UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor:	Prof. Dr. Cleber de Medeira
Estudantes:	Ana Cleo Matias Vieira da Motta
	Brenda Dal Puppo Monteiro
	Daniel Thiago Ivanchechen
	Elissandro Antonio Sikora
	Felipe Monteiro Kiotheka
	Kaiky Yuji Ishiy
	Kevyan Uehara de Moraes
	Laura Carolina Aymoré Ferrandin
	Leonardo Cortez do Nascimento
	Lucas Xavier
	Otavio Augusto Salomão Recacho
	Pedro Dell'Agnolo Busarello
	Samuel Adam Trindade de Souza
	Thiago Batista dos Santos Martins
Site:	www.petmatematica.ufpr.br
Instagram:	instagram.com/petmatematicaufpr/
E-mail:	petmatematica@ufpr.br
Telefone:	(41) 3361-3672
Data do Evento:	13 e 14 de julho de 2024

Curitiba, julho de 2024.

Apresentação

Prezado(a) estudante; seja bem-vindo(a)!

É uma grande satisfação para nós do PET Matemática da UFPR, sua participação nessa 19ª edição do *Brincando de Matemático*. Esse evento de extensão, promovido por nosso grupo, tem como principal objetivo apresentar temas matemáticos interessantes de uma maneira lúdica e acessível, porém sem perder a formalidade.

Nessa edição será abordada uma introdução ao conceito de função e seus afins. Esse é um tópico de grande importância na Matemática e pode ser aplicado em diversas situações cotidianas. Além disso, ele pode nos ajudar a compreender algumas coisas legais e intrigantes. Por exemplo, você sabia que existem tantos números naturais quanto números racionais? Parece um pouco contraintuitiva essa afirmação, certo? Porém, com a ajuda das funções, veremos que ela é verdadeira. Além disso, veremos várias propriedades matemáticas bem curiosas sobre as funções.

Serão dois dias de evento em que iremos aprender e nos divertir usando a teoria e dinâmicas sobre esse tema tão imprescindível na Matemática.

Gostaria de agradecer cada um dos membros do grupo PET Matemática, pela dedicação que dispensaram para a realização desse evento. Agradeço também a Administração da UFPR por apoiar e fomentar essa iniciativa.

Prof. Cleber de Medeira
Tutor do PET-Matemática
Departamento de Matemática - UFPR

Sumário

Sumário **5**

1 Conhecendo as funções **7**
1.1 Relacionando conjuntos 7
1.1.1 Diagrama de flechas 9
1.1.2 Componentes de uma função 11
1.2 Funções afins 14
1.2.1 Funções afins crescentes e decrescentes 15
1.2.2 Valor numérico de uma função 16
1.3 Funções quadráticas 17
1.4 Exercícios propostos 19

2 O Plano Cartesiano, as funções e os gráficos **23**
2.1 Motivações para o Plano Cartesiano 24
2.1.1 Localizações 24
2.1.2 Cópias de figuras 26
2.2 O plano cartesiano 30
2.3 As funções e seus gráficos 31
2.3.1 O gráfico de uma função 31
2.4 Exercícios Propostos 42

3 Conjuntos de mesmo tamanho **45**
3.1 Contando os elementos de um conjunto 45
3.1.1 Exemplo específico 47

3.1.2 Injetividade 48
3.1.3 Sobrejetividade 50
3.1.4 Bijetividade 51
3.2 Generalizando 52
3.3 Conjuntos infinitos 55
3.3.1 Números naturais 55
3.3.2 Números inteiros e racionais 56
3.3.3 Números reais 60
3.4 Exercícios propostos 61

Referências Bibliográficas **65**

Capítulo 1

Conhecendo as funções

O objetivo deste capítulo é apresentar o conceito de *função*. Podemos pensar uma função como uma relação entre dois conjuntos não vazios, que relaciona elementos desses conjuntos por meio de uma regra de associação.

1.1 Relacionando conjuntos

Para construir uma função entre dois conjuntos, precisamos entender certos componentes que a determinam. Por exemplo, digamos que queremos uma função que relacione a cada número natural, o seu sucessor.

Primeiro, precisamos determinar os conjuntos que estamos relacionando. Nesse caso, o primeiro será o conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$, e o segundo conjunto o dos sucessores. Note que os sucessores são números naturais, ou seja, podemos considerar o segundo conjunto também como os números naturais. Essa relação pode ser observada no diagrama a seguir:

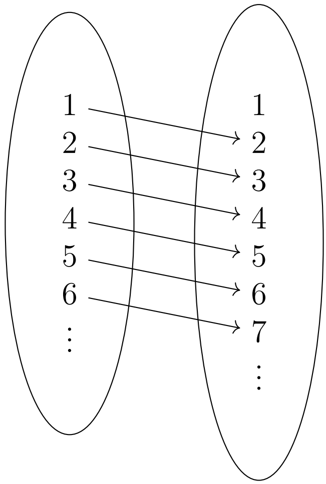

Figura 1.1: Naturais e seus sucessores.

Por fim, vamos determinar qual será a regra dada por essa função. Para isso, vamos utilizar a tabela de valores que relaciona cada natural com seu sucessor:

Número	**Sucessor**
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1.1: Naturais e seus sucessores.

Sabemos que o sucessor de um número natural será a soma dele com o número 1. Assim, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, seu sucessor será dado por $n + 1$.

Com isso, a função que relaciona a cada número natural o seu sucessor pode ser descrita usando o seguinte diagrama:

$$\begin{aligned} s: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto n+1. \end{aligned}$$

Outra forma de escrever essa função é $s(n) = n + 1$.

De forma geral, definimos função da seguinte forma:

Definição 1.1.1. Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma função de A em B é uma relação que associa a cada valor $x \in A$ um único valor $f(x) \in B$. Ela é usualmente denotada por $f : A \to B$.

1.1.1 Diagrama de flechas

Uma forma útil para entendermos uma função é usar seu diagrama de flechas. Já encontramos esse tipo de diagrama na Figura 1.1.

Definição 1.1.2. Sejam A e B conjuntos não vazios. Dada uma função $f : A \to B$, seu diagrama de flechas é uma figura na qual estão representados os conjuntos A e B, e cada elemento x em A é ligado por uma flecha a um único elemento $f(x)$ em B.

Para desenhar um diagrama de flechas fazemos o seguinte. Primeiro, escrevemos os elementos do conjunto A e os contornamos com uma figura. Em nosso contexto, a figura será uma elipse. Para uma melhor representação, colocamos a letra A do lado da figura para sabermos que ela representa esse conjunto. Fazemos o mesmo procedimento com o conjunto B. Por último, ligamos com uma flecha cada elemento x do conjunto A a um elemento $f(x)$ no conjunto B.

Exemplo 1.1.3. Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Se $f : A \to B$ é dada por $f(x) = x - 1$, então seu diagrama de flechas é a Figura1.2. No lado esquerdo está o conjunto A, enquanto no lado direito está o conjunto B. A flecha que sai de 1 no conjunto A chega em $f(1) = 0$ no conjunto B. Analogamente, a flecha que sai de 2 no conjunto A chega em $f(2) = 1$ no conjunto B.

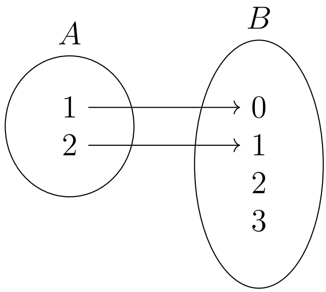

Figura 1.2

Observação 1.1.4. Se um dos conjuntos A ou B for infinito, então o diagrama de flechas de uma função $f : A \to B$ não pode ser completamente descrito. Na Figura 1.1, isso é representado pelo uso de reticências para indicar que o diagrama não está completo com todas as flechas.

Observação 1.1.5. Sejam A e B conjuntos não vazios e $f : A \to B$ uma função. Pela Definição 1.1.1, cada elemento $x \in A$ é associado a único valor $f(x) \in B$. Em termos de diagramas de flechas, isso significa que para cada $x \in A$ só existe uma única flecha que sai de x chegando em algum elemento de B.

Exemplo 1.1.6. Os diagramas a seguir não representam funções.

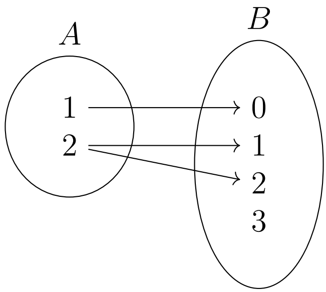

Figura 1.3

Nesse caso, o elemento $2 \in A$ é ligado a dois elementos distintos de B. Portanto, esse diagrama de flechas não representa uma função.

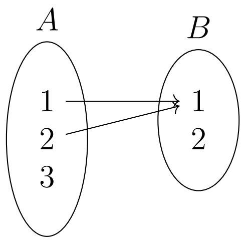

Figura 1.4

Nesse caso, o elemento $3 \in A$ não é ligado a nenhum elemento de B. Logo, não é uma diagrama de flechas de uma função.

1.1.2 Componentes de uma função

Para uma melhor compreensão da ideia de função, vamos definir precisamente cada um de seus componentes.

Definição 1.1.7. Seja $f : A \to B$ uma função. O conjunto

A é chamado de *domínio* da função f, enquanto que o conjunto B é chamado de *contradomínio*.

O domínio é o conjunto dos valores x que podem ser relacionados pela função f. Em outras palavras, é o conjunto cujos elementos são as *variáveis* da função. Quando o domínio não está explícito, consideramos o maior conjunto no qual a função faz sentido.

Por outro lado, o contradomínio é o conjunto dos valores que podem ser relacionados aos elementos do domínio através da função f. Ressalta-se que cada elemento do domínio deve estar relacionado com algum elemento do contradomínio.

Definição 1.1.8. O conjunto *imagem* da função $f : A \to B$ é o subconjunto do contradomínio B composto pelos elementos correspondentes de algum elemento do domínio, isto é, $Im(f) = \{f(x) \in B;\ x \in A\}$.

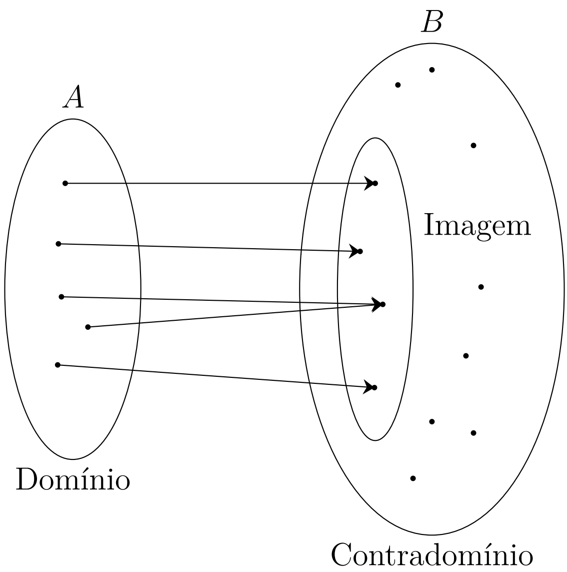

Figura 1.5: Domínio, contradomínio e imagem.

