

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor: Prof. Dr. Cleber de Medeira

Estudantes: Amanda Maciel Oliveira  
Brenda Dal Puppo Monteiro  
Bruno Mielke Schwartsburd  
Dyckson Ternoski  
Gabrieli Kmiecik  
João Gabriel Chiorato  
Kevyan Uehara Moraes  
Laura Carolina Aymoré Ferrandin  
Luana Bankersen  
Mahmut Telles Cansiz  
Mariana da Silva Freitas  
Mateus Balotin  
Matheus Kinceski Pires  
Mayara Isabele Arcenio  
Monique Baptista Fragozo  
Nil Vinícius Gonçalves de Carvalho  
Thais Spannenberg Machado dos Passos  
Thiago Batista dos Santos Martins

Site: [www.petmatematica.ufpr.br](http://www.petmatematica.ufpr.br)

Facebook: [www.facebook.com/PetMatUFPR](https://www.facebook.com/PetMatUFPR)

Instagram: [instagram.com/petmatematicaufpr/](https://www.instagram.com/petmatematicaufpr/)

E-mail: [petmatufpr@gmail.com](mailto:petmatufpr@gmail.com)

Telefone: (41) 3361-3672

Data do Evento: 23 e 24 de julho de 2022

Curitiba, julho de 2022.

---



# Apresentação

Prezado Estudante;

Seja bem-vindo! É um grande prazer para nós sua participação nessa 17<sup>a</sup> edição do *Brincando de Matemático*. Após dois anos na forma virtual, devido a pandemia de covid, esse ano o evento retorna a sua forma presencial, realizado aqui na UFPR.

O Brincando de Matemático é um evento de extensão promovido pelo PET-Matemática da UFPR e tem como principal objetivo apresentar temas matemáticos interessantes de uma maneira lúdica e acessível para alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

O tema dessa edição abordará desde algumas propriedades legais dos poliedros até os números complexos, muitas vezes incompreendidos. Esses assuntos instigam matemáticos há séculos e nesses dois dias de evento iremos apresentá-los de uma forma bem divertida, mas sem perder a formalidade.

Gostaria de agradecer a cada um dos alunos do PET-Matemática pela dedicação e cuidado que dispensaram para a realização desse evento. Agradeço também a Administração da UFPR por apoiar e fomentar essa iniciativa.

*Prof. Cleber de Medeira*  
*Tutor do PET-Matemática*  
*Departamento de Matemática - UFPR*



# Sumário

<b>Apresentação</b>	<b>3</b>
<b>1 Uma Breve Revisão</b>	<b>7</b>
1.1 Poliedros . . . . .	7
1.1.1 O que é um poliedro? . . . . .	7
1.1.2 Relações em um poliedro . . . . .	9
1.1.3 Soma dos ângulos internos das faces . . . . .	15
1.1.4 Exercícios . . . . .	17
<b>2 Fórmula de Euler</b>	<b>19</b>
2.1 Uma breve história . . . . .	19
2.2 Demonstração da Fórmula de Euler . . . . .	22
2.3 Poliedros regulares . . . . .	25
2.4 Poliedros Eulerianos . . . . .	27
2.5 Um buraco na explicação . . . . .	28
2.6 Um pouco de topologia . . . . .	31
2.6.1 Faixa de Möbius . . . . .	32
2.6.2 Exercícios . . . . .	33
<b>3 Três Formas de Se Olhar Para Uma Fórmula</b>	<b>35</b>
3.1 Padrão de dobras . . . . .	35
3.2 Planificação . . . . .	39
3.3 Eis que surge uma linguagem: Grafos . . . . .	40
3.3.1 Ainda mais Grafos . . . . .	44

3.3.2	Grafos planares . . . . .	47
3.3.3	Kuratowski e Euler . . . . .	48
3.4	Tudo agora é dois . . . . .	52
3.4.1	Planificações agora são dois . . . . .	52
3.4.2	Origamis agora são dois . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Números complexos</b>	<b>57</b>
4.1	Os humilhados serão exaltados . . . . .	57
4.2	Definição e operações básicas . . . . .	63
4.2.1	Conjugado . . . . .	70
4.2.2	Módulo . . . . .	74
4.2.3	Forma trigonométrica . . . . .	76
4.2.4	Potenciação e radiciação . . . . .	80
4.2.5	Exercícios . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Aplicações Para Números Complexos</b>	<b>93</b>
5.1	Polígonos regulares . . . . .	93
5.2	Euler . . . . .	100
5.2.1	Exercícios . . . . .	103

# Capítulo 1

## Uma Breve Revisão

### 1.1 Poliedros

#### 1.1.1 O que é um poliedro?

**Definição 1.1.1.** Um poliedro é a união de um número finito de polígonos. Cada lado de um desses polígonos deve ser também o lado de um outro único polígono. E a intersecção de dois polígonos distintos deve ser um lado em comum, um vértice ou vazia.

Cada polígono presente nesse poliedro é chamado de **face**. Os lados dos polígonos são chamados de **arestas** e os vértices do polígono de **vértices**. Em um poliedro, é sempre possível ir de um ponto qualquer de uma face a um outro ponto qualquer de outra face, sem passar por nenhum vértice, apenas arestas.

**Exemplo 1.1.2.** Na figura abaixo temos um exemplo de poliedro, chamado de tetraedro.

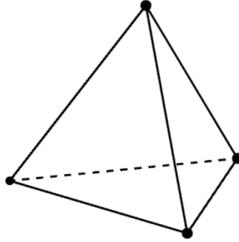


Figura 1.1: Tetraedro.

Nossos estudos serão dirigidos especificamente aos poliedros convexos.

**Definição 1.1.3.** Um poliedro é convexo se qualquer reta, que não é paralela a nenhuma das faces, o corta em, no máximo, dois pontos.

**Exemplo 1.1.4.** Na imagem abaixo temos um exemplo de poliedro convexo. A reta corta o poliedro em apenas dois pontos: I e J.

