, J. V. O número de ouro na arte, arquitetura e natureza: beleza e harmonia. Trabalho Apresentado à Universidade Católica de Brasília-UCB. Distrito Federal, 2005.
- [2] LIMA, E. L. Curso de Análise Vol. 1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2022.
- [3] PINTO, H. D. El plano cartesiano, una idea sencilla cuyo desarrollo llevó dos milenios. Universidade Pedagógica Nacional, 2016.
- [4] VELLEMAN, D. J. How to Prove It: A Structured Approach. [S.I.]: Cambridge University, 2006.

# Semana da Matemática

Ana Cleo Matias Vieira da Motta, Brenda Dal Puppo Monteiro , Daniel Thiago Ivanchechen , Elissandro Antonio Sikora , Felipe Monteiro Kiotheka , Kaiky Yuji Ishiy , Kevyan Uehara de Moraes , Laura Carolina Aymoré Ferrandin , Leonardo Cortez do Nascimento , Lucas Xavier , Otavio Augusto Salomão Recacho , Pedro Dell’Agnolo Busarello , Samuel Adam Trindade de Souza , Thiago Batista dos Santos Martins  
petmatematica@ufpr.br <sup>1</sup>

Cleber de Medeira (Orientador)  
clebermedeira@ufpr.br <sup>2</sup>

<sup>1</sup>Licenciatura em Matemática, Bacharelado em Matemática - UFPR

<sup>2</sup>Professor no Departamento de Matemática - UFPR

**Palavras-chave:** Formação Acadêmica, Semana Acadêmica, Seminários.

## Resumo:

O grupo PET Matemática da UFPR promove diversas atividades com o objetivo de aprimorar o ensino de graduação e proporcionar uma formação acadêmica mais completa aos estudantes dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática. Entre as principais iniciativas do grupo, destaca-se a Semana da Matemática, um evento voltado aos estudantes de graduação. O presente trabalho tem como objetivo apresentar o evento, bem como as atividades nele realizadas.

Esse evento, que substitui a tradicional semana acadêmica do curso, explora diferentes aspectos da atuação profissional em Matemática, abrangendo as carreiras de professores, pesquisadores, estudantes e profissionais liberais. A Semana da Matemática é direcionada tanto aos alunos do curso quanto aos demais interessados da universidade. Em 2024, o evento ocorreu nos dias 27 e 28 de fevereiro, com uma programação variada que incluiu palestras, mesas-redondas e minicursos. Participaram alunos, ex-alunos e professores do Departamento de Matemática, além de docentes de outros departamentos da UFPR ligados ao curso de Matemática. Entre os temas das palestras, destacaram-se "A transição do Ensino Médio para a universidade" e "Ao infinito e além". As mesas-redondas abordaram temas como ensino, pós-graduação e carreiras, enquanto os minicursos trataram de tópicos como Látex e softwares úteis para o ensino e aprendizagem de Matemática.

# Programa de Iniciação Científica da OBMEP - PICJr.

Caio Barros Dewnig<sup>1\*</sup>, Gabrieli Kmieciak<sup>2♣</sup>  
*caio.dewnig@ufpr.br<sup>1</sup>, gabi.kmieciak@hotmail.com<sup>2</sup>*

Paula Rogéria Lima Couto (Orientadora)  
*paulacouto@ufpr.br<sup>2</sup>*

Florinda Katsume Miyaoka (Orientadora)  
*cric\_pr02@obmep.org.br<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná - UFPR

**Palavras-chave:** Iniciação Científica; OBMEP; Resolução de Problemas.

## Resumo:

O Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), atualmente em sua 18ª edição, proporciona aos alunos premiados da OBMEP a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos em Matemática nas áreas de Teoria dos Números, Álgebra, Combinatória e Geometria por meio da resolução de exercícios desafiadores. Alunos de escolas públicas que conquistaram prêmios na OBMEP são beneficiados com uma bolsa financiada pelo CNPq ao ingressar no PIC, como uma forma de incentivo ao estudo. O programa oferece duas modalidades de participação: a presencial, com encontros realizados geralmente aos sábados para alunos que residem próximos a polos de Iniciação Científica, e a virtual, que disponibiliza aulas online para aqueles que estão distantes. Os participantes têm acesso a um fórum virtual, gerenciado pelos coordenadores da OBMEP, onde, com a ajuda de moderadores, realizam atividades complementares. Além disso, eles podem interagir entre si em um outro espaço, o Hotel de Hilbert (HH), onde compartilham dúvidas e soluções sobre os exercícios adicionais propostos no programa. Medalhistas que já participaram do PIC mais de duas vezes, incluindo pelo menos uma edição do nível 3, são incentivados a participar do Programa Mentores OBMEP, que oferece atividades sob a orientação de professores universitários em temas matemáticos. Na UFPR, o PIC está vinculado ao projeto de extensão Caminhos Olímpicos na Matemática, que visa estimular a participação de estudantes do Ensino Fundamental e Médio nas diversas Olimpíadas de Matemática do Brasil.

No PIC, os alunos são organizados em três grupos: Grupo 1, destinado a medalhistas do Nível 1 da OBMEP (6º e 7º anos do Ensino Fundamental); Grupo 2, para medalhistas do Nível 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental); e Grupo 3, para medalhistas do Nível 3 da OBMEP (Ensino Médio). Alunos que receberam menção

---

<sup>1\*</sup> Aluno do Bacharelado em Matemática Industrial da UFPR, bolsista e tutor do PIC.

<sup>2♣</sup> Aluna do Bacharelado em Matemática da UFPR, bolsista e tutora do PIC.

honrosa na OBMEP em seus respectivos níveis também são aceitos, caso haja vagas disponíveis.

O programa é estruturado em oito ciclos ao longo de um ano, abordando tópicos relacionados às quatro áreas da Matemática mencionadas anteriormente. O material didático é elaborado especialmente para os diferentes níveis de participação, servindo como guia para os professores do programa, que são selecionados entre educadores do ensino público ou estudantes de graduação. Nesta edição (18ª), foram escolhidos graduandos para conduzir as aulas. A partir da primeira aula do segundo ciclo, os alunos da modalidade presencial são submetidos a um teste avaliativo que consiste em duas questões dissertativas sobre o conteúdo do ciclo anterior. Além disso, a partir do segundo ciclo, realizam tarefas que incluem sete questões, sendo cinco objetivas e duas dissertativas. As aulas do PIC adotam uma metodologia centrada na resolução de exercícios, visando ensinar a teoria por meio da prática, complementada por demonstrações e curiosidades pertinentes ao tema.