Definição 1.1.9. A *lei de formação* é a regra que nos diz como os elementos do domínio se relacionam com os elementos do contradomínio.

Exemplo 1.1.10. Qual é o domínio da função cuja lei de formação é $f(x) = \sqrt{x-2}$?

Sabemos que ao considerarmos números reais, a raiz quadrada só fica bem definida quando seu radicando não é negativo, ou seja, é maior ou igual a zero. Nesse caso, teremos que $x - 2 \geq 0$, o que implica $x \geq 2$. Logo, como o domínio não foi explicitado, o consideramos como sendo o conjunto dos números reais maiores ou iguais a 2. Em outra notação, o domínio é o conjunto dado por $A = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 2\}$.

Exemplo 1.1.11. Determine a imagem da função

$$\begin{array}{rcl} s : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1. \end{array}$$

Observamos que o número 1 é o primeiro número natural, ou seja, ao somar 1 a algum número natural, o resultado nunca será 1. Com isso, concluímos que o 1 não está na imagem da função, e temos que a imagem é dada por $\mathbb{N} - \{1\}$ (conjunto dos números naturais diferentes de 1).

Exemplo 1.1.12. Um carro iniciou uma viagem no quilômetro 5 de uma estrada. Sabendo que esse carro se move a uma velocidade de 80 km/h, em qual quilômetro da estrada ele estará após h horas?

Podemos utilizar uma tabela de valores para entender como se relacionam a posição do carro e o tempo de viagem. Em 0 horas de viagem, note que o carro estará no quilômetro em que iniciou seu percurso, ou seja, no quilômetro 5. Após 1 hora de viagem, ele terá andado 80 quilômetros, ou seja, estará no quilômetro 85. Seguindo esse raciocínio, montamos a tabela que relaciona o tempo de viagem com a posição do carro na estrada:

Hora h	**Quilômetro** $f(h)$
0	5
1	85
2	165
3	245
4	325
5	405
6	485
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1.2: Posição do carro em relação ao tempo de viagem.

Concluímos que o quilômetro em que o carro estará, após h horas de viagem, é dado por $80h + 5$. Dessa forma, podemos representar essa situação por meio de uma função cuja lei de formação é dada por $f(h) = 80h + 5$. Nesse caso, o domínio é o conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$. O contradomínio pode ser considerado qualquer subconjunto que contenha os valores $\{5, 85, 165, 245, 325, 405, 485, \ldots\}$.

Agora que vimos quais são os componentes de uma função, podemos explorar um pouco alguns *tipos especiais de função*, especificamente as funções afins e as funções quadráticas.

1.2 Funções afins

Definição 1.2.1. Uma função afim, também chamada de função do 1º grau, é uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que possui o formato $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais fixados.

Nesse tipo de função, chamamos o número representado por a de *coeficiente angular*, e ele representa a taxa de variação da função. Já o número representado por b é chamado de *coeficiente linear*, ou também, termo constante da função. Vejamos alguns exemplos de funções afins:

Exemplo 1.2.2. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = b$, com $b \in \mathbb{R}$, é chamada de função constante. Observamos que nesse caso, $a = 0$, ou seja, a função não tem variação. Alguns exemplos de funções constantes são $f(x) = \sqrt{2}$, $f(x) = 7$, $f(x) = \pi$ e $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Exemplo 1.2.3. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ é chamada de *função identidade.* Observe que, nesse caso, temos $a = 1$ e $b = 0$.

Exemplo 1.2.4. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x$. Observe que, nesse caso, temos $a = -1$ e $b = 1$.

1.2.1 Funções afins crescentes e decrescentes

Dizemos que uma função afim será *crescente* quando, ao aumentarmos o valor de x, o valor de $f(x)$ também aumenta. Por outro lado, dizemos que uma função afim será *decrescente* quando, ao aumentarmos o valor de x, o valor de $f(x)$ diminui.

Exemplo 1.2.5. Determine se as funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$ e $g(x) = -2x + 1$ são crescentes ou decrescentes.

Vamos analisar como os valores de $f(x)$ e $g(x)$ variam ao aumentarmos o valor de x:

x	$f(x)$	$g(x)$
-2	2	5
-1	2,5	3
0	3	1
1	3,5	-1
2	4	-3
3	4,5	-5
4	5	-7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1.3: Valores de f e g em relação a x.

Observe que, ao aumentar o valor de x, o valor de $f(x)$ também aumenta, ou seja, f é uma função afim crescente. Por outro lado, quando aumentamos o valor de x, podemos ver que o valor de $g(x)$ diminui. Concluímos então, que g é decrescente.

Para detectar se uma função afim $f(x) = ax + b$ é crescente ou decrescente, basta olhar para seu coeficiente angular a. Se o coeficiente angular for positivo, ou seja, $a > 0$, então a função será crescente. Se for negativo, ou seja, $a < 0$, então a função será decrescente. Note que, como visto no Exemplo 1.2.2, caso $a = 0$, a função será constante.

1.2.2 Valor numérico de uma função

Para encontrarmos o valor numérico de uma função, conhecendo sua lei de formação, basta substituirmos o valor de x para obter sua imagem $f(x)$.

Exemplo 1.2.6. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(h) = 80h+5$, do Exemplo 1.1.8, toma valores de h em horas. Qual o valor de f em 2 horas e 45 minutos?

Vamos primeiro converter 45 minutos para horas. Sabemos que 1 hora = 60 minutos. Assim, 45 minutos são 0,75 horas. Ou seja, queremos saber a posição do carro na estrada após 2,75 horas. Ao substituir o valor de h na função, obtemos:

$$\begin{aligned} f(h) &= 80h + 5 \\ f(2,75) &= 80(2,75) + 5 \\ f(2,75) &= 220 + 5 \\ f(2,75) &= 225. \end{aligned}$$

Ou seja, após 2 horas e 45 minutos de viagem, o carro estará no quilômetro 225 da estrada.

1.3 Funções quadráticas

Considere uma função afim $f(x) = dx + c$. Vamos supor que podemos substituir no lugar do coeficiente angular d outra função afim, ou seja, vamos considerar $d = ax + b$. Substituindo a expressão de d na lei de formação da função f, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= dx + c \\ f(x) &= (ax + b)x + c \\ f(x) &= ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Lembre-se que o coeficiente angular de uma função afim representa a sua taxa de variação. Ele nos diz que a função varia de maneira uniforme conforme x varia. Nesse caso, em que substituímos esse coeficiente pela expressão $ax + b$, obtemos uma função com uma variação não uniforme. A função obtida é conhecida como *função quadrática*, que é definida precisamente da seguinte forma:

Definição 1.3.1. Uma função quadrática, também chamada de função do 2º grau, é uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que possui o formato $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a, b e c números reais com $a \neq 0$.

Exemplo 1.3.2. Determine os coeficientes a e c da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cuja lei de formação é $f(x) = ax^2 - 3x + c$, sabendo que $f(0) = 2$ e $f(2) = 0$. Além disso, calcule os valores de $f(-1)$, $f(1)$ e $f(3)$.

Como $f(0) = 2$, temos que $f(0) = a(0)^2 - 3(0) + c = 2$, ou seja, $0 - 0 + c = 2$ e portanto $c = 2$. Assim, escrevemos f como $f(x) = ax^2 - 3x + 2$. Agora, uma vez que $f(2) = 0$, temos que $f(2) = a(2)^2 - 3(2) + 2 = 0$, ou seja, $4a - 6 + 2 = 0$, logo $4a = 4$ e concluímos que $a = 1$.

Uma vez que determinamos $a = 1$ e $c = 2$, f é dada por $f(x) = x^2 - 3x + 2$, e conseguimos calcular o valor de f nos pontos -1, 1 e 3:

$$\begin{aligned} f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 2 &\implies f(-1) = 1 + 3 + 2 = 6; \\ f(1) = (1)^2 - 3(1) + 2 &\implies f(1) = 1 - 3 + 2 = 0; \\ f(3) = (3)^2 - 3(3) + 2 &\implies f(3) = 9 - 9 + 2 = 2. \end{aligned}$$

Exemplo 1.3.3. Um fabricante produz uma certa camiseta ao custo de 10 reais por peça. Intuitivamente, sabemos que se o preço da venda for muito baixo ele venderá mais camisetas, porém terá um lucro pequeno por peça. Por outro lado, se tentar vender por um preço muito alto, embora tenha uma lucro maior por unidade vendida, venderá menos camisetas. Um estudo de mercado estima que a venda semanal desse produto é dada por $80 - x$ camisetas, sendo x o valor cobrado por cada camiseta, com $10 \leq x \leq 80$. Por exemplo, nessa estimativa, se ele vender cada camiseta por 12 reais, venderá 68 camisetas por semana, enquanto que se vender cada unidade produzida por 78 reais, venderá apenas 2 camisetas.

Dessa forma, o custo da produção é dado pela função $C(x) = 10(80 - x)$, ou seja, o custo de cada camiseta vezes o número de camisetas fabricadas. A receita será dada pela função $R(x) = (80 - x)x$, isto é, o número de camisetas vendidas na semana multiplicado pelo valor de venda.

Assim, uma vez que o lucro $L(x)$ é diferença entre a receita $R(x)$ e o custo $C(x)$, obtemos

$$\begin{array}{rcl} L(x) & = & R(x) - C(x) \\ L(x) & = & (80 - x)x - 10(80 - x); \\ L(x) & = & 80x - x^2 - 800 + 10x; \\ L(x) & = & -x^2 + 90x - 800. \end{array}$$

A função quadrática dada por $L(x) = -x^2 + 90x - 800$, com $10 \leq x \leq 80$, representa o lucro que o fabricante terá semanalmente com a venda dessas camisetas.

Usando conceitos mais avançados, que não serão discutidos aqui, é possível concluir que o lucro máximo será obtido quando cada camiseta for vendida por $x = 45$ reais, obtendo um lucro de $L(45) = 1225$ reais.

1.4 Exercícios propostos

Nos Exercícios 1.4.1, 1.4.2 e 1.4.3, utilize a tabela de valores para definir qual a lei de formação das funções que modelam as situações. Além disso, determine o domínio, o contradomínio e a imagem de cada uma delas.

Exercício 1.4.1. Qual o valor encontrado ao multiplicar um número real x qualquer por ele mesmo?

Exercício 1.4.2. Maria foi a um mercado onde cada caixa de ovos possui 12 ovos. Quantos ovos Maria terá, se comprar y caixas de ovos?

Exercício 1.4.3. João tem 1,50 metros de altura. Ele foi ao médico e sua previsão de crescimento pelos próximos anos é de 0,5 centímetros por mês. Como é possível calcular a altura de João após t meses se passarem durante os próximos anos?

Exercício 1.4.4. Determine se as seguintes funções são do 1º grau. Caso a resposta seja sim, explicite quais os coeficientes angulares e lineares, e diga se a função é crescente, decrescente ou constante:

a) $f(x) = 5x - 2$

b) $f(x) = \sqrt{11}x$

c) $f(x) = \sqrt{-x+3}$

d) $f(x) = -\dfrac{1}{4}x + \pi$

e) $f(x) = \cos x + 2$

Desafio 1.4.5. Determine os valores de a e b na função afim dada por $f(x) = ax + b$, onde $f(-1) = -1$ e $f(2) = 8$.