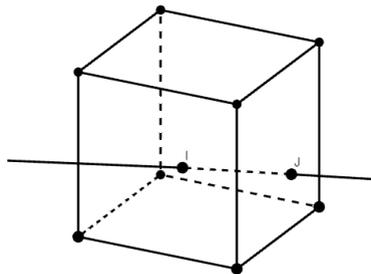


Figura 1.2: Poliedro convexo.

Já na figura abaixo, temos um poliedro não convexo. Perceba que a reta corta o poliedro em quatro pontos distintos: R, S, T e U.

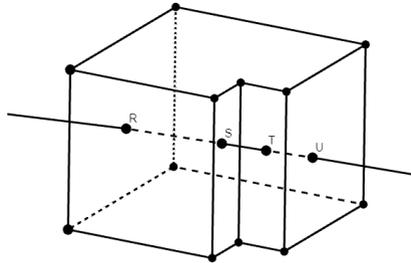


Figura 1.3: Poliedro não convexo.

### 1.1.2 Relações em um poliedro

Dado um poliedro, vamos representar o número de arestas por  $A$ , o número de vértices por  $V$  e o número de faces por  $F$ . Como as faces podem ser formadas por diferentes polígonos, vamos representar por  $F_n$  o número de faces que possuem  $n$  lados. Lembrando que o valor mínimo para  $n$  é três, ou seja,  $n \geq 3$ , já que o mínimo de lados que um polígono deve ter é três. E também vamos representar os vértices por  $V_n$  o número de vértices nos quais  $n$  arestas se encontram. Pela definição de poliedro, neste caso, também temos  $n \geq 3$ , pois cada vértice é um ponto comum a três ou mais arestas. Então, podemos montar as seguintes relações:

$$F = F_3 + F_4 + \dots$$

Ou seja, o número total de faces de um poliedros é igual a quantidade de faces triangulares mais a quantidade de faces que são quadriláteros e assim sucessivamente.

$$V = V_3 + V_4 + \dots$$

Ou seja, o número total de vértices é igual a soma do número de vértices em que se encontram três arestas mais o número de vértices em que se encontram quatro arestas e assim sucessivamente.

**Exemplo 1.1.5.** Na figura abaixo temos um prisma de base triangular.

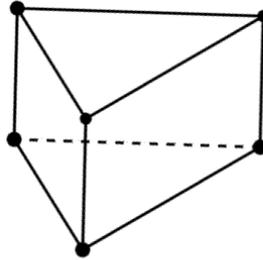


Figura 1.4: Prisma de base triangular.

As faces do poliedro acima são triângulos e quadriláteros. Duas de suas faces são triângulos e três são quadriláteros. Todos os vértices são encontros de exatamente três arestas. Dessa forma, sem contar diretamente da imagem, podemos calcular o número total de faces e o número total de vértices:

$$\begin{aligned}
 F &= F_3 + F_4 \\
 F &= 2 + 3 \\
 F &= 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= V_3 \\
 V &= 6
 \end{aligned}$$

Logo, o prisma de base triangular possui cinco faces e seis vértices.

**Exemplo 1.1.6.** Agora, vamos encontrar outras relações, entre o número de arestas e o número de faces, e entre o número de arestas e o número de vértices. Primeiro, como exemplo, vamos observar a planificação do hexaedro.

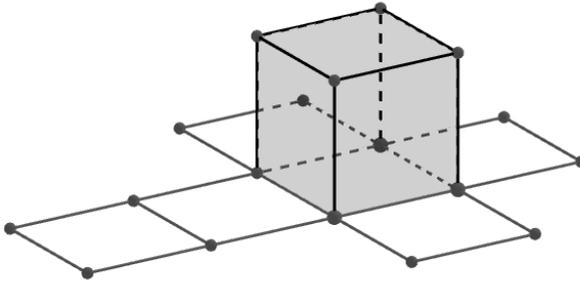


Figura 1.5: Planificação do Hexaedro.

Esse poliedro é formado apenas por quadrados. Qual é a soma total dos lados de todos esses polígonos? Como temos 6 faces quadradas, ou seja,  $F_4 = 6$ , basta multiplicar o número de quadriláteros por 4. Lembrando que cada aresta

do poliedro é lado de exatamente duas faces, temos que a quantidade de lados dos polígonos é igual ao dobro da quantidade de arestas, já que estaríamos contando os lados duas vezes.

$$2A = 4F_4$$

$$2A = 4 \cdot 6$$

$$2A = 24$$

$$A = \frac{24}{2}$$

$$A = 12.$$

Nessa mesma linha de pensamento, podemos contar o número de arestas através do número de vértices. No hexaedro, em cada vértice concorrem 3 arestas, e no total, temos 8 vértices, ou seja,  $V_3 = 8$ . Como cada vértice contado equivale ao dobro de arestas, já que a contamos duas vezes, uma em cada extremo, temos a seguinte relação:

$$2A = 3V_3$$

$$2A = 3 \cdot 8$$

$$2A = 24$$

$$A = \frac{24}{2}$$

$$A = 12.$$

Como já exploramos o exemplo, agora vamos pensar nessa relação para um poliedro qualquer. Para obtermos o total de lados dos polígonos do poliedro planificado, basta multiplicar o número de triângulos por 3, o número de quadriláteros por 4 e assim por diante, e no final somar os resultados obtidos. Como vimos anteriormente, dessa forma, estamos contando cada aresta duas vezes, já que uma compartilha exatamente duas faces, ou seja:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

O mesmo ocorre com o número de vértices:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots$$

Mas qual a importância dessas duas relações? A partir delas, podemos chegar em duas desigualdades importantes:

**Afirmção 1.1.7.**  $2A \geq 3F$ .

A partir da primeira relação temos que:

$$\begin{aligned} 2A &= 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots \\ &= 3F_3 + (3 + 1)F_4 + (3 + 2)F_5 + \dots \\ &= 3F_3 + 3F_4 + F_4 + 3F_5 + 2F_5 + \dots \\ &= (3F_3 + 3F_4 + 3F_5) + F_4 + 2F_5 + \dots \\ &= 3(F_3 + F_4 + F_5) + F_4 + 2F_5 + \dots \\ &= 3F + F_4 + 2F_5 + \dots \end{aligned}$$