Este trabalho visa descrever as experiências, dificuldades e facilidades vivenciadas pelos professores do projeto PIC em sua 18ª edição, além de apresentar um panorama estatístico dessa fase. Para tanto, após a conclusão de seis ciclos de aulas, os educadores responderam a um questionário que abordava tanto aspectos pessoais quanto dados estatísticos sobre a execução do programa. A análise desses dados busca identificar áreas de melhoria e potencial para o aprimoramento das práticas pedagógicas no contexto do PIC, contribuindo assim para o avanço da formação matemática de jovens talentos.

### **Referências:**

[1] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP | Somando novos talentos para o Brasil. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/pic.htm>>.

Acesso em: 4 out. 2024.

[2] PIC - Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Disponível em: <<https://18pic.obmep.org.br>>. Acesso em: 4 out. 2024.

[3] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP | Somando novos talentos para o Brasil. Disponível em:

<<http://www.obmep.org.br/apostilas.htm>>. Acesso em: 4 out. 2024.

# Explorando a Matemática através do GeoGebra: uma iniciativa do Projeto de Extensão Elas vão para CiMa

Camila Trevisan<sup>1\*</sup>  
*camilatrevisan@alunos.utfpr.edu.br<sup>1</sup>*

Maria Eduarda de Lara<sup>2+</sup>  
*mariaeduardalara@alunos.utfpr.edu.br<sup>2</sup>*

Lilian Cordeiro Brambila (Orientadora)  
*lilianc@utfpr.edu.br<sup>3</sup>*

Ana Cristina Corrêa Munaretto (Coorientadora)  
*munaretto@utfpr.edu.br<sup>4</sup>*

Diane Rizzotto Rossetto (Coorientadora)  
*dianerossetto@utfpr.edu.br<sup>5</sup>*

<sup>1</sup>UTFPR

<sup>2</sup>UTFPR

**Palavras-chave:** Oficinas de GeoGebra, CiMa, Meninas na STEM.

## Resumo:

O projeto de extensão “Elas vão para Ciências e Matemática” (CiMa) [1], promovido pelo Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Curitiba, tem como objetivo promover a equidade de gênero nas áreas de Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM). Este trabalho tem como objetivo relatar as oficinas realizadas pelo CiMa, em agosto de 2024, que tinham como propósito explorar conceitos matemáticos por meio do GeoGebra.

Desde 2018, o Projeto tem selecionado escolas diferentes a cada semestre para participar de suas atividades, impactando positivamente muitas alunas e enriquecendo suas experiências educacionais. Intituladas “Explorando a Matemática através do GeoGebra”, no mês de Agosto de 2024, as oficinas foram aplicadas às estudantes do Ensino Médio de um colégio estadual de Curitiba. Durante três encontros nesta escola, foram abordados os seguintes temas: homotetia, sistemas de equações e inequações, problemas de otimização e volume de sólidos geométricos. O uso do GeoGebra proporcionou uma abordagem prática e interativa para a compreensão desses conceitos, enriquecendo a experiência educacional das alunas e fomentando seu interesse nas áreas de STEM.

<sup>1\*</sup> Voluntária do Projeto de Extensão Elas vão para CiMa.

<sup>2+</sup> Bolsista do Projeto de Extensão Elas vão para CiMa.

Por fim, iniciativas como estas, que nos permitem ter contato diretamente em sala com as estudantes, são essenciais para, não somente incentivar e impactar positivamente as meninas para as áreas de STEM, mas também nos permitir, futuras docentes, a ter um maior conhecimento e prática dentro do ambiente escolar, sempre inspirando nossas alunas a seguirem caminhos brilhantes.

## **Referências**

[1] D. Rossetto, D. Siqueira e A. Verdério. “Projeto Elas vão para Ciências e Matemática (CiMa)”. Em: **I Congresso Internacional de Mulheres em STEAM**. 2022. doi: 10 . 55592 / ICIMESTEAM.2022.5175512.

# POTI/TOPMAT: estratégias dinâmicas para engajar estudantes e garantir sucesso nas olimpíadas de Matemática

Carolina de Souza Soares<sup>1</sup>, Fernanda de Oliveira de Jesus<sup>2</sup>, Leonardo Knelsen<sup>3</sup>,  
Lucas Bisoni<sup>4</sup> e Samuel Henrique Gomes Velez Benito<sup>5</sup>  
*poti@ufpr.br*

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)  
*eidam@ufpr.br*

Prof. Dr. Wagner Augusto Almeida de Moraes (Coorientador)  
*wagnermoraes@ufpr.br*

Universidade Federal do Paraná (UFPR)

**Palavras-chave:** Matemática Olímpica, Estratégias Inovadoras, Premiações.

## Resumo:

O projeto POTI — Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo é uma iniciativa nacional do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), implementada na Universidade Federal do Paraná (UFPR) em 2016, com o nome de TOPMAT — Programa de Formação em Matemática Olímpica. O programa consiste em aulas semanais realizadas no campus Centro Politécnico, em Curitiba, para estudantes de instituições públicas e privadas da Educação Básica, abrangendo os Anos Finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) e o Ensino Médio.

Anualmente, mais de 250 estudantes são selecionados por meio de uma prova realizada no início do ano. Já os docentes responsáveis pelas aulas são discentes da universidade, que, após passarem por um processo seletivo, assumem a responsabilidade de ministrar, em equipe, uma das disciplinas ofertadas: Álgebra, Aritmética, Combinatória, Geometria e Teoria de Números. Além disso, o programa utiliza material didático próprio, desenvolvido pelos alunos do curso de Matemática da UFPR e impresso pela Imprensa da UFPR, garantindo abordagens pedagógicas alinhadas às necessidades do curso.

---

<sup>1</sup> Bolsista e professora nível 2 do POTI/TOPMAT — Programa de Formação em Matemática Olímpica.

<sup>2</sup> Bolsista e coordenadora nível 2 do POTI/TOPMAT — Programa de Formação em Matemática Olímpica.

<sup>3</sup> Bolsista e coordenador nível 1 do POTI/TOPMAT — Programa de Formação em Matemática Olímpica.

<sup>4</sup> Bolsista e coordenador nível 3 do POTI/TOPMAT — Programa de Formação em Matemática Olímpica.

<sup>5</sup> Bolsista e professor nível 3 do POTI/TOPMAT — Programa de Formação em Matemática Olímpica.