Exercício 1.4.6. Determine se as funções abaixo são do 2º grau. Se sim, explicite **a**, **b** e **c** para cada uma.

a) $f(x) = 3x^2 - x + 2$

b) $f(x) = -x^2 + x$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 7}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \pi x + 5$

e) $f(x) = -8x^2 + 2$

Exercício 1.4.7. Dada a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cuja lei de formação é $f(x) = x^2+2x-3$, calcule $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$.

Desafio 1.4.8. Determine os valores de a e b na função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $f(-1) = 8$, $f(0) = 4$ e $f(2) = 2$.

Capítulo 2

O Plano Cartesiano, as funções e os gráficos

Neste capítulo, vamos aprender sobre alguns conceitos matemáticos: *Plano Cartesiano* e *Gráficos de Funções.*

Podemos traçar a história do Plano Cartesiano desde a Grécia antiga: O filósofo e matemático Apolônio de Perga (262 a.C. — 194 a.C.) contribuiu com o assunto através do tratado "As cônicas". Nesse trabalho, Apolônio estava preocupado em localizar algumas figuras em relações a outras. A questão da localização é algo que veremos adiante.

Depois dele, podemos destacar o trabalho de três franceses:

- Nicolau de Oresme (1325–1382), com o "Tractatus de Latitudinibus formarum";
- René Descartes (1596–1650) com seu trabalho "Discurso do Método";
- Pierre de Fermat (1601-1665), que viveu no mesmo período que Descartes, com o tratado "Ad locos planos et solidos isagoge".

Os trabalhos de Descartes e Fermat são as bases da geometria moderna. Eles também se aproximam bastante do objeto conhecido como "plano cartesiano", que também veremos a frente. Na próxima seção, vamos entender alguns dos motivos de se usar o plano cartesiano.

2.1 Motivações para o Plano Cartesiano

2.1.1 Localizações

Como você descreveria para alguém onde está o centro do círculo na Figura 2.1? E o vértice F do triângulo?

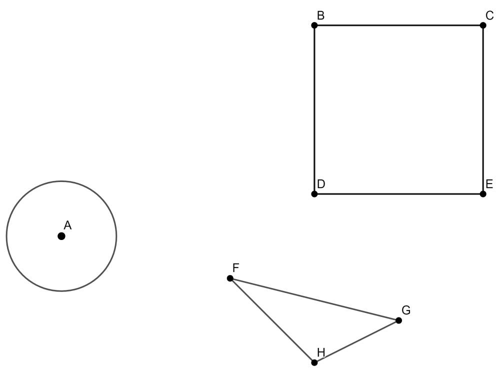

Figura 2.1: Círculo, quadrado e triângulo no espaço.

E se adicionarmos uma reta orientada e numerada abaixo deles, como na Figura 2.2?

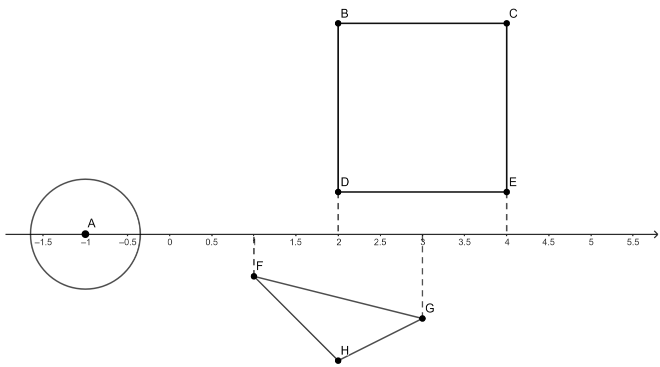

Figura 2.2: Círculo, quadrado e triângulo no espaço, com uma reta de referência.

Agora podemos dizer algo como "o centro do círculo está em -1" e "o vértice F do triângulo está em 1". E qual a utilidade na Matemática? Uma ideia é a seguinte:

Onde estão os vértices do quadrado na Figura 2.2? Localizando eles, conseguimos dizer o tamanho do lado e, por exemplo, calcular sua área.

Mas existe um problema nessa forma de localizar esses pontos no plano. Note que, os vértices B e D têm a mesma localização 2. Porém, precisamos de mais referências para dizermos com precisão onde estão localizados esses vértices.

Problema 2.1.1. Como dizer, de maneira única, onde estão localizados pontos?

Uma solução é dizer algo como "X está em 2, em cima" e "X está em 2, embaixo". Mas veja que nesse caso precisamos de duas informações para localizar: a posição numérica, nesse caso o número 2, e o complemento: "em cima" ou "em baixo"

Mas e se houvessem mais vértices na mesma localização 2? O que faríamos? Ainda precisaríamos de *duas* informações pra dizer a localização. Isso nos leva à ideia de *coordenada*.

Definição 2.1.2. Se precisamos de duas informações, A e B, para descrever a localização de um objeto X, dizemos que "X está na *coordenada* (A, B)", sendo A e B essas informações.

Exemplo 2.1.3. Na solução "X está em 2, em cima" vamos escrever "(2, em cima)", ou no caso "Y está em 2, em baixo" como "(2, embaixo)". Se quisermos abreviar ainda mais, poderíamos escrever X está na coordenada (X, cima) e Y está na coordenada (X, baixo).

Observação 2.1.4. Nesse exemplo uma informação é um número, e a outra é uma palavra. No plano cartesiano, e na Matemática de forma geral, as coordenadas são números!

2.1.2 Cópias de figuras

Imagine que você quer copiar a figura geométrica da Figura 2.3 dentro do espaço da Figura 2.4. Difícil, certo?

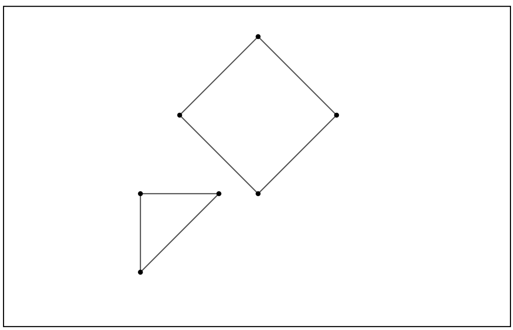

Figura 2.3: Losango e triângulo no espaço.

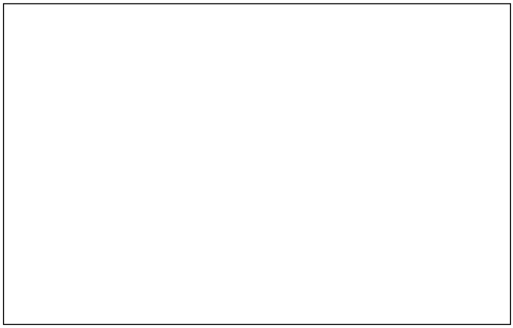

Figura 2.4: Espaço em branco para a cópia.

Agora, se colocarmos um sistema de eixos, como nas Figuras 2.5 e 2.6 a seguir, a tarefa fica mais fácil.

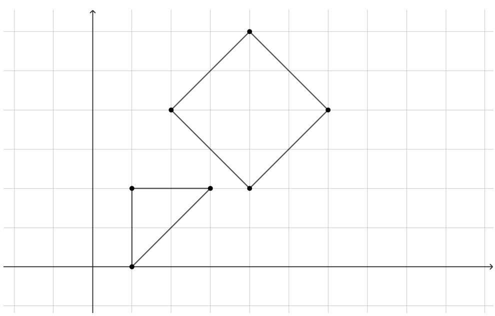

Figura 2.5: Losango e triângulo no espaço, com um sistema de eixos perpendiculares.

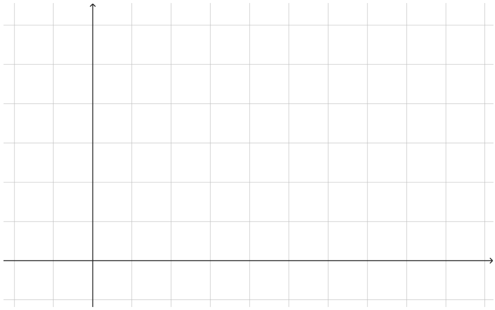

Figura 2.6: Sistema de eixos perpendiculares.

Perceba que o sistema poderia ser outro. Usamos outros eixos nas Figuras 2.7 e 2.8, o que ainda nos ajudaria a fazer a cópia. Por exemplo:

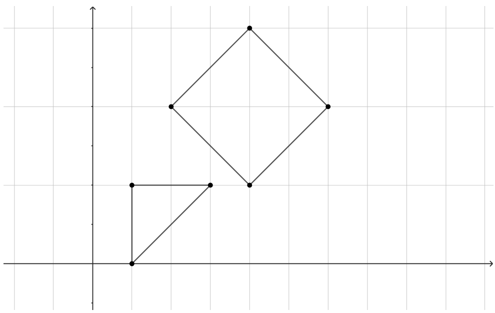

Figura 2.7: Losango e triângulo no espaço, com um outro sistema de eixos perpendiculares.

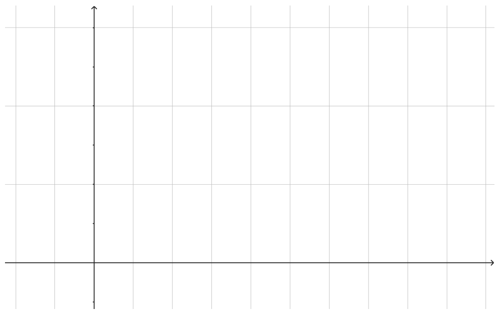

Figura 2.8: Outro sistema de eixos perpendiculares.

Uma outra alternativa poderia ser como nas Figuras 2.9 e 2.10, onde adotamos um eixo inclinado:

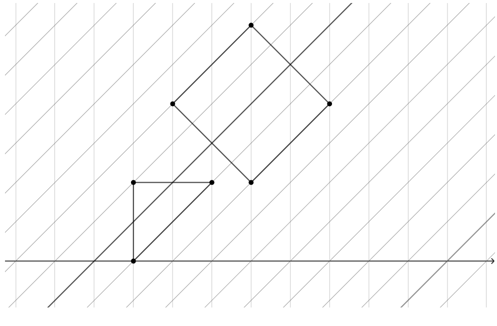

Figura 2.9: Losango e triângulo no espaço, com um sistema de eixo inclinados.

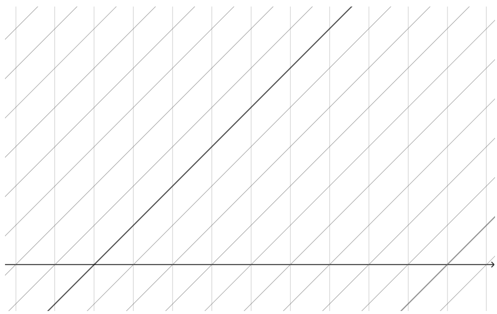

Figura 2.10: Um sistema de eixo inclinados.

O Plano Cartesiano que veremos a frente junta as duas ideias: eixos e coordenadas!