Portanto,  $2A \geq 3F$

□

**Afirmção 1.1.8.**  $2A \geq 3V$ .

A partir da segunda relação temos que:

$$\begin{aligned} 2A &= 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots \\ &= 3V_3 + (3 + 1)V_4 + (3 + 2)V_5 + \dots \\ &= 3V_3 + 3V_4 + V_4 + 3V_5 + 2V_5 + \dots \\ &= (3V_3 + 3V_4 + 3V_5) + V_4 + 2V_5 + \dots \\ &= 3(V_3 + V_4 + V_5) + V_4 + 2V_5 + \dots \\ &= 3V + V_4 + 2V_5 + \dots \end{aligned}$$

Logo,  $2A \geq 3V$

□

Podemos concluir que, nos dois casos, a igualdade vale somente quando  $F_4 = F_5 = \dots = 0$ .

**Exemplo 1.1.9.** No exemplo acima, utilizamos o hexaedro, em que todas as suas faces são quadradas. Vamos verificar essas desigualdades em um poliedro que não possui todas as faces do mesmo gênero. Abaixo, novamente, temos o prisma de base triangular.

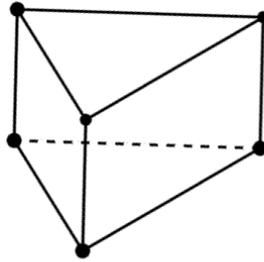


Figura 1.6: Prisma de base triangular.

No Exemplo 1.1.5, calculamos o número total de faces e de vértices:  $F = 5$  e  $V = 6$ . Para calcular a quantidade total de arestas, vamos utilizar a relação:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

Já vimos que as faces desse poliedro são dois triângulos e três quadriláteros. Então:

$$\begin{aligned} 2A &= 3F_3 + 4F_4 \\ 2A &= 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \\ 2A &= 6 + 12 \end{aligned}$$

$$2A = 18$$

$$A = 9$$

Logo, podemos verificar as afirmações:

$$2A \geq 3F \qquad 2A \geq 3V$$

$$2 \cdot 9 = 18 > 3 \cdot 5 = 15. \qquad 2 \cdot 9 = 18 = 3 \cdot 6 = 18.$$

### 1.1.3 Soma dos ângulos internos das faces

**Teorema 1.1.10.** A soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo é dada por  $S = 2\pi(A - F)$ .

Demonstração: Sejam  $F$  o número de faces,  $A$  o número de arestas e  $V$  o número de vértices. Como estamos tratando de um poliedro convexo, então todas as suas faces são polígonos convexos. A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é  $S_k = \pi(n - 2)$ , em que  $n$  é o número de lados. Vamos chamar de  $n_k$  o número de lados da face  $k$ . Em um poliedro com  $F$  faces, podemos somar os dois lados das igualdades, como segue:

$$S_1 = \pi(n_1 - 2)$$

$$S_2 = \pi(n_2 - 2)$$

$$S_3 = \pi(n_3 - 2)$$

$$\vdots$$

$$S_F = \pi(n_F - 2)$$

Obtendo a seguinte equação:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_F = \pi(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F - 2F)$$

Sabemos que  $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_F$  é a soma dos ângulos internos de todas as faces, e que  $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F$  é a soma de todos os lados das faces, ou seja, é o dobro da quantidade de arestas, como visto anteriormente nas relações de um poliedro. Então podemos reescrever:

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F). \quad \square$$

**Exemplo 1.1.11.** Vamos calcular a soma dos ângulos internos de todas as faces de um octaedro.

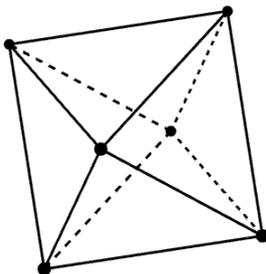


Figura 1.7: Octaedro.

O octaedro é um poliedro com oito faces triangulares. Para calcular sua quantidade de arestas, vamos utilizar a relação:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

Como esse poliedro é constituído apenas de faces triangulares, temos que:

$$2A = 3F_3$$

$$2A = 3 \cdot 8$$

$$2A = 24$$

$$A = 12.$$

A partir destas informações,  $F = 8$  e  $A = 12$ , vamos substituir esses valores na fórmula:

$$S = 2\pi(A - F)$$

$$S = 2\pi(12 - 8)$$

$$S = 2\pi \cdot 4$$

$$S = 8\pi.$$

Portanto, a soma de todos os ângulos internos das faces de um octaedro é igual a  $8\pi$ .

**Observação 1.1.12.** O exemplo acima pode ser interpretado analisando cada face do octaedro, já que todas são iguais. Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a  $\pi$ , e ao todo, temos oito triângulos como faces desse poliedro, então, para encontrar a soma dos ângulos internos de todas as faces, basta multiplicar esses valores, ou seja,  $S = 8\pi$ .

### 1.1.4 Exercícios

**Exercício 1.1.13.** Um poliedro convexo de 20 arestas e 10 vértices só possui faces triangulares e quadrangulares. Determine os números de faces de cada gênero.

**Exercício 1.1.14.** A diagonal de um poliedro é qualquer segmento que une dois vértices que não estão na mesma face. Quantas diagonais possui o icosaedro regular?

**Exercício 1.1.15.** Mostre que se um poliedro convexo tem 10 arestas então ele tem 6 faces.

**Exercício 1.1.16.** Descreva todos os poliedros que possuem 10 arestas.

**Exercício 1.1.17.** Um poliedro convexo  $P$  possui  $A$  arestas,  $V$  vértices e  $F$  faces. Com bases em cada uma das faces constroem-se pirâmides com vértices exteriores a  $P$ . Fica formado então um poliedro  $P'$  que só possui faces triangulares. Determine a relação entre o número de arestas, faces e vértices de  $P$ .