Foto da cerimônia de encerramento do POTI/TOPMAT 2023.

O principal objetivo é descobrir e preparar jovens talentos, trabalhando conceitos pouco abordados no currículo escolar e aprofundando as temáticas vistas em sala de aula sob uma nova perspectiva. O programa também busca incluir os estudantes no contexto das olimpíadas de Matemática, a fim de promover a divulgação científica. Alguns dos principais focos são a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e a Olimpíada Paranaense de Matemática (OPRM).

Em geral, o programa atende estudantes com grande aptidão para a Matemática, o que representa um desafio para a equipe de professores: como captar a atenção desses alunos e fugir dos moldes tradicionais de ensino? Ao avaliar as possibilidades de trabalho diante desse tópico, desenvolveram-se algumas práticas ao longo do ano.

Primeiramente, deu-se um grande destaque para utilização de problemas que mesclavam diferentes competências, como aspectos visuais e algébricos (no caso, por exemplo, de produtos notáveis e áreas de figuras), com caráter aberto e interpretativo. Essa prática teve como objetivo criar problemas que, para além da replicação de algoritmos, exigissem criatividade e pensamento abstrato, suscitando a formulação de soluções inéditas e sua posterior discussão com a classe.

Ademais, também foram elaboradas dinâmicas para tornar o aprendizado mais envolvente. Isso incluiu a realização de aulas temáticas, com fantasias e atividades especiais, além de eventos próprios, sendo os principais a Festa Julina e a Maratona Matemática. Em particular, a Maratona da Matemática atua como uma celebração de retorno dos estudantes após o recesso letivo, em que os estudantes se envolvem em atividades práticas que desafiam suas habilidades e conhecimentos, e que são projetadas para incentivar a aplicação criativa e interativa dos conceitos matemáticos, visando estimular o raciocínio crítico e fortalecer o trabalho em equipe.

Ao empregar essas estratégias, foi perceptível o aumento do interesse dos estudantes pela Matemática enquanto ciência e pelas olimpíadas, além do fortalecimento do vínculo entre professores e discentes, o que certamente colaborou para a criação de um ambiente de aprendizado mais enriquecedor e diversificado.

A seguir, apresentamos o quadro de premiações dos alunos do programa POTI/TOPMAT de 2016 a 2023, que ilustra o progresso dos estudantes do projeto nas competições de matemáticas:

ANO	NÍVEL 1		NÍVEL 2		NÍVEL 3	
	MENÇÃO HONROSA	MEDALHA	MENÇÃO HONROSA	MEDALHA	MENÇÃO HONROSA	MEDALHA
2016	0	2	2	10	0	0
2017	1	9	2	16	2	1
2018	1	5	1	6	2	7
2019	2	5	8	10	10	7
2021	13	8	9	4	18	5
2022	5	9	14	29	4	14
2023	3	18	24	56	10	39

Quadro de medalhas em premiações nacionais e regionais dos alunos do POTI/TOPMAT — Programa de Formação em Matemática Olímpica.

Percebe-se que, nos últimos anos, houve um aumento no número de medalhas conquistadas, o que caracteriza uma possível consequência do trabalho que tem sido desenvolvido e das novas abordagens em relação ao processo de ensino.

Portanto, a combinação de uma metodologia mais envolvente com a aplicação prática dos conceitos matemáticos tem mostrado ser uma fórmula eficaz para elevar o desempenho dos estudantes, consolidando o POTI/TOPMAT como um programa relevante para a divulgação e ensino da Matemática. Futuramente, espera-se investir nessas abordagens, descobrindo novos talentos e incentivando a Matemática Olímpica.

## Referências

[1] JESUS, F. O. et al. **POTI/TOPMAT (níveis 2 e 3): formação olímpica de alto nível para estudantes do Ensino Fundamental II e Médio**. In.: Jornada da Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática, 7ª J3M, 2023, Curitiba. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2023. p. 184.

[2] JESUS, F. O. et al. **POTI/TOPMAT: ampliando os horizontes de formação matemática de alunos de ensino fundamental, médio e superior**. In: Semana Integrada de Ensino, Pesquisa e Extensão, 14ª SIEPE, 2023. Curitiba. Anais... Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2023. p. 193.

[3] POTI UFPR. **Polo Olímpico de Treinamento Intensivo UFPR**. Disponível em: <<https://poti.ufpr.br/>>. Acesso em 07 de agosto de 2024.

# Olimpíada Paranaense de Matemática (OPRM): fomentando o interesse pela Matemática no Paraná

Fernanda de Oliveira de Jesus<sup>1</sup>, Leonardo Knelsen<sup>2</sup> e Lucas Bisoni<sup>3</sup>  
*oprmm@ufpr.br*

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)  
*eidam@ufpr.br*

Prof. Dr. Wagner Augusto Almeida de Moraes (Coorientador)  
*wagnermoraes@ufpr.br*

Universidade Federal do Paraná (UFPR)

**Palavras-chave:** Olimpíada de Matemática, Educação, Matemática.

## Resumo:

A Olimpíada Paranaense de Matemática (OPRM), organizada anualmente pela Universidade Federal do Paraná (UFPR), é uma competição que tem como principal objetivo incentivar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática e contribuir para a divulgação científica na Educação Básica.

Ela é dividida em três níveis de participação, de acordo com a escolaridade e a idade do estudante inscrito: nível 1 (para discentes matriculados no 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental), nível 2 (para discentes matriculados no 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental) e nível 3 (para discentes matriculados no Ensino Médio). Essa separação busca garantir que as avaliações estejam de acordo com os assuntos abordados no currículo comum das instituições de ensino e com a idade dos participantes. Além disso, a olimpíada é realizada em duas fases. Na primeira fase, de caráter eliminatório, os estudantes participam de uma prova com 20 questões objetivas. Aqueles que obtêm melhor desempenho avançam para a segunda fase, que é classificatória e composta por uma prova dissertativa com 6 questões, exigindo uma compreensão mais profunda dos conceitos abordados e habilidades analíticas avançadas.

Após a divulgação dos resultados, a competição culmina na cerimônia de premiação, um evento festivo que celebra o sucesso acadêmico e o empenho dos estudantes. Durante a cerimônia, realizada com a presença dos discentes, famílias, professores e representantes da UFPR, os melhores colocados são homenageados com medalhas e certificados. Esse momento não apenas reconhece o esforço e a

---

<sup>1</sup> Bolsista da OPRM 2024.