2.2 O plano cartesiano

O sistema de eixos com um deles inclinado como na Figura 2.10, lembra o que Descartes utilizou no inicio de seu trabalho. Já o sistema com eixos perpendiculares, como na Figura 2.8, se assemelha com os planos ao final do trabalho desse filósofo.

Com o desenvolvimento da Matemática, foi ficando mais famoso o plano como na Figura 2.6: com eixos perpendiculares, e distâncias horizontais e verticais iguais. Esses sistema de eixos é chamado de “Plano Cartesiano”.

Agora estamos prontos para dizer, formalmente, o que é realmente o “Plano Cartesiano”.

Definição 2.2.1. O Plano Cartesiano é um sistema de coordenadas onde cada ponto é representado por um par ordenado de coordenadas reais. Ou seja, conseguimos localizar sem ambiguidades qualquer ponto desse plano através de coordenadas (x, y), sendo x e y números reais.

Os números da primeira coordenada correspondem a uma reta orientada na horizontal, como na da Figura 2.2. Essa reta orientada, onde os números crescem para a direita, é chamada de *eixo x* ou *eixo das abscissas*.

Os números da segunda coordenada correspondem a uma reta orientada na vertical, onde os números crescem para cima. Chamamos essa reta orientada de *eixo y* ou *eixo das ordenadas*.

Esses eixos são perpendiculares e as distâncias em cada eixo são dadas pela mesmas escala, como na Figura 2.6. A escala é importante: veja que o sistema de eixos da Figura 2.8 é diferente do da Figura 2.6.

2.3 As funções e seus gráficos

2.3.1 O gráfico de uma função

Podemos entender o gráfico de uma função como uma figura que desenhamos no plano cartesiano. E como descobrimos o que desenhar? Da seguinte maneira:

Definição 2.3.1. Dada uma função $f : D_f \longrightarrow C_f$, o *gráfico* de f é o conjunto

$$G_f = \{(x, f(x));\ \text{onde } x \text{ está em } D_f.\}$$

Ou seja, G_f é o conjunto dos pontos coordenados, onde a primeira entrada é um elemento do domínio, e a segunda entrada é o valor da função aplicada nesse elemento.

Exemplo 2.3.2. Se uma função f tem um elemento 3 no domínio, e $f(3) = 5$ então o ponto de coordenadas $(3, 5)$ pertence ao gráfico de f, e desenhamos ele no plano cartesiano.

Exemplo 2.3.3. Atenção! O domínio é importante na hora de desenhar o gráfico: por exemplo, podemos desenhar o gráfico da função com regra $f(x) = 1$ de várias maneiras. Na Figura 2.11 a seguir, o domínio da função é o conjunto $\{2\}$, e $G_f = \{(2, 1)\}$.

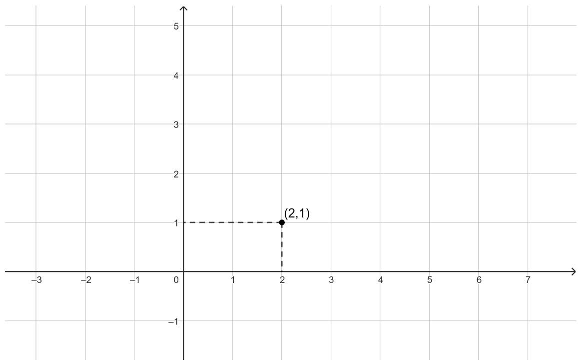

Figura 2.11: Gráfico de f, considerando o domínio $\{2\}$.

Agora veja a Figura 2.12, onde o domínio da função é o conjunto $\{2, 4\}$:

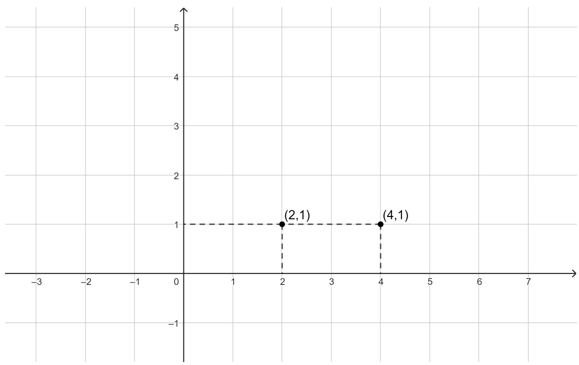

Figura 2.12: Gráfico de f, considerando o domínio $\{2, 4\}$.

Ou seja, $G_f = \{(2, 1), (4, 1)\}$. Agora, considerando os números inteiros como domínio, o gráfico é dado na Figura 2.13:

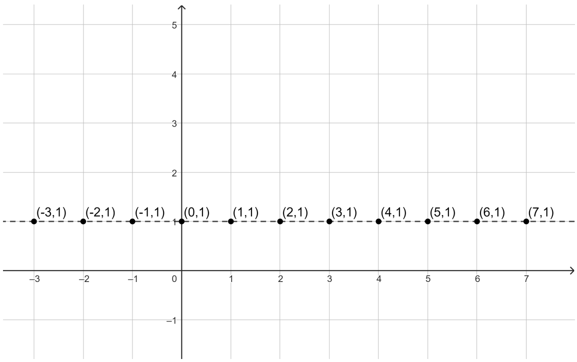

Figura 2.13: Gráfico de f, considerando como domínio os números inteiros $\mathbb{Z}$.

E, finalmente, se o domínio for todos os números reais então

$$G_f = \{(x,1); \;\; x \in \mathbb{R}\},$$

e temos o desenho do gráfico como na Figura 2.14 a seguir:

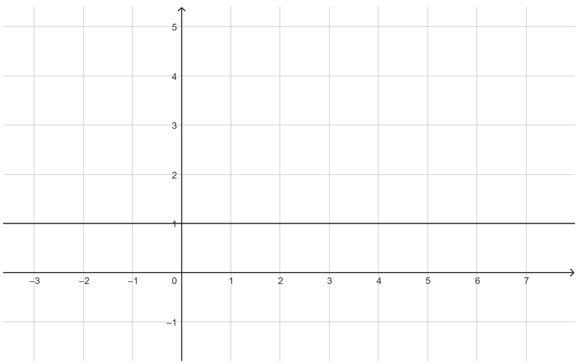

Figura 2.14: Gráfico de f, considerando o domínio $\mathbb{R}$, os números reais $\mathbb{R}$.

O domínio também é importante para dizer quando duas funções são iguais, como no Exemplo 2.3.4 a seguir:

Exemplo 2.3.4. As funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x$ são iguais? Primeiro, vamos considerar como domínio de ambas o conjunto $\{0\}$. Nesse caso, $f(0) = 0^2 = 0 = 2 \cdot 0 = g(0)$. Como vemos na Figura 2.15:

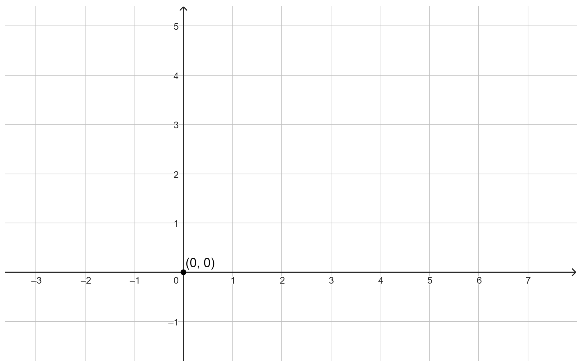

Figura 2.15: Gráfico de f e g quando $D_f = D_g = \{0\}$.

Agora, se o domínio for o conjunto $\{0, 2\}$:

$$f(2) = (2)^2 = 4$$
$$g(2) = 2 \cdot (2) = 4$$

Então o gráfico nesse caso será como na Figura 2.16:

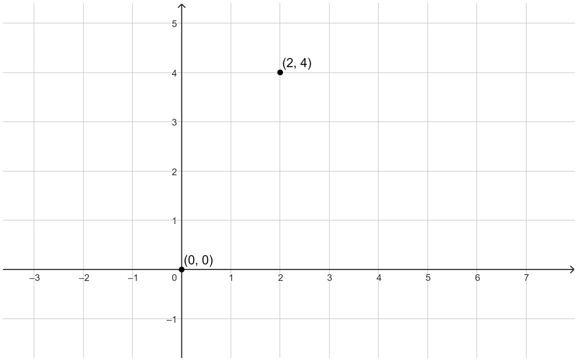

Figura 2.16: Gráfico de f e g quando $D_f = D_g = \{0, 2\}$.

Podemos concluir que quando f e g têm o mesmo gráfico e seus domínios são iguais, sendo algum desses conjuntos: $\{0\}, \{2\}$ ou $\{0, 2\}$, então $f = g$.

Mas será que só esses domínios que fazem $f = g$? Vamos mostrar graficamente que esse é realmente o caso, e que qualquer outro domínio não faz a igualdade ser verdadeira. Mas antes disso, precisamos saber como é o gráfico de uma função afim e de uma função quadrática.

Exemplo 2.3.5. O objetivo desse exemplo é construir o gráfico da função $f(x) = 2x$. Faremos isso por etapas:

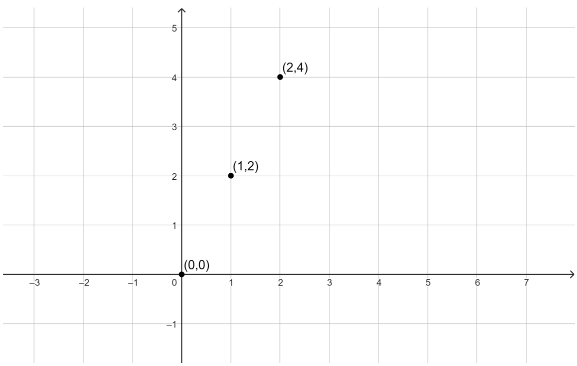

Figura 2.17: Gráfico de $f(x) = 2x$ quando $D_f = \mathbb{Z}$.

Agora consideramos como domínio de $f(x) = 2x$ o conjunto formado pelas metades dos números inteiros, que em particular inclui $\mathbb{Z}$.

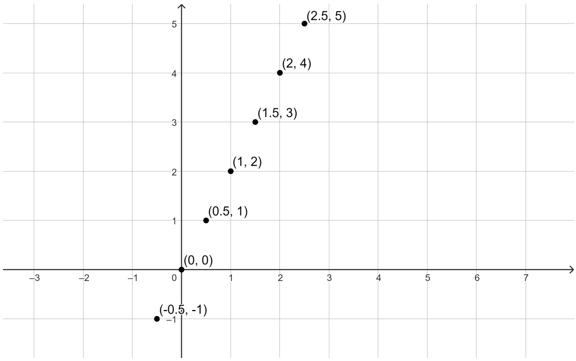

Figura 2.18: Gráfico de $f(x) = 2x$ quando D_f é o conjunto formado pela metade dos inteiros.

Note que gráfico de $f(x) = 2x$, quando o domínio D_f é o conjunto considerado na Figura 2.18, são pontos colineares no plano cartesiano, isto é, pertencem a uma mesma reta, conforme ilustra a Figura a seguir.