**Exercício 1.1.18.** Um cubo de aresta  $a$  é seccionado por planos que cortam, cada um, todas as arestas concorrentes num vértice em pontos que distam  $x$  ( $x < a/2$ ) deste vértice. Retirando-se as pirâmides formadas, obtém-se um poliedro  $P$ . Descreva esse poliedro e calcule seu número de diagonais.

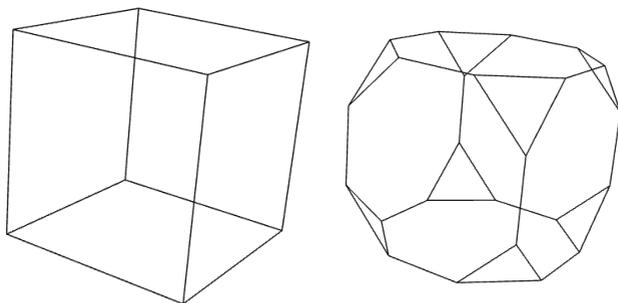


Figura 1.8: Exemplo da secção descrita no exercício.

**Exercício 1.1.19.** Considerando o poliedro  $P$  do exercício anterior, suponha agora que  $P$  tem todas as arestas iguais. Calcule, em função de  $a$  o comprimento de sua aresta.

# Capítulo 2

## Fórmula de Euler

### 2.1 Uma breve história

Em meados de 1700 a teoria dos poliedros tinha mais de dois mil anos, e permitia encontrar comprimentos de lados e diagonais; medir ângulos planos; e determinar volumes de poliedros. Mas esse conhecimento era puramente para propriedades que podiam ser medidas.

Leonhard Euler, um dos matemáticos mais famosos da história, viria mudar essa situação. Euler tinha uma capacidade de consolidar grandes resultados e criar uma base teórica no qual tudo se encaixa, e em 1750 ele começou a fazer isso com poliedros, futuramente possibilitando agrupar, ou classificar, todos os poliedros baseado em suas características.

Afinal, é assim que classificamos os polígonos: todos os polígonos de três lados são triângulos, os de quatro lados são quadriláteros e assim por diante. A dificuldade de classificar poliedros dessa maneira é que contar o número de faces não é suficiente para distingui-los. Como vemos na figura 7.1, poliedros com o mesmo número de faces podem possuir

muitas outras características bem diferentes.

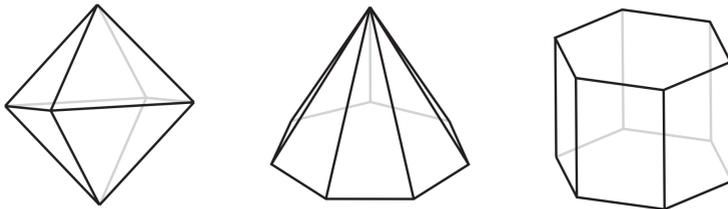


Figura 2.1: Diferentes poliedros com o mesmo número de faces.

Euler, brilhantemente, percebeu que um poliedro é composto de componentes de 0, 1 e 2 dimensões, ou seja, vértices, arestas e faces, e que essas eram as características que devemos observar para classificar polígonos. Afirmando:

*“Portanto, três tipos de limites devem ser considerados em qualquer corpo sólido; nomeadamente 1) pontos, 2) linhas e 3) superfícies, ou, com os nomes especialmente usados para este fim: 1) ângulos sólidos, 2) arestas e 3) faces. Esses três tipos de limites determinam completamente o sólido”*

Hoje tratamos o “ângulo sólido” como o vértice do poliedro.

Tendo estabelecido esta divisão, podemos rapidamente perceber uma relação entre estas partes. Veja: um cubo tem 6 faces, 12 arestas e 8 vértices; a soma  $6 - 12 + 8$  é igual a 2. Um tetraedro tem 4 faces, 6 arestas e 4 vértices; a soma  $4 - 6 + 4 = 2$ . Um icosaedro tem 20 faces, 30 arestas e 12 vértices; a soma  $20 - 30 + 12 = 2$ .

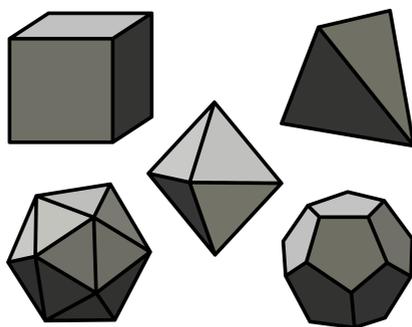


Figura 2.2: poliedros regulares.

Euler, percebendo essa relação escreveu em carta para Goldbach:

*“Em todo sólido delimitado por faces planas a soma do número de faces e o número de ângulos sólidos excede em dois o número de arestas, ou seja,  $H + S = A + 2$ .”*

Inicialmente, foram usadas as letras H, A e S para denotar o número de faces (hedra), arestas (acies) e vértices (angulus solidus). Reorganizando um pouco, podemos chegar a forma como estamos acostumados a ver hoje em dia:

$$F - A + V = 2.$$

Ainda em 1750 Euler escreveu seu primeiro artigo no qual tratava sobre sua fórmula para poliedros, “Elementa doctrinae solidorum”. Nele são feitas observações gerais sobre os poliedros, discussão sobre a relação entre os números de vértices, arestas e faces, provas de vários teoremas que relacionando estes números e verifica que  $V - E + F = 2$  vale em vários casos especiais. Sem que fosse dada prova de que a fórmula vale para todos os poliedros, o matemático escreveu: “Não consegui encontrar uma prova firme desse teorema”.

No ano seguinte, em um segundo artigo, “Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita”, Euler consegue provar sua

fórmula para poliedro. O curioso é que, mesmo a Fórmula de Euler Para Poliedros ser uma das mais famosas da matemática, sua prova é praticamente desconhecida. Isso se deve ao fato de que a demonstração de Euler não satisfaz os padrões modernos de rigor, além de que muitas outras demonstrações, mais simples e diretas, foram feitas desde que ela foi enunciada. A seguir apresentamos uma delas.