<sup>2</sup> Bolsista da OPRM 2024.

<sup>3</sup> Bolsista da OPRM 2024.

dedicação dos participantes, mas também inspira todos os presentes a valorizar a Educação e continuar buscando o conhecimento.



Fotos da cerimônia de premiação da Olimpíada Paranaense de Matemática (OPRM) 2023.

O desenvolvimento das provas da OPRM é um processo colaborativo e enriquecedor, conduzido essencialmente por alunos do curso de graduação em Matemática da UFPR. Estes estudantes têm a oportunidade de aplicar seus conhecimentos teóricos em situações práticas, participando ativamente na elaboração e revisão das questões, sob a supervisão e apoio do Núcleo de Concursos (NC) da UFPR. Essa parceria com o NC garante que todas as etapas do processo, desde a criação das questões até a aplicação das provas, sejam conduzidas com rigor metodológico, assegurando a qualidade, a equidade e a integridade da competição.

Além disso, a OPRM está fortemente ligada ao POTI/TOPMAT – Programa de Formação em Matemática Olímpica da UFPR. Esta colaboração estreita fortalece o vínculo entre a universidade e as escolas, facilitando a troca de conhecimentos e aprimorando o ensino de Matemática no Paraná. O POTI/TOPMAT atua como um catalisador ao fornecer treinamento intensivo e suporte para os estudantes, preparando-os para competições como a OPRM e ampliando o impacto positivo da olimpíada.

Desde sua primeira edição, realizada em 2016, a OPRM tem experimentado um crescimento notável, tanto em termos de participação quanto de impacto. Em 2016, a olimpíada começou com 1.212 inscritos de 100 escolas. A cada ano, esses números aumentaram significativamente, atingindo 24.505 inscritos de 198 escolas em 2024. Esse crescimento não apenas destaca a relevância e atratividade da OPRM, mas também evidencia sua contribuição significativa para a valorização da Matemática como uma disciplina fundamental para o desenvolvimento pessoal e acadêmico dos estudantes.



Nesse sentido, a Olimpíada Paranaense de Matemática (OPRM) adquire um significado muito além da competição: ela representa um compromisso sólido da UFPR com a educação de qualidade e a valorização da Matemática. Por fim, ao proporcionar aos estudantes a oportunidade de desenvolver suas habilidades matemáticas, a olimpíada se mostra, junto com outras iniciativas do mesmo tipo, um fator relevante para a formação de futuros profissionais e pensadores críticos, como demonstrado pelo crescimento contínuo no número de participantes e pelo impacto positivo gerado, os quais sublinham a relevância de propostas que fomentam a curiosidade intelectual.

#### **Referências:**

- [1] TERNOSKI et al. **OPRM: melhorando a formação matemática dos estudantes do Paraná**. In: SEMANA INTEGRADA DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO UFPR, 14., 2023, Curitiba. Anais... Curitiba: UFPR, 2023. p. 194.

# A importância da leitura dos clássicos para o ensino-aprendizagem em Matemática

Fernanda Queiroz da Silva Oliveira<sup>1</sup>  
*fernandaoliveira.2023@alunos.utfpr.edu.br*

Fernando Baleira Leão de Oliveira Queiroz<sup>2</sup>  
*fernandobaleira@alunos.utfpr.edu.br*

Rudson Alexandre Gomes Maia<sup>3</sup>  
*rmaia@alunos.utfpr.edu.br*

Zinara Marcet de Andrade (Orientadora)<sup>4</sup>  
*zinaraandrade@utfpr.edu.br*

João Carlos Pereira de Moraes (Coorientador)<sup>5</sup>  
*joamoraes@utfpr.edu.br*

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Curitiba

**Palavras-chave:** leitura, clássicos da educação, ensino-aprendizagem.

## Resumo:

Este trabalho destaca a importância da leitura de obras clássicas na formação docente, com base no projeto de extensão “Clássicos da Educação: leitura, debate e síntese”, promovido pelo Departamento de Educação da UTFPR-CT. O projeto explora obras como “O Emílio” de Rousseau e “Didática Magna” de Comenius, visando ampliar o conhecimento teórico dos futuros professores, especialmente de Matemática, e estimular a reflexão sobre suas metodologias de ensino. Possui foco no incentivo à leitura, essencial para a compreensão e aplicação dos princípios teóricos da prática pedagógica. Os projetos de extensão são fundamentais ao proporcionar espaços para discussão e análise aprofundada. Assim, este trabalho contribui para uma formação docente mais crítica e sólida, capacitando os licenciandos para os desafios contemporâneos da educação.

O projeto propôs a leitura e discussão de obras clássicas da educação, frequentemente citadas nos cursos de licenciatura, mas que, na maioria das vezes, não são lidas com profundidade. Durante o ano letivo de 2023, as atividades ocorreram por meio de plataformas digitais, como o Google Meet para os encontros mensais e Moodle para a disponibilização dos textos clássicos, permitindo uma

---

<sup>1\*</sup> Arquiteta, Mestre em Arquitetura e Urbanismo, licenciada em Artes Visuais, licencianda em Matemática pela UTFPR, integrante do projeto.

<sup>2\*</sup> Advogado, mestre em Direito, licenciado em filosofia, licenciando em Matemática pela UTFPR, integrante do projeto.

<sup>3\*</sup> Licenciando em Letras-Ingês pela UTFPR, integrante do projeto.

<sup>4\*</sup> Doutora em Educação, professora da UTFPR.

<sup>5\*</sup> Doutor em Educação, professor da UTFPR.

leitura e análise aprofundada dessas importantes obras. A leitura, e discussão dos textos clássicos, é fundamental para a formação de professores, inclusive na educação matemática. Essas obras oferecem teorias e práticas pedagógicas permitindo uma reflexão aprofundada sobre metodologias de ensino-aprendizagem e a evolução das práticas pedagógicas, promovendo abordagens diversificadas de ensino.

Reconhecendo que a carga horária e a complexidade dos cursos de licenciatura muitas vezes limitam o acesso a essas obras em sua íntegra, o projeto de extensão criou um espaço dedicado para a leitura e discussão completa desses textos. Isso facilita a compreensão de seus conceitos fundamentais que influenciam a prática docente.

Apesar dos desafios do projeto e da carga de leitura mensal proposta de cerca de 150 páginas, a adesão inicial dos licenciandos foi baixa e diminuiu ao longo dos encontros. No entanto, isso não impediu que as discussões online fossem enriquecedoras e proveitosas, sempre com ricos debates acerca da leitura realizada.