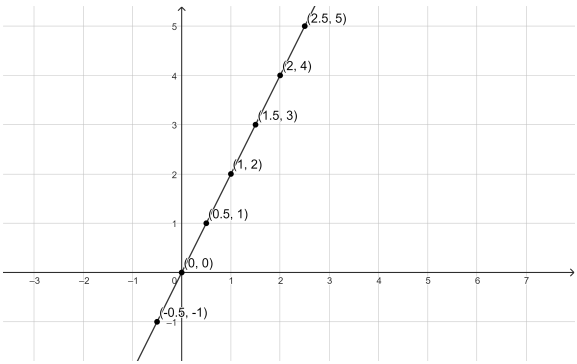

Figura 2.19

Isso nos induz a pensar que, ao considerarmos como o domínio dessa função o conjunto dos números reais, teremos que o gráfico de $f(x) = 2x$ será precisamente uma reta no plano cartesiano, conforme ilustra a Figura 2.20.

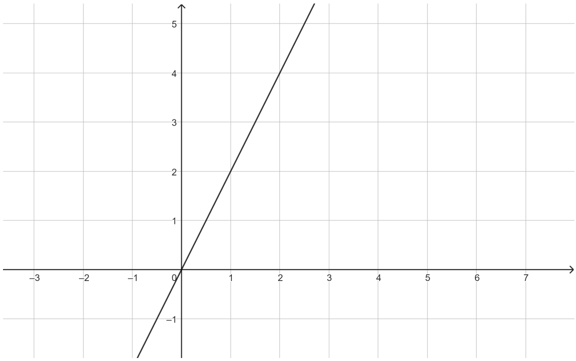

Figura 2.20: Gráfico de $f(x) = 2x$, quando $D_f = \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.6. Nesse exemplo veremos como é o esboço do gráfico da função quadrática $g(x) = x^2$. Começamos considerando como domínio dessa função o conjunto dos números inteiros.

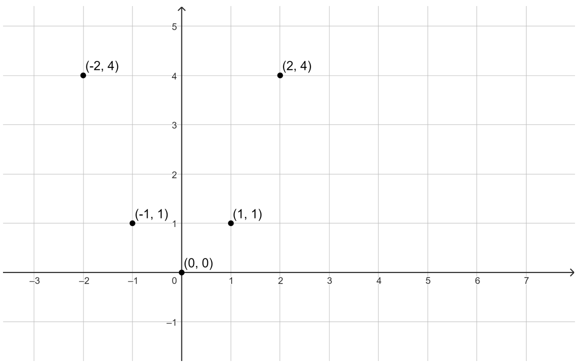

Figura 2.21: Gráfico de $g(x) = x^2$ quando $D_g = \mathbb{Z}$.

Agora, adicionando mais alguns pontos ao domínio da função g.

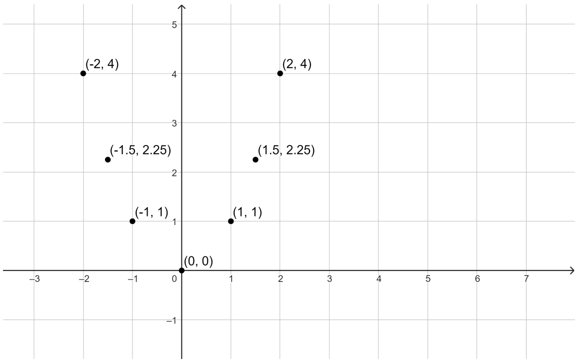

Figura 2.22: Gráfico de $g(x) = x^2$ quando D_g é o conjunto dos números inteiros juntamente com os números -1.5 e 1.5.

Será que o gráfico $g(x) = x^2$ também é uma reta? vejamos exemplos de algumas retas definidas por pontos de G_g:

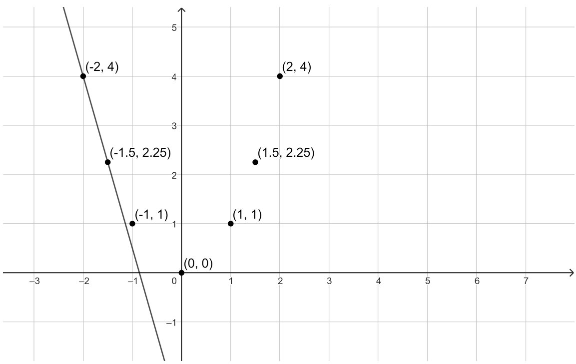

Figura 2.23: Reta definida pelos pontos $P = (-2, 4)$ e $Q = (-1.5, 2.25)$ que pertencem ao G_g.

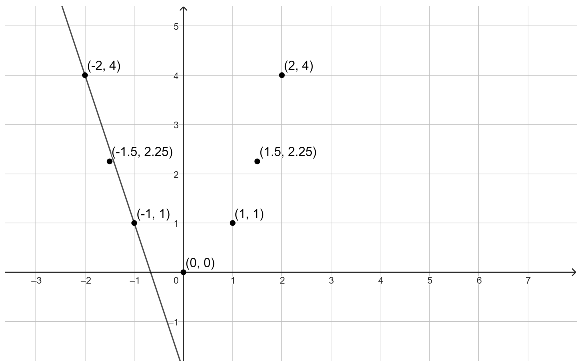

Figura 2.24: Reta definida pelos pontos $P = (-2, 4)$ e $Q = (-1, 1)$ que pertencem ao G_g.

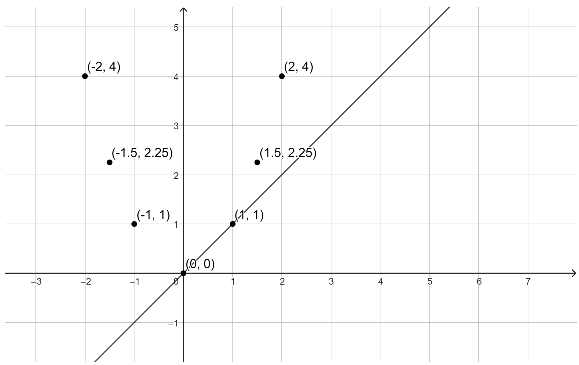

Figura 2.25: Reta definida pelos pontos $P = (0, 0)$ e $Q = (1, 1)$ que pertencem ao G_g.

Dessa forma, o esboço do gráfico de $g(x) = x^2$ não é uma reta, na verdade, de nenhuma função quadrática. O gráfico desse tipo de função é chamado de *parábola* e tem o formato com nas Figuras 2.26 e 2.27.

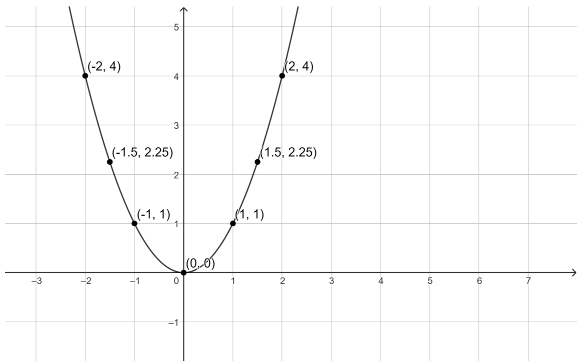

Figura 2.26: Gráfico de $g(x) = x^2$ quando D_g é o conjunto dos números inteiros juntamente com os números -1.5 e 1.5, e uma parábola contendo G_g.

A parábola apresentada na Figura 2.27, representa o gráfico da função $g(x) = x^2$, quando consideramos $D_g = \mathbb{R}$.

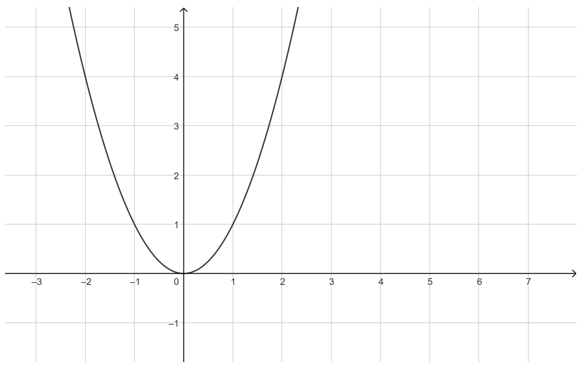

Figura 2.27: Gráfico de $g(x) = x^2$ quando $D_g = \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.7. Considere novamente as funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2$, sendo $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Agora, como podemos ver na Figura 2.28, os pontos $(0, 0)$ e $(2, 4)$ são exatamente os pontos em que os gráficos dessas duas funções se encontram.

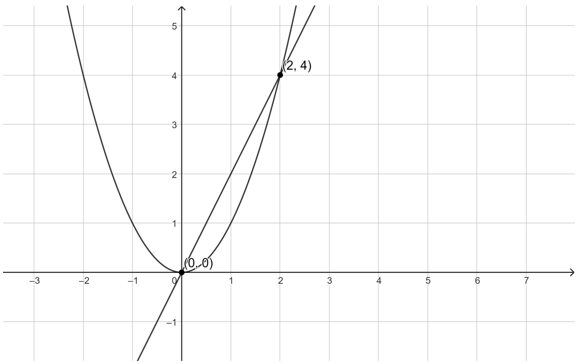

Figura 2.28: Gráfico de f e g quando $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

Note também que não há nenhum outro ponto em comum entre essas figuras, então não há outra possibilidade de domínio que faça as leis de formação $2x$ e x^2 definirem a mesma função.

Esse exemplo mostra a importância de explicitarmos o domínio de cada função, pois a depender dele (e também do contradomínio), funções com leis de formação diferentes podem ser indistinguíveis. Ou seja, a lei de formação (que é algébrica) não é só o que determina uma função. Por isso temos a seguinte definição:

Definição 2.3.8 (**Igualdade de funções**)**.** As funções $f : D_f \longrightarrow C_f$ e $g : D_g \longrightarrow C_g$ são iguais quando:

1. $D_f = D_g$

2. $C_f = C_g$

3. $G_f = Graf(g)$

Em outras palavras, se os domínios, os contradomínios e os gráficos de f e g são iguais, então $f = g$.

Exemplo 2.3.9. As funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = 3x$ com domínios e contradomínios iguais a $\mathbb{R}$ são diferentes, porque seus gráficos são diferentes. Porém, serão iguais se o domínio for $\{0\}$ e os contradomínios forem ambos $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.10. Considere funções f e g com leis de formação $f(x) = x^2 - x - 1$ e $g(x) = x^2 - x - 1$. Considere os casos:

i. $D_f = D_g = \mathbb{N}$, $C_f = \mathbb{Z}$ e $C_g = \mathbb{R}$

ii. $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{N}$ e $C_f = C_g = \mathbb{R}$

Em ambos casos $f \neq g$. No primeiro, é porque apesar dos domínios serem iguais, os contradomínios são diferentes. No segundo acontece o contrário: os contradomínios são iguais, mas os domínios são distintos.