## 2.2 Demonstração da Fórmula de Euler

**Teorema 2.2.1.** Em todo poliedro com  $A$  arestas,  $V$  vértices e  $F$  faces, vale a relação  $V - A + F = 2$ .

**Demonstração:** Como visto na Seção 1.1.3, a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo é dada por  $S = 2\pi(A - F)$ . Vamos encontrar outra forma de chegar na relação da soma dos ângulos internos das faces.

Em um poliedro convexo  $P$ , vamos escolher uma reta  $r$ , que não seja paralela a nenhuma das faces de  $P$  e um plano  $H$ , que não intersecta  $P$  e é perpendicular a  $r$ . Vamos chamar o plano  $H$  de plano horizontal e as retas paralelas a  $r$  de retas verticais. O plano  $H$  divide em dois semi-espacos, em que um deles está o poliedro  $P$ , que vamos chamar de semi-espaço superior.

Vamos imaginar que o Sol esteja bem acima do poliedro  $P$ , com raios verticais, fazendo sua sombra ser projetada no plano  $H$ . Cada ponto  $X$  do semi-espaço superior corresponde um ponto  $X'$  em  $H$ , chamado de sombra de  $X$ . Por definição, a sombra de qualquer conjunto  $C$ , contido no semi-espaço superior é o conjunto  $C'$ , contido em  $H$ , formado pelas sombras dos pontos de  $C$ .

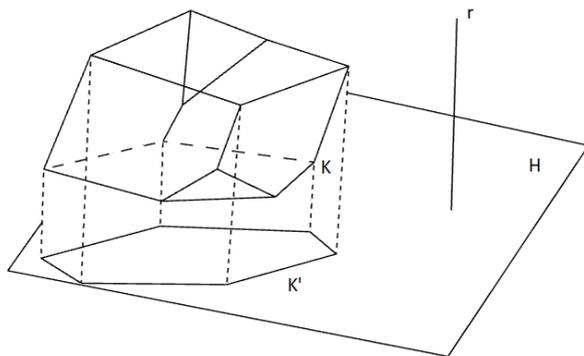


Figura 2.3: Região iluminada e região sombria.

Sendo  $P'$  a sombra do poliedro convexo  $P$ , cada ponto de  $P'$  é sombra de um ou dois pontos de  $P$ . O polígono convexo  $K'$  é o contorno da sombra  $P'$ , a qual é sombra de uma poligonal fechada  $K$  formada por arestas de  $P$ . Cada ponto de  $K'$  é sombra de um único ponto de  $P$ . Chamamos  $K$  de contorno aparente do poliedro  $P$ . Podemos perceber também que cada ponto interior de  $P'$  é sombra de exatamente dois pontos de  $P$ . O ponto mais alto, ou seja, mais distante de  $H$ , entre dois pontos de  $P$ , é chamado de ponto iluminado, e o ponto mais baixo, é chamado de ponto sombrio.

Por pertencerem ao mesmo gênero, a soma dos ângulos internos de uma face é igual a soma dos ângulos internos de sua sombra. Dessa forma, podemos calcular essa soma de outra maneira.

Sejam  $V_1$  o número de vértices iluminados,  $V_2$  o número

de vértices sombrios e  $V_0$  o número de vértices do contorno aparente  $K$ , que também é o número de vértices da poligonal  $K'$ , contorno de  $P'$ . Então  $V = V_0 + V_1 + V_2$ .

Vamos considerar a sombra das faces iluminadas.

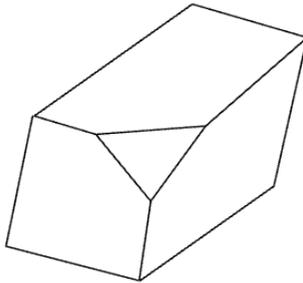


Figura 2.4: Sombra das faces iluminadas.

A sombra das faces iluminadas é um polígono convexo com  $V_0$  vértices em seu contorno e  $V_1$  pontos interiores, sombra dos vértices iluminados de  $P$ . Então, a soma de todos os ângulos da figura anterior é:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2).$$

De maneira análoga, podemos calcular a soma de todos os ângulos da sombra das faces sombrias:

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2).$$

Logo, temos que  $S = S_1 + S_2$  a soma de todos os ângulos internos de todas as faces é:

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2) \\
S &= 2\pi(V_1 + V_2 + V_0 - 2) \\
S &= 2\pi(V - 2)
\end{aligned}$$

Podemos comparar essa fórmula com a obtida na Seção 1.1.3:  $S = 2\pi(A - F)$ . Igualando as duas temos que:

$$\begin{aligned}
2\pi(V - 2) &= 2\pi(A - F) \\
V - 2 &= A - F \\
V - A + F &= 2.
\end{aligned}$$

□

## 2.3 Poliedros regulares

Gostaríamos de mostrar uma das muitas aplicações para a Fórmula de Euler, sendo essa a demonstração de que existem somente 5 poliedros regulares. Mas, para isso, primeiro vamos definir o que são.

**Definição 2.3.1.** Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices se encontram o mesmo número de arestas.

**Exemplo 2.3.2.** Voltemos ao Exemplo 1.1.11, no qual utilizamos um octaedro. Como todas as faces dele são triângulos equiláteros, e em todos os vértices se encontram exatamente quatro arestas, o octaedro é um poliedro regular.

**Teorema 2.3.3.** Existem apenas cinco poliedros regulares convexos. Chamamos esses poliedros de **Poliedros de Platão**.