A obra de Rousseau, considerada um tratado da educação, traz a gênese de ideias relativas à aprendizagem autônoma, por meio do que o autor chama de “liberdade guiada”, fornecendo uma aprendizagem significativa, levando o estudante a adquirir conhecimento a partir da experiência de modo eficiente, direcionada às habilidades e interesses individuais [1].

Acompanhar a trajetória de Emílio, o personagem fictício da obra, revelou importantes reflexões. A obra acompanha o personagem desde o seu nascimento até o seu casamento, apresentando suas fases de desenvolvimento e oferecendo uma espécie de cartilha com exemplos práticos de ensinamentos e metodologias. A leitura destaca a importância de desenvolver na criança a capacidade de pensar de forma autônoma [2]. Durante o projeto, identificou-se a possibilidade de aplicar estes preceitos no ensino da Matemática, criando cenários do universo infantil e juvenil, guiados pelo professor, visando desenvolver o senso crítico e o raciocínio lógico.

Rousseau enfatiza a importância de ensinar às crianças apenas o que é útil e que elas possam compreender, valorizando a experimentação, o trabalho manual e a prática do conhecimento de acordo com suas capacidades e ritmo. Essa perspectiva questiona a Educação Básica atual, incluindo a pressão para cobrir extensos conteúdos rapidamente e a proliferação de plataformas de ensino de matemática, por vezes em detrimento do foco no estudante.

Ainda que amplamente criticada, a obra escolhida pelo projeto mostrou-se atual e revelou a importância de conhecer o conteúdo dos clássicos pela leitura dos mesmos, e não pelas palavras de alguém que realizou tal leitura, evitando distorções ou preconceitos. A liberdade citada na obra, alvo de críticas ferrenhas, se torna evidente com a leitura, tratando-se de uma espécie de liberdade vigiada, controlada pela figura do tutor, de modo que o estudante não deve perceber que está sendo guiado, mas cabendo ao professor instigar sua curiosidade e gerar a aprendizagem.

Diferentemente de forçar a criança a aprender, o que a obra propõe é fornecer ao educando os métodos para uma aprendizagem autônoma, instigando o gosto pelo conhecimento de temas úteis. Ressalta-se que, apesar de possível e

extremamente eficaz e duradouro no plano teórico, a metodologia proposta por Rousseau tem a lentidão em sua essência, contrariando as políticas educacionais e planos pedagógicos vigentes nas escolas.

A metodologia de ensino-aprendizagem proposta na obra é individualizada, priorizando a independência, removendo ideias pré concebidas ao propor uma educação longe da sociedade, cabendo ao indivíduo posteriormente raciocinar por si só e tecer suas próprias conclusões ao ser inserido na sociedade, permitindo o desenvolvimento de sua capacidade de diagnóstico e raciocínio.

Sabe-se da dificuldade e desafios a serem enfrentados na tentativa de implantar uma metodologia radical e inovadora como a proposta por Rousseau na atualidade, porém não há melhor lugar do que na universidade, durante a formação dos docentes, para fomentar esta discussão o que acabou por trazer ricos debates e esperança em um ensino melhor, eficaz e duradouro.

Após o impacto que a leitura da obra “Emílio” causou nos participantes do projeto, houve ainda a leitura e discussão do clássico “Didática Magna”. Seguindo a mesma linha, abordou a importância de uma educação adaptada às necessidades dos estudantes e criticando as práticas escolares da época. A tratar sobre a didática, ou “da arte de ensinar tudo a todos”, objetivando um ambiente de aprendizagem eficaz, simplificando o ensino e reduzindo o esforço dos professores, auxiliando os estudantes em uma aprendizagem mais fácil e agradável. Comenius aponta que as instituições de ensino falhavam ao fornecer uma educação universal, com ensino arcaico e desmotivador, ou ainda, excessivamente técnico, deixando a desejar no quesito moralidade, trazendo fundamentos para ensinar com a segurança de se obter bons resultados, de modo gradual e evidente, conforme a sua utilidade [3].

Ao término da leitura dos clássicos atemporais mencionados há de se ressaltar o impacto positivo na compreensão dos estudantes acerca das práticas pedagógicas, bem como, os assuntos abordados mostram-se atuais e relevantes, construindo uma base sólida que pode ser aplicada em práticas pedagógicas inovadoras.

Os debates que a leitura proporcionou possibilitaram a compreensão da educação em diferentes contextos, compreendendo as obras de acordo com seu período histórico, revelando os avanços obtidos no campo do ensino-aprendizagem e o quanto há de ser feito para que se obtenha uma educação equitativa de qualidade. Desta forma, por meio do projeto conclui-se que o incentivo à leitura das obras clássicas é necessário para a melhoria na formação docente, tornando os professores mais preparados para enfrentar os desafios no ensino da Matemática.

#### **Referências:**

- [1] Rousseau, J. J. **Emílio: ou da educação**. R. T. Bertrand Brasil, 1995. Obras Políticas I. Porto Alegre: Editora Globo, 1958.
- [2] Diniz, R. F.; Batista, G. A.; Bernardes, S. T. A. **As contribuições de Jean-Jacques Rousseau na educação**. Cadernos da Fucamp, v. 17, n.30, p. 87 - 94, 2018.
- [3] Comenius, I. A. **Didactica Magna**. Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

# Caminhos Olímpicos na Matemática: Compreendendo a turma de Altas Habilidades/Superdotação

Hiroshi Caed Tashiro Ascorbe<sup>1</sup>  
*hiroshi.tashiro@ufpr.br*<sup>1</sup>

Profa. Paula Rogeria Lima Couto  
*paulacouto@ufpr.br*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Paraná (UFPR)

**Palavras-chave:** Caminhos Olímpicos na Matemática (COM); Altas Habilidades/Superdotação; Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

## **Resumo:**

O projeto de extensão Caminhos Olímpicos na Matemática (COM) está alinhado com o Programa de Iniciação Científica Junior da OBMEP que faz sua atuação nas regionais estabelecidas pelo IMPA e também faz sua participação nos colégios, permitindo a inserção do projeto para o bom desenvolvimento dos alunos na área da matemática. Desde 2022, o projeto tem sido fundamental para os alunos que aspiram a conquista de uma medalha nas olimpíadas de matemática, especialmente na OBMEP. Além disso, o projeto oferece oportunidades para que alunos de graduação em ciências exatas atuem como professores, colaborando com a coordenação na montagem e preparação das aulas, tanto no Centro Politécnico da UFPR quanto no Colégio Estadual Júlio Mesquita, localizado no bairro Jardim das Américas.