2.4 Exercícios Propostos

Os próximos dois exercícios ensinam sobre a relação dos coeficientes de uma função afim com o seu gráfico:

Exercício 2.4.1. Esboce o gráfico da função $f(x) = ax + 2$ quando

1. $a = 1$
2. $a = 2$
3. $a = -1$
4. $a = -2$
5. $a = \frac{1}{2}$
6. $a = -\frac{1}{2}$

Qual a relação do gráfico de f com o coeficiente angular a? pense nos casos em que a é positivo, negativo, entre -1 e 1, e maior que 1 ou menor que -1.

Exercício 2.4.2. Esboce o gráfico da função $f(x) = 3x + b$ quando

1. $b = 1$

2. $b = -2$

Agora esboce o gráfico da função $f(x) = -x + b$ quando

1. $b = 1$

2. $b = \frac{1}{2}$

Qual a relação do gráfico da função com o coeficiente linear? todos os casos da questão anterior são relevantes?

Os próximos dois exercícios são sobre o gráfico da função quadrática e a relação com os seus coeficientes. Para desenhar a parábola, desenhe alguns pontos para estimar o formato do gráfico. Uma sugestão é os pontos $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Exercício 2.4.3. esboce o gráfico de $f(x) = x^2 + c$ quando:

1. $c = 1$

2. $c = 0$

3. $C = -2$

Qual relação pode observar?

Exercício 2.4.4. esboce o gráfico de $f(x) = ax^2$ quando:

1. $a = 2$

2. $a = -1$

3. $a = \frac{1}{2}$

Qual relação pode observar? baseado nessa relação, como seria o gráfico quando $a = -\frac{1}{2}$

Os próximos exercícios relacionam igualdade de funções, domínios e contradomínios

Exercício 2.4.5. Existe algum domínio em que as funções constantes $f(x) = 1$ e $g(x) = 2$ são iguais? Por quê?

Exercício 2.4.6. Determine para qual(is) domínio(s) a função constante $f(x) = 1$ e a função $g(x) = x^2$ são iguais. Dica: tente desenhar as funções (inclusive utilizando algum *software*)

Exercício 2.4.7. Determine o maior domínio e contradomínio de $f(x) = x$, de modo que seu gráfico fique contido num quadrado de lado 2 e centro na origem.

Exercício 2.4.8. Determine o maior domínio e contradomínio de $f(x) = 2x$, de modo que seu gráfico fique contido num quadrado de lado 4 e centro na origem.

Exercício 2.4.9. Considere $f(x) = 3$, com domínio $D_f = [1, 4]$, o intervalo entre 1 e 4.

a) Qual o menor raio de um círculo de centro na origem que contém o gráfico dessa função?

b) Se o centro do círculo puder ser onde quiser, qual o menor raio de um círculo para que ele contenha o gráfico de f?

Desafio 2.4.10. Determine o maior domínio e contradomínio de $f(x) = x^2 - 2$, de modo que seu gráfico fique contido num quadrado de lado 4 e centro na origem.

Capítulo 3

Conjuntos de mesmo tamanho

Nesse capítulo final, veremos como comparar o "tamanho" de conjuntos usando o conceito de função. Quando nos referimos a conjuntos finitos, o tamanho de um conjunto significa exatamente a quantidade de elementos que ele possui. Dessa forma, fica fácil comparar o tamanho entre dois conjuntos finitos, basta saber qual deles possui mais elementos. Mas, se pensarmos em dois conjuntos infinitos, como podemos saber quem tem mais elementos? Ou melhor, qual é o sentido dessa pergunta? Veremos a partir de agora uma maneira de fazer essa comparação entre o tamanho de conjuntos usando algumas propriedades das funções.

3.1 Contando os elementos de um conjunto

Contar é uma atividade que todos fazemos e a ferramenta essencial que usamos são os números naturais $1, 2, 3$, e assim por diante. Por exemplo, como contamos o número de carteiras em uma sala de aula? Temos que começar em algum lugar, então apontamos para uma carteira e dizemos "um". Então apontamos para outra carteira e dizemos "dois", e assim por diante até que todas as carteiras tenham sido contadas.

No fim, o último número que falarmos será o número total de carteiras. Para facilitar a contagem, podemos montar a Tabela 3.1:

Número	**Carteira**
1	Carteira "um"
2	Carteira "dois"
3	Carteira "três"
$\vdots$	$\vdots$
n	Carteira "n"

Tabela 3.1: Contagem das carteiras

A tabela terminaria quando contássemos o número total n de carteiras. Note que já vimos tabelas desse tipo quando discutimos funções! Quando contamos objetos, *definimos* uma função entre um subconjunto de números naturais e o conjunto desses objetos.

Vamos ver outro exemplo de contagem agora. Imagine um pastor que viveu durante o ano 300 a.C.. Pela manhã, ele solta seu rebanho de ovelhas para pastar e à noite ele o recolhe. Como o pastor sabe que não perdeu nenhuma ovelha?

A resposta poderia ser: basta contar o número de ovelhas que saíram de manhã e o número das que voltaram à noite, mas há dezenas de ovelhas no rebanho e o pastor não tem prática em contar números muito grandes (lembre-se que estamos nos referindo ao ano 300 a.C.).

Mesmo que o pastor não saiba contar números grandes, ele é engenhoso e pensa no seguinte: de manhã, para cada ovelha que sair, ele joga uma pedrinha em um pote, e, à noite, ele tira uma pedrinha do pote para cada ovelha que voltar. Se sobrarem pedrinhas no pote, significa que algumas ovelhas não voltaram!

De forma análoga à contagem das carteiras, o que o pastor fez foi definir, implicitamente, uma função entre o conjunto das ovelhas e o conjunto de pedrinhas no pote.

Vimos por meio destes exemplos que quando contamos, definimos implicitamente uma função. O que veremos a seguir é a relação entre a quantidade de elementos de dois conjuntos e as funções entre esses dois conjuntos.

3.1.1 Exemplo específico

Considere os conjuntos $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ e $Z = \{1, 2\}$. O que queremos fazer agora, é olhar para as diferenças entre as funções de X para Y e as funções de X para Z. Para isso, precisamos calcular todas essas funções, o que não é muito difícil se usarmos os diagramas de flechas, que vimos no Capítulo 1.

Usando o diagrama de flechas, o trabalho de listar todas as funções de X para Y se reduz a listar todos os diagramas de flechas do conjunto X para o conjunto Y. O mesmo vale para listar todas as funções de X para Z.

Não iremos listar todas as funções, mas é importante que o leitor faça o Exercício 3.4.3 antes de ler as próximas seções. Além disso, durante as Subseções 3.1.2, 3.1.3 e 3.1.4, fixaremos os conjuntos X, Y e Z descritos anteriormente.

Algo que podemos notar é que existem muitas funções cujos diagramas de flechas são parecidos. Por exemplo f :

$X \to Y$ com $f(x) = 1$ e $g : X \to Z$ com $g(x) = 2$ são similares: nos seus diagramas, todas as flechas de X vão para um único elemento de Y e Z. Assim, quando falamos de tamanho de conjuntos, nem todas as funções serão úteis.

3.1.2 Injetividade

Uma propriedade que todos os diagramas das funções de $X = \{1, 2, 3\}$ para $Z = \{1, 2\}$ compartilham é a seguinte: sempre existe um elemento de Z que é ligado a mais de um elemento de X, ou seja, existem ao menos dois elementos do domínio X que são ligados a um mesmo elemento no contradomínio Z. Por que isso ocorre? Pense um pouco a respeito. Por outro lado, embora o mesmo possa acontecer com funções de X para $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, isso não acontece com *todas* as funções entre esses conjuntos. Verifique essas afirmações!

A propriedade mencionada anteriormente sobre o diagrama de flechas da função possuir dois ou mais elementos no domínio que são ligados a um mesmo elemento no contradomínio está relacionada a *injetividade* dessa função. Na verdade, diremos que uma função é *injetiva* quando isso não ocorrer. Precisamente temos:

Definição 3.1.1. Sejam A e B conjuntos finitos. Dizemos que uma função $f : A \to B$ é *injetiva* se, no seu diagrama de flechas, flechas que saem de elementos diferentes do domínio *não* chegam no mesmo elemento do contradomínio.

Exemplo 3.1.2. A função $f : X \to Y$ dada por $f(x) = x+1$ é injetiva. De fato, seu diagrama de flechas é dado pela Figura 3.1:

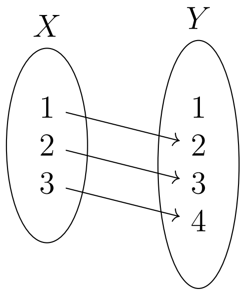

Figura 3.1

Exemplo 3.1.3. A função $g : X \to Y$, cujo diagrama de flechas é dado pela Figura 3.2, não é injetiva. De fato, as flechas que saem dos elementos 1 e 2 do domínio X chegam no mesmo elemento 1 do contradomínio Y.

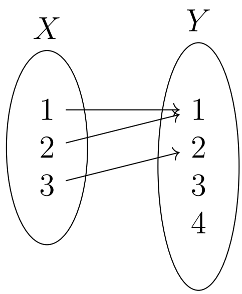

Figura 3.2

Por que não existem funções injetivas de X para Z, mas existem de X para Y? A diferença essencial entre esses dois casos é a relação entre o tamanho do domínio e contradomínio: no primeiro, o domínio tem mais elementos que o contradomínio, enquanto que no segundo, o domínio possui menos elementos que o contradomínio.

Podemos generalizar esse fato da seguinte forma: sejam A e B conjuntos finitos quaisquer. Se o número de elementos de A for *menor ou igual* que o número de elementos de B, então *existe* uma função de A para B injetiva.

Reciprocamente, se *existe* uma função injetiva de A para B então o número de elementos de A é *menor ou igual* ao número de elementos de B.

Observação 3.1.4. Note que a existência de uma função injetiva de A para B *não* garante que o número de elementos de A seja menor que o número de elementos de B, apesar de que nos exemplos isso ter acontecido. De fato, considere a função $h : Y \to Y$ dada por $h(x) = x$. Então h é injetiva (verifique!), mas claramente o número de elementos de Y não é menor que o número de elementos do próprio Y.

3.1.3 Sobrejetividade

Voltemos a considerar os conjuntos $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ e $Z = \{1, 2\}$, e destaquemos outra diferença entre os diagramas de flechas das funções de X para Y e das funções de X para Z: nenhum diagrama de flechas de funções de X para Y tem flechas chegando em todos os elementos de Y, mas isto pode acontecer com diagramas de flechas de funções de X para Z. Verifique essas afirmações com alguns exemplos.

O tipo de funções que destacaremos aqui são chamadas de *funções sobrejetivas*.

Definição 3.1.5. Sejam A e B conjuntos finitos. Dizemos que $f : A \to B$ é *sobrejetiva* se, no seu diagrama de flechas, todo elemento do contradomínio é alcançado por alguma flecha saindo de um elemento do domínio.

Novamente, o fator que garante a existência de funções sobrejetivas de X para Z é que X tem mais elementos que

Z. Por outro lado, não existem funções sobrejetivas de X para Y, pois X tem menos elementos que Z.

De forma geral, sejam A e B conjuntos finitos arbitrários. Se o número de elementos de A é *maior ou igual* ao número de elementos de B, então *existe* uma função sobrejetiva de A para B.