Os cinco **Poliedros de Platão** são: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

**Demonstração:** Denotando por  $n$  o número de arestas de cada face e  $p$  o número de arestas de cada vértice, temos:

$$2A = nF = pV$$

$$A = \frac{nF}{2} \text{ e } V = \frac{nF}{p}$$

Substituindo na Fórmula de Euler, obtemos:

$$\frac{nF}{2} - \frac{nF}{p} + F = 2$$

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}.$$

Como o número de faces  $F$  é um número positivo, devemos ter que  $2p + 2n - np > p$ . Ou seja:

$$\frac{2n}{n-2} > p.$$

Sabemos que  $p > 3$ , portanto  $n < 6$ . De modo que chegamos as seguintes possibilidades:

$$n = 3 \rightarrow F = \frac{4p}{6-p} \rightarrow \begin{cases} p = 3 \rightarrow F = 4 & \text{(Tetraedro)} \\ p = 4 \rightarrow F = 8 & \text{(Octaedro)} \\ p = 5 \rightarrow F = 20 & \text{(Icosaedro)} \end{cases}$$

$$n = 4 \rightarrow F = \frac{2p}{4-p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 6 \text{ (Cubo)}$$

$$n = 5 \rightarrow F = \frac{4p}{10-3p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 2 \text{ (Dodecaedro)}$$

□

## 2.4 Poliedros Eulerianos

Se nos perguntássemos para quais poliedros a Fórmula de Euler é satisfeita poderíamos ter como resposta correta os poliedros convexos, como no caso das figuras apresentadas anteriormente. E de fato podemos ver que para muitos casos de poliedros não convexos a relação não se mantém.

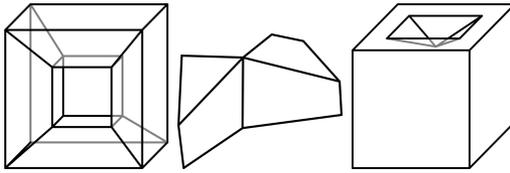


Figura 2.5: Poliedros não convexos que não respeitam a relação.

Mas não são todos os poliedros não convexos que fogem da fórmula.

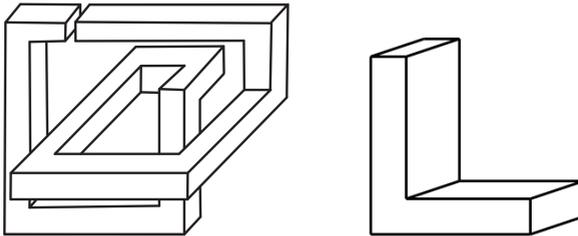


Figura 2.6: Poliedros não convexos que **respeitam** a relação.

Para isto, um conjunto de critérios mais gerais com os quais podemos trabalhar foi feito pelo matemático Karl Georg Christian von Staudt em 1847. Nestes, assumindo que poliedros são cascas ocas (não sólidas), podemos descrever Poliedros Eulerianos, ou seja, aqueles que respeitam a relação  $F - A + V = 2$ , com as seguintes suposições:

**Definição 2.4.1.** Em um Poliedro Euleriano: É possível chegar em qualquer vértice, a partir de qualquer outro vértice, por meio de um caminho de arestas, e qualquer caminho de arestas que começa e termina no mesmo vértice, sem passar duas vezes num mesmo vértice, divide o poliedro em dois pedaços.

Como podemos ver nos exemplos da última figura, com as considerações feitas por Staudt passamos a considera-los Eulerianos

## 2.5 Um buraco na explicação

Agora vamos nos voltar um pouco para os poliedros para os quais a equação  $F - A + V = 2$  não é verdadeira. Pensemos primeiramente num poliedro no formato de uma moldura de quadro, como na figura abaixo. Nele podemos contar 16 faces ( $F$ ), 32 arestas ( $A$ ) e 16 vértices ( $V$ ), logo  $F - A + V = 0$

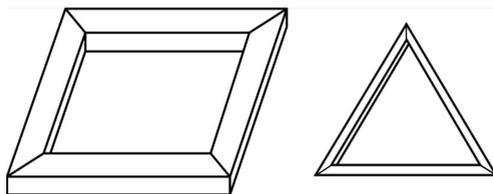


Figura 2.7: Poliedros onde vale  $F - A + V = 0$ .

A princípio podemos pensar que há algo de errado entre a equação e esta figura. Mas se seguirmos aplicando a relação em casos semelhantes (veja na figura o poliedro ao lado moldura de quadro) obtermos de novo e de novo a equação  $F - A + V = 0$ . Vamos tentar entender o porquê desse buraco fazer tanta diferença.

Voltemos um pouco para o caso dos poliedros convexos para isso, e imaginemos um deles dentro de uma esfera. Se supormos uma deformação do poliedro, como se o enchêssemos de ar, de modo que ele inchasse até encostar na esfera, teríamos aí a projeção deste poliedro na esfera, nela vemos que as arestas e as faces se moldam à curvatura da esfera. Com a projeção feita podemos visualizar mais facilmente o processo a seguir.

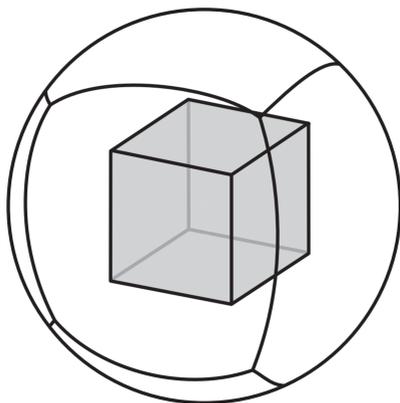


Figura 2.8: Poliedros não convexos que não respeitam a relação.

Na figura 2.8 duas faces se encontram ao longo de uma aresta comum, de modo que se removermos essa aresta fundiríamos as duas faces numa só. E uma vez que essa fusão reduz igualmente  $F$  e  $A$  em 1, não modifica  $F - A + V$ . Seguindo juntando faces ao tirar arestas, chegamos a uma única face, que cobre a totalidade da esfera, exceto apenas pelas arestas e vértices que restam. Como tiramos todas as arestas que separam faces distintas. Se agora removermos os vértices e as arestas nos extremos dessa “árvore” restante, tanto  $A$  como  $V$  diminuirão em 1, e a expressão  $F - A + V$

mais uma vez permanece inalterada. E seguiríamos com passos similares até restar um único vértice sobre uma esfera, onde  $V = 1$ ,  $A = 0$  e  $F = 1$ , e  $F - A + V = 1 - 0 + 1 = 2$ . Mas, uma vez que cada passo deixa  $F - A + V$  inalterado, seu valor no início também deve ter sido 2.