Neste ano, o projeto reiniciou suas atividades no colégio Júlio Mesquita com uma turma alunos de altas habilidades, compostos por estudantes do 7º ao 9º ano do ensino fundamental II, tendo 5 matriculados. As aulas são estruturadas conforme o Registro de Classe On-line (RCO). Mas, sempre que possível, complementamos o material com recursos do Portal da OBMEP e aulas do Projeto de Iniciação Científica Junior (PIC). Nosso objetivo é focar em questões olímpicas de nível avançado, alinhadas com os requisitos das provas de nível olímpico.

Uma característica ressaltante na turma assumida é que a maioria é considerada alunos de altas habilidades/superdotação (AH/SD). O Ministério de Educação e Cultura define esses alunos a partir de suas capacidades de aprendizagem em certas matérias ou liderança:

A Política Nacional de Educação Especial (1994) define como portadores de altas habilidades / superdotados os educandos que

apresentarem notável desempenho e elevada potencialidade em qualquer dos seguintes aspectos, isolados ou combinados: capacidade intelectual geral; aptidão acadêmica específica; pensamento criativo ou produtivo; capacidade de liderança; talento especial para artes e capacidade psicomotora. (MEC, Secretaria de Educação Especial, 2006, p.12)

Destacam-se seis tipos de altas habilidades/superdotação: intelectual, criativa, psicomotora, liderança, artística e acadêmica específica. Embora alguns sejam pronunciantes nos alunos, ainda é possível ter um comportamento imaturo em algumas áreas acadêmicas ou comportamental. Alencar e Fleith, afirmam:

Enquanto um deles pode apresentar uma competência elevada em uma grande diversidade de áreas aliada a uma liderança superior, outro pode mostrar-se extraordinariamente competente em apenas uma área, sendo, porém, imaturo emocionalmente; ainda outro poderá ser fisicamente menos desenvolvido, apresentando, contudo, uma habilidade significativamente superior (ALENCAR; FLEITH, 2001, p.67).

Um dos desafios presentes nesta turma é encontrar formas eficazes de conduzi-la, considerando que, em projetos similares voltados para as Olimpíadas de Matemática, o foco costuma estar nos conceitos matemáticos e na prática de habilidades específicas dessa área. O material norteador são os assuntos do RCO, que vem com um padrão de aula para que aconteça uma aula nas margens de acordo ao sistema. O acesso ao material online, slides e lista de exercícios do RCO, ficou restringido, mas procuramos sempre nos apoiar nas questões da OBMEP e da OBM. Porém, nesta turma nem todos os alunos se destacam na resolução de problemas. Alguns possuem aptidões voltadas para a arte, ilustração, gostam de criar situações imaginárias que envolvam o problema, entre outros. Na sua maioria, preferem métodos de aprendizagem mais dinâmicos e participativos, em vez do formato tradicional, onde o professor lidera a aula e os alunos assumem um papel passivo, gostam de liderar a turma, mostrando seus conhecimentos, e mostrar que são bem produtivos. Eles se sentem motivados quando têm a oportunidade de assumir um papel ativo no processo de aprendizagem.

No primeiro dia de aula, preparei uma avaliação diagnóstica, mas percebi que aplicá-la como uma prova poderia gerar estresse e ansiedade nos alunos, trazendo um medo do que seriam as próximas aulas. Então, mudei a estratégia: resolvi a lista de avaliação junto com os alunos, para entender o nível de conhecimento deles em conceitos matemáticos. A partir daí, nas aulas seguintes, segui os tópicos do RCO, apresentando aulas expositivas e listas de exercícios para eles resolverem. No entanto, isso começou a ficar muito repetitivo. Para quebrar a rotina, comecei a incorporar recursos visuais e práticos, como vídeos curtos sobre a história da matemática, materiais concretos para medir área e perímetro, e filmes que conectavam questões sociais com avanços científicos. A intenção era trazer algo

além da matemática em si, escapando um pouco do currículo tradicional focado apenas em definições, exercícios e provas. Queria que os alunos tivessem uma experiência mais rica e diversificada, que estimulasse o interesse e o aprendizado de forma mais envolvente, seja da matemática, arte ou ciências em geral.

Figura 1. Aula de resolução de exercícios. Colégio Júlio Mesquita. 2024



As vivências no COM me proporcionaram uma maior autonomia e uma visão ampla sobre como posso aplicar metodologias não convencionais em uma turma com um perfil diferenciado. Saber acolher esses alunos e compreender as dificuldades que enfrentam para se encaixar com a turma regular é essencial para garantir que não se desanimem em explorar suas habilidades e talentos únicos. Pretendo continuar buscando formas inovadoras de integrar esses alunos, garantindo que cada estudante tenha a oportunidade de desenvolver plenamente suas habilidades e contribuir de maneira significativa para o grupo. Meu objetivo é promover o crescimento deles em diversas áreas, principalmente na matemática, despertando o interesse tanto na disciplina quanto nas Olimpíadas de Matemática, que é o foco principal do projeto.

#### Referências:

[1] ALENCAR, E.M.L.S.; FLEITH, D.S. **Superdotados: determinantes, educação e ajustamento**. São Paulo: EPU, 2001.

[2] Coordenação geral SEESP/MEC, Secretaria de Educação Especial. **Saberes e práticas da inclusão** : desenvolvendo competências para o atendimento às necessidades educacionais especiais de alunos com altas habilidades/superdotação. Brasília: MEC, Secretaria de Educação Especial, 2006.

[3] PEDRO, Ketilin Mayra. **Altas Habilidades/Superdotação** : características, identificação e atendimento. São Carlos: EDESP-UFSCar, 2023.

[4] BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, LDB. 9394/1996.

[5] BRASIL. **Plano Nacional de Educação**, PNE. Lei Federal nº 13.005/2014. Brasília: MEC, 2014.