Agora, se existe uma função sobrejetiva de A para B, então o número de elementos de A tem que ser *maior ou igual* ao número de elementos de B.

Exemplo 3.1.6. A função $f : X \to Z$ descrita pelo diagrama de flechas a seguir é sobrejetiva:

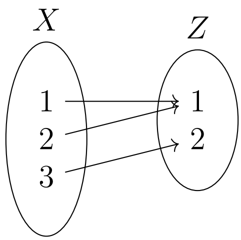

Figura 3.3

A função do Exemplo 3.1.2 não é sobrejetiva, pois o elemento 1 de Y não é alcançado por nenhuma flecha saindo de um elemento de X.

3.1.4 Bijetividade

O que acontece quando uma função f entre conjuntos finitos A e B é injetiva **e** sobrejetiva? Como f é injetiva, o número de elementos de A é menor ou igual ao número de elementos de B. Mas, como f também é sobrejetiva, o número de elementos de A é maior ou igual ao número de elementos de B. A única forma destas duas afirmações serem verdadeiras ao mesmo tempo é quando A tem a mesma quantidade de elementos de B.

Temos um nome especial para funções injetivas e sobrejetivas.

Definição 3.1.7. Sejam A e B conjuntos finitos. Dizemos que $f : A \to B$ é uma função *bijetiva* quando f é tanto injetiva quanto sobrejetiva.

Exemplo 3.1.8. A função $f : X \to X$ descrita pelo diagrama de flechas a seguir é bijetiva:

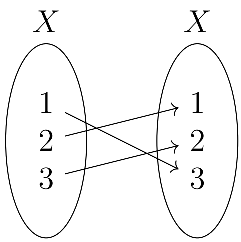

Figura 3.4

3.2 Generalizando

Vamos voltar um pouco na definição de função injetiva. A Definição 3.1.1 foi apresentada por meio do diagrama de flechas, mas pode ser generalizada para funções definidas não necessariamente em conjuntos finitos. Como podemos obter essa generalização?

Começamos considerando uma função f de $X = \{a, b\}$ para $Y = \{c, d, e\}$, a qual é injetiva. Pela Definição 3.1.1 as flechas que saem dos elementos a e b em A não chegam no mesmo elemento de Y. Mas a flecha de a chega justamente no elemento que é $f(a)$, e analogamente para a flecha b. Como as duas flechas não chegam no mesmo elemento, temos que $f(a)$ é diferente de $f(b)$.

Essa é a ideia que temos que ter em mente para generalizar o conceito de função injetiva. Mais precisamente, vamos generalizar a definição de função injetiva da seguinte forma:

Definição 3.2.1. Sejam A e B conjuntos quaisquer. Dizemos que uma função $f : A \to B$ é injetiva sempre que, se a e b são elementos distintos de A, então $f(a)$ e $f(b)$ são elementos distintos de B.

Observação 3.2.2. Toda função injetiva segundo a Definição 3.1.1 ainda será injetiva segundo a Definição 3.2.1.

Exemplo 3.2.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$. Então, f é injetiva. De fato, se a e b são números reais distintos então claramente $f(a) = 2a$ e $f(b) = 2b$ são distintos também.

Exemplo 3.2.4. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $g(x) = x^2$. Então, g não é injetiva, pois 1 e -1 são números reais distintos, mas $g(1) = 1$ e $g(-1) = 1$, ou seja, $g(1)$ e $g(-1)$ são iguais.

Agora, faremos o mesmo com a definição de função sobrejetiva. Seja f uma função sobrejetiva de $C = \{1, 2, 3\}$ para $D = \{4, 5\}$. Então, todo elemento de D é alcançado por alguma flecha saindo de um elemento de C. Como 4 é elemento de D, 4 é alcançado por alguém, ou seja, existe algum $x \in C$ tal que $f(x) = 4$. Note que não sabemos quem esse x é entre os elementos de C: só sabemos que existe algum $x \in C$ com $f(x) = 4$. Analogamente, como 5 é elemento de D, existe algum $y \in C$, tal que $f(y) = 5$.

Usando a ideia acima, generalizamos a definição de função sobrejetiva da seguinte forma:

Definição 3.2.5. Sejam A e B conjuntos quaisquer. Dizemos que uma função $f : A \to B$ é sobrejetiva quando para cada elemento b de B, existe um elemento a de A tal que $f(a) = b$.

Observação 3.2.6. Note que $f : A \to B$ é uma função sobrejetiva se a imagem de f coincidir com o contradomínio, ou seja, $Im(f) = B$.

Observação 3.2.7. Toda função sobrejetiva segundo a Definição 3.1.5 ainda será sobrejetiva segundo a Definição 3.2.5.

Exemplo 3.2.8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$. Então f é sobrejetiva. De fato, precisamos verificar que, dado qualquer b no contradomínio, existe a no domínio tal que $f(a) = 2b$, ou seja, $2a = b$. Ora, se a for igual a metade de b então $2a$ será igual a b. Como a metade de b também é um número real, temos que f é sobrejetiva.

Exemplo 3.2.9. Seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(x) = x^2$. Então, g não é sobrejetiva. De fato, sabemos que nem todo número inteiro é um número quadrado perfeito, sobretudo os números inteiros negativos.

Uma pergunta que devemos nos fazer é a seguinte: vale para as novas definições de função injetiva e função sobrejetiva as mesmas relações que tínhamos entre tamanho de domínios e contradomínios finitos? E a resposta é sim! A justificativa fica é dada pelo Exercício 3.4.8.

Vimos que para comparar o tamanho de conjuntos finitos podemos usar funções injetivas e sobrejetivas. Vamos também usar essa ideia para comparar o "tamanho" de conjuntos infinitos.

3.3 Conjuntos infinitos

Exploraremos agora a ideia de comparar o tamanho de conjuntos infinitos por meio de funções. Quando falamos de "tamanho de um conjunto finito" nos referimos ao número de elementos do conjunto, mas não é claro o que significa "tamanho de um conjunto infinito". O matemático Georg Cantor (1845-1918) foi o primeiro a explorar essa ideia e dar uma definição precisa, e o resultado foi a sua teoria sobre números *transfinitos*.

Como não iremos nos aprofundar nessa teoria, iremos evitar o uso de "tamanho de um conjunto infinito". Falaremos somente do tamanho relativo de dois conjuntos infinitos.

Definição 3.3.1. Sejam A e B conjuntos infinitos. Dizemos que

1. A tem tamanho menor, ou igual, que B se existe uma função $f : A \to B$ que é injetiva.

2. A tem tamanho maior, ou igual, que B se existe uma função $f : A \to B$ que é sobrejetiva.

3. A tem o mesmo tamanho que B, se existe uma função $f : A \to B$ que é bijetiva.

3.3.1 Números naturais

Veremos agora algumas funções entre alguns conjuntos de números naturais infinitos.

Exemplo 3.3.2. Seja f a função do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ para o conjunto dos números naturais pares, dada por $f(x) = 2x$. Então f é injetiva pois, se a e b são naturais diferentes, $f(a) = 2a$ e $f(b) = 2b$ são também diferentes. Agora, se b é par, então b é o dobro de algum número a, ou seja, $b = 2a$. Logo $f(a) = 2a = b$ e, portanto, f é sobrejetiva. Assim, f é uma função bijetiva e concluímos que o conjunto $\mathbb{N}$ tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais pares.

Intuitivamente, isso nos diz que existem tantos números naturais quanto números pares.

Exemplo 3.3.3. Considere $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ o conjunto dos números primos. Veremos que esses dois conjuntos também têm o mesmo tamanho. O problema aqui é que não conseguimos explicitar uma fórmula, isto é, uma lei de formação para definir uma função bijetiva entre esses conjuntos como nos exemplos anteriores. Por isso, vamos definir uma função f entre esses conjuntos da seguinte forma: listamos os números primos em ordem crescente: $2, 3, 5, 7, 11, \dots$. Considere então a função

$$f : \mathbb{N} \to P$$

dada por:

$$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 5,\ f(4) = 7,\ f(5) = 11,$$

e, em geral, $f(n)$ igual ao n-ésimo número primo na lista.

Como a lista está ordenada, um primo não pode estar em duas posições ao mesmo tempo. Logo, se a e b são naturais distintos, então $f(a)$ e $f(b)$ serão números primos diferentes. Portanto, f é injetiva. Além disso, todo número primo p está em alguma posição n nessa lista e, portanto, $f(n) = p$. Logo, a função f é sobrejetiva. Segue que, f é uma função bijetiva e dessa forma $\mathbb{N}$ e P têm o mesmo tamanho.

3.3.2 Números inteiros e racionais

Sejam $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. Todo número natural é um número inteiro, e portanto é também um número racional. Porém, nem todo número racional é um número inteiro.

Dessa forma, intuitivamente, esperamos que o tamanho de $\mathbb{N}$ seja menor que $\mathbb{Z}$, e que o tamanho de $\mathbb{Z}$ seja menor que $\mathbb{Q}$. Porém, vamos ver que os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, e $\mathbb{Q}$ têm todos o mesmo tamanho!

Exemplo 3.3.4. O conjunto dos números inteiros são, de certa forma, duas cópias dos números naturais, juntamente com o número 0: temos os inteiros positivos $1, 2, \dots$, os inteiros negativos $-1, -2, \dots$, e também o 0. Parece, então, que não é possível fazer uma bijeção entre os naturais e os inteiros pois os inteiros contêm duas cópias dos naturais!

Porém, podemos dividir os naturais em números pares e ímpares. Já vimos que existe uma função bijetiva entre $\mathbb{N}$ e o conjunto dos pares, e entre $\mathbb{N}$ e o conjunto dos ímpares (ver Exercício 3.4.9). Isto nos dá a seguinte ideia: vamos associar os pares aos inteiros positivos e os ímpares nos inteiros negativos.

Definimos a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ da seguinte forma:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & \text{se } n \text{ for um número par} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{se } n \text{ for um número ímpar.} \end{cases}$$

Então, f é uma função bijetiva. A verificação completa ficará como exercício (veja o Exercício 3.4.11). Porém, para exemplificar, faremos algumas partes dessa verificação. Vejamos que todo inteiro positivo é imagem de algum natural. Se x é um inteiro positivo, note que $2(x + 1)$ é um número natural par. Como

$$
\begin{aligned}
f(2(x+1)) &= \frac{2(x+1)}{2} - 1 \\
&= (x+1) - 1 \\
&= x,
\end{aligned}
$$

segue que x é imagem de $2(x+1)$. Agora, vejamos a injetividade no caso em que n e m são naturais pares distintos. Temos

$$
\begin{aligned}
f(n) - f(m) &= \left(\frac{n}{2} - 1\right) - \left(\frac{m}{2} - 1\right) \\
&= \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \left(1 - \frac{m}{2}\right) \\
&= \frac{n}{2} - 1 + 1 - \frac{m}{2} \\
&= \frac{n}{2} - \frac{m}{2}.
\end{aligned}
$$

Como n e m são distintos, $\frac{n}{2}$ e $\frac{m}{2}$ também são distintos. Portanto $\frac{n}{2} - \frac{m}{2}$ é diferente de 0, ou seja, a diferença de $f(n)$ e $f(m)$ não é 0, o que significa que $f(n)$ e $f(m)$ são números distintos.