No caso de poliedros como o da moldura de quadro, se efetuarmos este mesmo processo chegamos a uma figura diferente, análoga a uma esfera com um furo no meio: um toro (uma rosquinha pra ser mais exato).

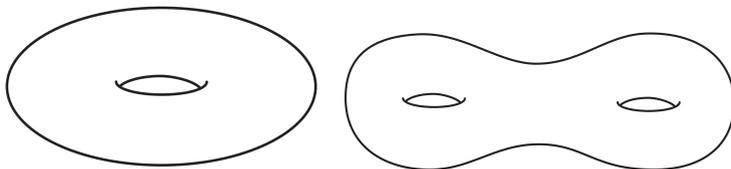


Figura 2.9: Poliedros não convexos que não respeitam a relação.

Intuitivamente percebemos que uma grande diferença entre a esfera e o toro é o furo presente neste.

De forma parecida, a figura chamada de toro com dois buracos, tem a característica de possuir dois buracos. E para figuras com dois buracos, vamos perceber que obtemos a igualdade  $F - A + V = -2$ , e veríamos que em figuras com 3 buracos obtemos  $F - A + V = -4$ , e em geral, qualquer poliedro deformável em um toro com  $g$  buracos, satisfaz  $F - A + V = 2 - 2g$ , onde  $g$  vem da abreviação de genus, que se traduz para o número de buracos na figura.

Mas afinal de contas, o que são buracos?

Se definirmos intuitivamente um buraco, podemos afirmar que eles são regiões onde não temos parte do poliedro. O problema com isso é que acabamos incluindo toda a região ao redor da figura como buraco, inclusive em figuras sem eles,

como a esfera. Assim já podemos ver o quão difícil seria fazer esta definição.

Contudo, com o uso da poderosa Fórmula de Euler para poliedros, podemos contornar essa complicada tarefa. Veja: se usarmos a relação  $F - A + V = 2 - 2g$ , podemos obter facilmente o número de buracos que uma determinada figura possui, sem que tenhamos que definir o que eles são, ou seja,

$$g = 1 - F/2 + A/2 - V/2.$$

## 2.6 Um pouco de topologia

Usando da igualdade encontrada poderíamos separar poliedros a partir do seu número de buracos, de modo que, por processos similares aos que realizamos anteriormente, podemos transformar poliedros de um grupo em outros desse mesmo grupo.

Esse processo marca a divisão entre geometria e topologia. Esta é comumente conhecida como geometria da folha de borracha, por podermos deformar (achatar, rotacionar, torcer, etc.) os objetos de estudo sem que eles percam suas características. Somente não podemos fura, cortar, ou colar partes destes objetos.

Desse modo também obtemos uma melhor definição para os Poliedros Eulerianos, ou seja, aqueles que respeitam  $F - A + V = 2$ . Acaba que todos os poliedros topologicamente iguais a uma esfera, isso é, que podemos deformar até chegarmos numa esfera, são Eulerianos, independentemente de serem convexos ou côncavos, ou de respeitarem as relações dadas por Staudt.

### 2.6.1 Faixa de Möbius

Com o uso da topologia e suas relações, podemos obter figuras estranhas: superfícies com apenas um lado. Em um primeiro momento, isso parece ser impossível, mas vamos mostrar um exemplo em que é possível você construir apenas com uma tira de papel.

A Faixa de Möbius é o exemplo mais famoso desse tipo de superfície.

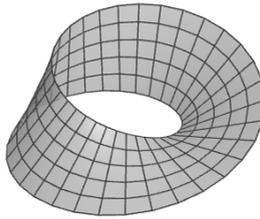


Figura 2.10: Faixa de Möbius.

**Definição 2.6.1.** A Faixa de Möbius é uma superfície bidimensional com apenas um lado. É uma faixa retangular cujas extremidades são coladas a partir de uma semitorção, ou seja, com um giro de  $180^\circ$ .

Para verificar que essa superfície possui apenas um lado, a partir de um ponto, trace uma linha ao longo da faixa, sem tirar o lápis do papel. Você irá notar que após percorrer todo o comprimento da faixa, chegará a esse mesmo ponto inicial, e então a fita não tem frente e verso, ela possui apenas um lado.

## 2.6.2 Exercícios

**Exercício 2.6.2.** Se traçarmos uma linha ao longo de uma Faixa de Möbius, e em seguida a cortarmos nesta linha, o que acontece com a Faixa? Esta nova figura ainda é uma Faixa de Möbius?

**Exercício 2.6.3.** Vamos montar uma nova superfície: realize duas semitorções numa faixa de papel e então cole suas extremidades mais distantes. Quantos lados possui essa superfície? Ela é uma Faixa de Möbius? O que acontece com ela se realizarmos as ações do exercício anterior nela?

**Exercício 2.6.4.** O que acontece se realizarmos três semitorções numa construção como a do exercício anterior? Generalize o número de lados de construções como as anteriores, mas com um número qualquer de semitorções, e explique porque podemos categoriza-las assim.

**Exercício 2.6.5.** Como podemos deformar a figura a seguir de modo que possamos contar efetivamente quantos buracos ela possui?