# A aplicação das Cifras de César e Espartana no contexto do Projeto de extensão MatematicATIVA

Luiza Tomiello Paraizo<sup>1</sup>

[luiza.paraizo@ufpr.br](mailto:luiza.paraizo@ufpr.br)

Prof.<sup>a</sup> Paula Rogeria de Lima Couto (Orientadora)

Departamento de Matemática

[paulacouto@ufpr.br](mailto:paulacouto@ufpr.br)

Prof.<sup>a</sup> Ximena Mujica (Orientadora)

Departamento de Matemática

[xmujica@ufpr.br](mailto:xmujica@ufpr.br)

\*Universidade Federal do Paraná

**Palavras-chave:** Projeto, Extensão, Cifras, Materiais manipuláveis.

## **Resumo:**

O MatematicATIVA é um projeto de extensão da Universidade Federal do Paraná (UFPR), ligado ao Departamento de Matemática (DMAT). Iniciado em maio de 2017, realiza visitas às escolas com o objetivo de enriquecer o repertório matemático dos estudantes dos Anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, abordando temas pouco trabalhados em sala de aula, de maneira lúdica e interativa.

Além disso, as exposições do MatematicATIVA, destacam-se pelos variados jogos e materiais manipuláveis, elaborados pelos participantes do projeto ao longo dos anos. Durante as oficinas os estudantes tem a oportunidade de interagir com esses materiais que abordam diversos conceitos matemáticos, como Tangrams e Polígonos Replicantes, Cifras de César e Espartana, Mágicas com as Cordas, Torre de Hanoi e Faixa de Mobius.

Em 2023, os participantes do projeto notaram que as atividades envolvendo as Cifras de César e Espartana não estavam atraindo a atenção dos (as) alunos(as). Tais atividades, devido sua complexidade, exigiam bastante tempo para serem realizadas, o que acabou desmotivando os estudantes. A Cifra de César, por exemplo, utiliza um tubo com 35 números que podem servir como chave para desvendar o código. Por outro lado, a cifra Espartana requer que a cifra seja enrolada no tubo, a mensagem só aparece na vertical se o tubo estiver correto. O processo de tentativa e erro envolvido levou os alunos a desanimarem rapidamente e a desistirem da atividade.

---

<sup>1</sup>Bolsista do Projeto de Extensão MatematicATIVA

Diante das dificuldades enfrentadas pelos(as) alunos(as) com as atividades de criptografia, os membros do projeto decidiram reformular a estratégia para tornar as Cifras de César e Espartana mais atraentes. Identificando a necessidade de melhorias, reescreveram os códigos e ajustaram a metodologia das atividades. A reformulação incluiu a introdução de atividades guiadas pelo monitor, proporcionando um suporte mais direto e incentivando os(as) alunos(as) a persistirem. Com essas mudanças, o objetivo era aumentar o interesse e a motivação dos estudantes, reduzindo a frustração e facilitando a compreensão das cifras.

Após a reformulação das atividades com as Cifras de César, o projeto teve a oportunidade de testar a nova estratégia nas visitas seguintes às escolas. A mudança trouxe resultados positivos: os alunos demonstraram um comportamento mais engajado em relação à criptografia. As figuras 1 e 2 mostram as aplicações das Cifras. Com isso, eles ficaram curiosos, formaram duplas para resolver os desafios em conjunto e encontraram a atividade mais fácil e divertida. Os monitores adotaram uma postura mais proativa, incentivando os estudantes e fornecendo dicas sempre que necessário.

Em seguida, os membros do projeto decidiram modificar também as Cifras Espartanas, uma vez que ambas são trabalhadas juntas. Eles consideraram a ideia de classificá-las em níveis de dificuldade, com a Cifra Espartana sendo mais rápida e, portanto, adequada para o nível fácil, e a Cifra de César para o nível difícil. Com isso, refizeram os códigos, mas ainda não tiveram a oportunidade de aplicar esse novo método.

Portanto, antes da reformulação, as cifras não era uma atividade cativante para os estudantes. Após as mudanças, foi possível observar que eles se mostraram mais receptivos a atividades mais desafiadoras, que exigem maior atenção e paciência. Além disso, ficou evidente como as cifras de César e Espartana funcionam como ferramentas educacionais que incentivam a curiosidade dos estudantes e aprimoram o raciocínio lógico, a atenção e a concentração.



Figura 2-Colégio Estadual  
Hildebrando Araújo



Figura 1- Colégio Estadual  
2010- Militar República Oriental  
do Uruguai

**Referências:**

[1] FOETSCH et al. **Matematicativa 2019**: Matemática divertida. In: 5a Jornada de Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática (J3M). Caderno de Resumos. Curitiba, 2019.

[2] LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino da Matemática na Formação de Professores**. 2aed. Campinas: Autores Associados, 2009

# Explorando a Atividade Orientadora de Ensino na Oficina Pedagógica de Matemática: Teoria e Prática em Contexto Educativo

Rebecca Ranai Moreira Costa  
*rebeccaranai@alunos.utfpr.edu.br*<sup>1</sup>

Maria Lúcia Panossian (Orientadora)  
*mipanossian@utfpr.edu.br*<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**Palavras-chave:** Oficina Pedagógica de Matemática, Atividade Orientadora de Ensino, Situação Desencadeadora de Aprendizagem.

## Resumo:

A Oficina Pedagógica de Matemática (OPM), vinculada ao Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), é um projeto de extensão que busca promover a articulação teoria/prática (práxis) entre professores da universidade, da rede básica de ensino e estudantes de licenciatura e pós-graduação. Com base na Teoria Histórico-Cultural, na Teoria da Atividade e na Atividade Orientadora de Ensino (AOE), o projeto tem como objetivo aprofundar o estudo sobre a teoria histórico-cultural e sua aplicação na prática do ensino de matemática, envolvendo professores da rede pública e alunos da licenciatura em Matemática da UTFPR. Este trabalho visa compartilhar as experiências adquiridas durante a participação na OPM, destacando a relevância da AOE na formação de práticas pedagógicas significativas. A partir dessa base teórico-metodológica, ancorada na Atividade Orientadora de Ensino de Moura et al. (2010), o projeto visa também elaborar, organizar, analisar e publicar coletivamente situações de ensino que tratem de conceitos matemáticos.

Em 2024, a participação na modalidade presencial da OPM, que representa apenas um dos formatos oferecidos pelo projeto, foi uma oportunidade única de vivenciar, na prática, a aplicação de conceitos teóricos. Ao longo do primeiro semestre de 2024, foram realizados nove encontros presenciais, com uma equipe composta por seis licenciandos, quatro professoras da rede básica de ensino e duas docentes da UTFPR. Nesse formato presencial, que ocorre quinzenalmente, foi possível aprofundar o estudo da AOE e da SDA. Sob a orientação da professora Maria Lúcia Panossian e em diálogo constante com outros educadores, pudemos estudar e desenvolver uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA) na Escola Rural Municipal Marilda Cordeiro Salgueiro, envolvendo as turmas do 4º e 5º ano dos anos iniciais com base nos pressupostos da AOE.