Ao completarmos a verificação de que f é uma função bijetiva, concluiremos que os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ tem o mesmo tamanho. Isso já é bastante contraintuitivo, pensar que existem tantos números naturais quanto números inteiros. Mas para surpresa ainda maior, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$. Vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 3.3.5. Usamos uma estratégia mais indireta para mostrar que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ têm o mesmo tamanho. A ideia é usar o fato que todo racional é a razão de dois inteiros, e usar esses dois inteiros para obter um número natural.

Vamos definir uma função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Dado um número racional x diferente de 0, existem números inteiros a e b tais que $x = \frac{a}{b}$, sendo $\frac{a}{b}$ uma fração simplificada, com b positivo. Isso é importante, pois os números a e b que satisfazem essas condições são únicos.

Consideramos $f(0) = 1$ e para $x = \frac{a}{b}$ racional (a, b satisfazendo as condições acima) diferente de 0 definimos

$$f(x) = \begin{cases} 2^a 3^b, & \text{se } a > 0 \\ 5^{-a} 3^b, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Se não tivéssemos imposto as condições acima sobre a e b, haveria ambiguidade: $f(\frac{1}{2})$ poderia ser $2^1 3^2$ ou $2^2 3^4$, uma vez que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Também, precisamos dividir a definição em dois casos para termos certeza de que $f(x)$ é sempre um número natural.

A ideia por trás da definição de f é facilitar a justificativa que f é injetiva. Porém, f não é sobrejetiva. Verifique essas afirmações como exercício (veja Exercício 3.4.12).

Vamos fazer um truque agora. Seja X a imagem de f, ou seja, o conjunto de todos os números naturais n tais que existe um racional x com $f(x) = n$. Agora, considere a função $g : \mathbb{Q} \to X$ dada por $g(x) = f(x)$, ou seja, a função g é essencialmente obtida trocando o contradomínio $\mathbb{N}$ da função f, pelo conjunto X, que é a imagem de f, Dessa forma, g é injetiva e sobrejetiva (ver Exercício 3.4.12), logo g é uma função bijetiva.

Parece que a introdução da função g não nos ajudou. Porém, X é um conjunto infinito de números naturais. Pelo Desafio 3.4.13, todo conjunto infinito de números naturais tem o mesmo tamanho que $\mathbb{N}$. Logo, X tem o mesmo tamanho que $\mathbb{N}$. A função bijetiva g nos diz que $\mathbb{Q}$ tem o mesmo tamanho que X, e portanto $\mathbb{Q}$ tem o mesmo tamanho que $\mathbb{N}$.

3.3.3 Números reais

Vimos anteriormente que os conjuntos infinitos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ têm o mesmo tamanho que $\mathbb{N}$. Vejamos que isto nem sempre acontece com um conjunto infinito qualquer: o conjunto dos números reais é maior que todos esses.

Exemplo 3.3.6. A propriedade importante que precisamos saber sobre os números reais é que todo número real tem uma expansão decimal, a qual pode ser infinita. Por exemplo, $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{3}$ são números irracionais e temos

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1.414213... \\ -\sqrt{3} &= -1.732050... \end{aligned}$$

De forma mais geral, se x é um número real, então existem inteiros $x_1, x_2, x_3, \ldots$, onde x_1 pode ser positivo ou negativo, mas $x_2, x_3, \ldots$ são sempre positivos, tais que

$$x = x_1.x_2x_3\ldots$$

Seja f uma função de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$, sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Queremos mostrar que f não pode ser sobrejetiva. Para isso, precisamos construir um número real diferente de $f(n)$, para todo n natural. Denote a expansão decimal de $f(n)$ por

$$x_{n,1}.x_{n,2}x_{n,3}\ldots$$

Definindo

$$y_n = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{n,n} \neq 1 \\ 0 & \text{se } x_{n,n} = 1, \end{cases}$$

temos que o número real $y = y_1.y_2y_3\ldots$ é diferente de $f(n)$ para todo n, pois $y_n \neq x_{n,n}$. Logo, f não pode ser sobrejetiva.

Como provamos que qualquer função de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$ não é sobrejetiva, segue que $\mathbb{N}$ não tem tamanho maior que $\mathbb{R}$.

É importante notar duas coisas na discussão acima. A primeira é que só podemos garantir que y é um *número real*, ou seja, o argumento acima *não* funciona com funções $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. A segunda é que precisamos tomar um pouco de cuidado ao falar de expansões decimais, pois todo número real tem mais de uma expansão decimal. Essa discussão foi omitida por simplicidade.

Acontece que mesmo o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é o maior conjunto que existe! De fato (veja o Desafio 3.4.13), não existe um maior conjunto que todos os outros: dado um conjunto infinito e arbitrário A, sempre é possível encontrar um conjunto B tal que existe uma função injetiva entre A e B, mas não existe uma função bijetiva de A para B e, portanto, A tem tamanho menor que B.

3.4 Exercícios propostos

Exercício 3.4.1. Dê o domínio, o contradomínio, e a lei de formação da função determinada pela Tabela 3.1.

Exercício 3.4.2. Na primeira seção desse capítulo, vimos como um pastor conta suas ovelhas associando cada ovelha a uma pedrinha. Ele faz isso duas vezes ao dia: uma pela manhã e a outra à noite. As funções definidas por essas associações são iguais?

Exercício 3.4.3. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{1, 2\}$.

(a) Liste todas as funções de A para B, e de A para C. Antes de começar, você sabe quantas funções existem de A para B ou de A para C? Como você pode ter certeza de que listou todas as funções?

(b) Você consegue achar diferenças entre as funções de A para B e de A para C?

Exercício 3.4.4. Sejam X e Y conjuntos finitos.

(a) Suponha que X tem um número menor ou igual de elementos que Y. Mostre que existe uma função injetiva, de acordo com a Definição 3.1.1, de X para Y.

(b) Suponha que exista uma função $f : X \to Y$ injetiva, de acordo com a Definição 3.1.1. Mostre que X tem um número menor ou igual de elementos que Y. Dica: No diagrama de flechas de f, cada flecha representa um único elemento de X.

Exercício 3.4.5. Sejam X e Y conjuntos finitos.

(a) Suponha que X tem um número maior ou igual de elementos que Y. Mostre que existe uma função sobrejetiva, de acordo com a Definição 3.1.5, de X para Y.

(b) Suponha que exista uma função $f : X \to Y$ sobrejetiva, de acordo com a Definição 3.1.5. Mostre que X tem um número menor ou igual de elementos que Y. Dica: No diagrama de flechas de f, cada flecha representa pelo menos um elemento de X.

Exercício 3.4.6. Sejam X e Y conjuntos finitos.

(a) Suponha que X e Y têm o mesmo número de elementos. Mostre que existe uma função bijetiva de X para Y.

(b) Suponha que exista uma função $f : X \to Y$ bijetiva. Mostre que X tem o mesmo número de elementos que Y.

Exercício 3.4.7. Vimos no Exemplo 3.2.4 que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ não é injetiva. Verifique que ela também não é sobrejetiva.

Exercício 3.4.8. Seja $f : X \to Y$, com X e Y sendo conjuntos finitos. Convença-se de que as relações entre o tamanho de X e o tamanho de Y não mudam se f for injetiva de acordo com a definição 3.1.1, ou se f for injetiva de acordo com a definição 3.2.1. Faça o mesmo com f sendo sobrejetiva.

Exercício 3.4.9. Mostre que $\mathbb{N}$ e o conjunto dos ímpares têm o mesmo tamanho.

Exercício 3.4.10. Seja Q o conjunto dos quadrados perfeitos, ou seja, o conjunto dos inteiros positivos que são o quadrado de algum inteiro. Defina $f : \mathbb{N} \to Q$ por $f(x) = x^2$. Mostre que f é bijetiva. Compare com o Exercício 3.4.9.

Exercício 3.4.11. Verifique que a função f do Exemplo 3.3.3 é bijetiva.

Exercício 3.4.12. Verifique que a função f do Exemplo 3.3.4 é injetiva, mas não é sobrejetiva. Verifique que a função g do mesmo exemplo é bijetiva. Dica: use o fato que os números 2, 3, e 5 são primos.

Desafio 3.4.13. Dizemos que um conjunto X é subconjunto de Y se todo elemento de x é elemento de Y. Todos os conjuntos que vimos na seção 3.3.1 são subconjuntos de $\mathbb{N}$.

(a) Seja X subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Inspirando-se no

Exemplo 3.3.4, mostre que existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e X. Conclua que *todo* subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ tem o mesmo tamanho que $\mathbb{N}$.

(b) No item (a), onde você usou que X é infinito? O que acontece quando você tenta usar o método de (a) para definir uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e um subconjunto finito de $\mathbb{N}$?

Desafio 3.4.14. Seja X um conjunto. O conjunto das partes de X, denotado por $P(X)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de X. Assim, o conjunto das partes de $\{1, 2\}$ é o conjunto cujos elementos são $\varnothing, \{1\}, \{2\}$, e $\{1, 2\}$. O conjunto $\varnothing$ é o chamado *conjunto vazio*; ele não possui nenhum elemento e é considerado subconjunto de qualquer conjunto.

(a) Encontre todos os elementos do conjunto das partes de $\{1, 2, 3\}$ e $\{1, 2, 3, 4\}$. Quantos elementos tem cada conjunto? Você consegue descobrir quantos elementos tem o conjunto das partes de um conjunto finito?

(b) Seja X um conjunto. Defina $f : X \to P(X)$ por $f(x)$ é o conjunto $\{x\}$. Mostre que f é injetiva.

(c) Sejam X um conjunto e g qualquer função de X para $P(X)$. Considere o conjunto Y de todos os elementos x de X tais que $x \notin g(x)$. Mostre que não existe x tal que $g(x) = Y$ e, portanto, g não pode ser sobrejetiva.

Referências Bibliográficas

FERRER, J. V. O número de ouro na arte, arquitetura e natureza: beleza e harmonia. *Trabalho Apresentado à Universidade Católica de Brasília-UCB. Distrito Federal*, 2005.

GUIMARÃES, R. S. *Planos, caminhos, mapas e guias.* Disponível em: ⟨http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=14695⟩. Acesso em: 25 abr. 2024.

LIMA, E. L. *Curso de Análise Vol. 1.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2022.

PINTO, H. D. El plano cartesiano, una idea sencilla cuyo desarrollo llevó dos milenios. Universidad Pedagógica Nacional, 2016.

VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAçãO MATEMáTICA, 8., 2004, recife. *TECNOLOGIAS INFORMÁTICAS, O ENSINO DE FUNÇÕES E GEOMETRIA ANALÍTICA: NOVAS MÍDIAS - NOVOS PROBLEMAS.* Pernambuco: Sociedade Brasileira de Educação Matemática-PE. Disponível em: ⟨https://www.sbembrasil.org.br/files/viii/arquivos/index_1.htm⟩.

VELLEMAN, D. J. *How to Prove It: A Structured Approach*. [S.l.]: Cambridge University, 2006.