---

<sup>1</sup> Voluntária da Oficina Pedagógica de Matemática

<sup>2</sup> Professora Coordenadora da Oficina Pedagógica de Matemática

Segundo Boas et al. (2020), a atividade é entendida como unidade de análise que revela o processo mental quando os motivos do sujeito se alinham com o objeto ao qual ele se direciona, com o objetivo de satisfazer uma necessidade individual ou coletiva. No contexto educacional, a atividade envolve ações intencionais realizadas por indivíduos engajados no processo de ensino e aprendizagem. Essas ações visam orientar a apropriação de conhecimentos construídos na experiência humana em interações sociais. Ressalta-se que a atividade não se restringe a ações físicas, mas abrange processos mentais e cognitivos que refletem a relação do sujeito com o ambiente.(Boas et al., 2020, p. 23-24).

De acordo com Moura et al. (2010), a teoria da atividade propõe que o desenvolvimento psíquico não se limita ao ensino formal, mas é também moldado pela participação em atividades coletivas que introduzem novas necessidades e modos de ação. Esse entendimento impõe um desafio aos professores: organizar o ensino de forma a transformar o processo educativo escolar em uma atividade significativa tanto para os alunos quanto para os próprios professores. Para os alunos, essa atividade se manifesta na forma de estudo, enquanto, para os professores, assume a forma de trabalho.

A Atividade Orientadora de Ensino (AOE) se orienta pela necessidade do professor de ensinar e do aluno, de aprender. Nesse contexto, tanto o professor quanto o aluno são vistos como sujeitos ativos, cujos conhecimentos e valores influenciam suas ações e contribuem para a busca de um conhecimento de qualidade. Dessa forma, identifica-se no professor a necessidade de organizar o ensino, com a finalidade de guiar os alunos na apropriação dos conhecimentos.

A situação desencadeadora é um elemento central no ensino, orientando o foco do professor para um problema que envolva o movimento histórico e lógico do conceito. Ela deve permitir ações coletivas e intencionais dos alunos, promovendo a apropriação de formas teóricas de pensamento. Essa metodologia busca promover a solução de problemas com relevância e significado pessoal para os estudantes, permitindo uma aprendizagem mais contextualizada e prática.

De acordo com Moura, Araujo e Serrão (2019) a situação desencadeadora visa reestabelecer a necessidade social de produção do conhecimento, garantindo que o significado social atribuído ao conteúdo seja internalizado e consolidado como conhecimento pessoalmente significativo para os alunos.

A organização do ensino na Oficina Pedagógica de Matemática, estruturada nos elementos da AOE, proporcionou-me uma compreensão aprofundada de como a teoria pode e deve ser interligada com a prática em sala de aula. No início do projeto, os participantes discutiram o planejamento semestral, incluindo a definição das responsabilidades e a organização dos encontros. Durante os encontros subsequentes, foram abordados temas como a elaboração e análise de SDAs, com a discussão de conceitos matemáticos e metodológicos relevantes. A troca de ideias e a colaboração entre os membros foram enfatizadas, com foco na adaptação e aplicação das SDAs em diferentes contextos educativos.

As reuniões também serviram para a organização prática de uma aula, incluindo a criação de materiais e a definição de estratégias de ensino. Destaca-se a

importância da comunicação eficiente e da cooperação entre os participantes, contribuindo para o sucesso na implementação das atividades propostas.

Uma das minhas contribuições mais significativas ao projeto foi durante o desenvolvimento de uma SDA que explorava o conceito de grandezas e medidas. Planejamos a situação com base nos princípios da Atividade Orientadora de Ensino (AOE), adaptando uma situação originalmente destinada ao 7º ano para o 4º ano, com foco nos conceitos de divisão, razão e proporção, utilizando a situação “organizando um evento na quadra de esportes” disponível na “Coleção Histórias com a Matemática em Quadrinhos”, presente no site da OPM, conforme apresentado por Boas et al. (2020). Nessa SDA, os alunos foram divididos em grupos para resolver problemas de divisão de áreas usando dobraduras, com o objetivo de promover a apropriação de conceitos matemáticos relevantes e incentivar a interação social e a resolução criativa de problemas, aplicando na prática os conhecimentos adquiridos.

A experiência de desenvolvimento da SDA revelou a necessidade de adaptações imediatas devido a desafios imprevistos. A divisão da turma em grupos, juntamente com o uso de materiais visuais, permitiu intervenções mais próximas, contribuindo no entendimento dos conceitos de divisão e proporção. Essa SDA, realizada no primeiro semestre de 2024, foi uma oportunidade de desenvolver os estudos sobre a AOE e de vivenciar a dinâmica colaborativa da OPM. Sua elaboração não apenas reforçou meus conhecimentos sobre o conteúdo matemático, mas também sobre como organizar o ensino de maneira a tornar a aprendizagem significativa para os alunos.

Participar da OPM tem sido uma experiência transformadora, oferecendo uma nova perspectiva sobre o ensino de matemática que valoriza tanto o rigor teórico quanto a aplicabilidade prática. A partir desta experiência, sinto-me mais preparada para enfrentar os desafios da sala de aula e contribuir para a formação de alunos críticos e capazes de compreender e utilizar a matemática em sua vida cotidiana.

## Referências:

- [1] BOAS, Flávia Patolea Vilas, et al; PANOSSIAN, M. L.; TOCHA, N. N. (org.). Estabelecendo Parâmetros de Análise de Situações de Ensino de Conteúdo Matemático: aproximações a partir da Atividade Orientadora de Ensino. Curitiba, 2020.
- [2] MOURA, M. O. de, et al. ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO: unidade entre ensino e aprendizagem. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 10, n. 29, p.205-229, abr. 2010.
- [3] MOURA, M. O. de. ARAÚJO, Elaine Sampaio. SERRÃO, Maria Isabel Batista. Atividade Orientadora de Ensino: fundamentos. Linhas Críticas, v. 24. 2019.
- [4] VILAS BOAS, F. P.; SILVA, R. A. da. Organizando um Evento na Quadra de Esportes. Coleção Histórias com a Matemática em Quadrinhos. Volume 5. 2020.