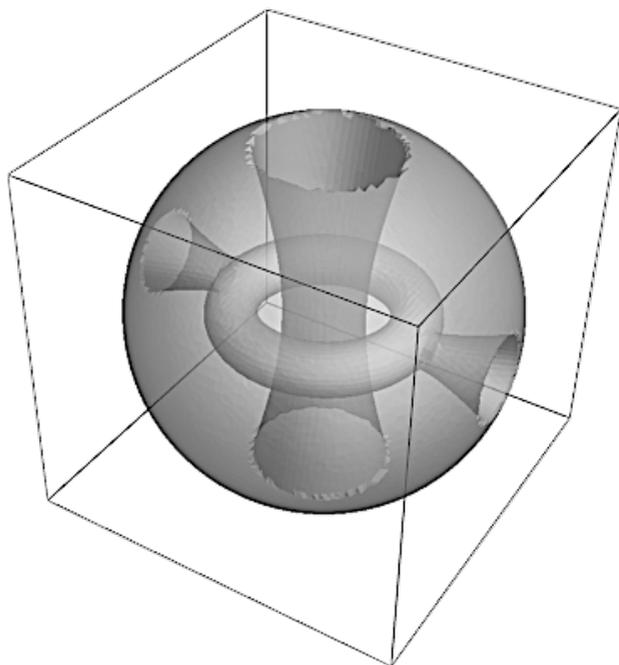


Figura 2.11: Um buraco através de um buraco num buraco.

# Capítulo 3

## Três Formas de Se Olhar Para Uma Fórmula

### 3.1 Padrão de dobras

Para modelos mais complexos de origami, nem sempre conseguimos elaborar uma diagrama com um passo a passo para ensinar a dobrá-lo. Nesse caso, um recurso que os criadores de origami usam é o *crease pattern* (Padrão de dobras).

O PD (Padrão de dobras) se assemelha ao origami desdobrado, com as dobras principais marcadas. Abaixo vemos dois exemplos de origamis e seus PD's respectivos. Por exemplo, o origami Tsuru:

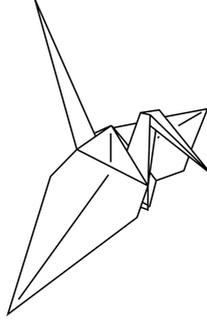


Figura 3.1: Origami de *Tsuru*.

Tem o seguinte PD:

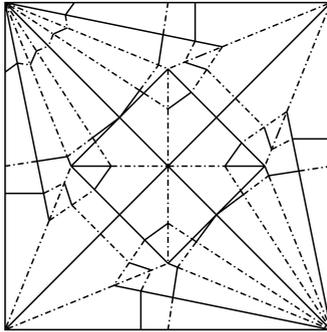


Figura 3.2: Origami de *Tsuru*.

Nesse diagrama, as linhas tracejadas representam dobras do tipo “montanha” e as linhas preenchidas representam dobras do tipo “vale”. Dependendo da dificuldade do modelo, também é indicado o que vai ser cada região do papel, como a seguir:

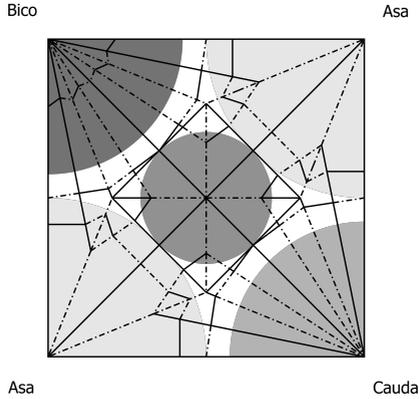


Figura 3.3: Origami de *Tsuru*.

Mas por que nos importamos com o padrão de dobras? Porque podemos dobrar poliedros com eles. Por exemplo, o octaedro possui o seguinte PD:

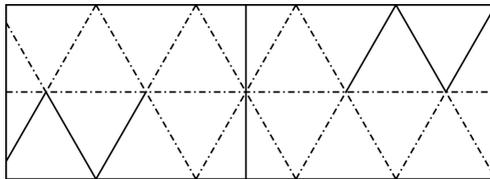


Figura 3.4: Padrão de dobras do Octaedro.

A seguir, um exemplo mais complicado, de uma rosa:

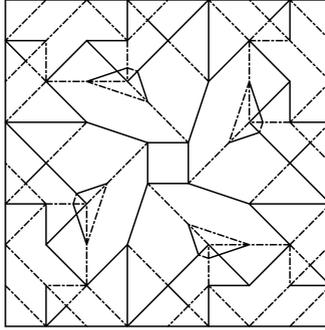


Figura 3.5: Padrão de dobras de uma rosa.

A utilidade de se olhar para os PD's é que podemos enxergar algo que é em três dimensões em apenas duas dimensões, através do papel!

Porém, queremos ver os elementos da fórmula de Euler no PD. Faremos isso da seguinte maneira:

Vértices : Intersecção das dobras

Arestas : Dobras

Faces : Região delimitada por dobras

Uma pergunta natural a se fazer é se o teorema de Euler é valido para os PD's. Nos exemplos apresentados anteriormente, temos:

$$Tsuru \quad V - A + F = 1$$

$$\text{Octaedro} \quad V - A + F = 23 - 46 + 24 = 1$$

$$\text{Rosa} \quad V - A + F = 92 - 184 + 93 = 1$$

**Exercício 3.1.1.** Se souber fazer algum origami, tente fazelo e desenhar seu PD! Depois calcule sua característica de Euler.

Veremos adiante que esse realmente é o caso em todo PD! Por enquanto podemos nos perguntar: **por que existe diferença entre o origami construído e ele desdobrado?**

## 3.2 Planificação

Uma planificação de um poliedro é a junção de polígonos no plano, de forma que quando dobramos, ele se torna o poliedro. Por exemplo, o cubo tem a seguinte planificação:

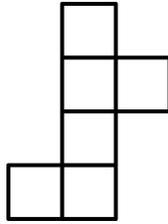


Figura 3.6: Uma planificação do cubo.

Veja mais um exemplo de planificação:

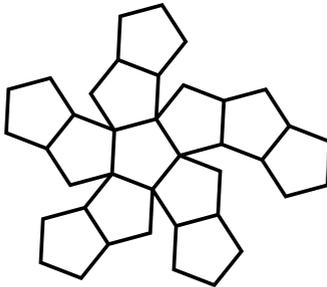


Figura 3.7: Planificação do dodecágono.

Os primeiros registros sobre planificação são atribuídas ao renascentista *Albrecht Dürer* e datam, pelo menos, de

1525. É fato que existem planificações para todos os sólidos platônicos, e uma pergunta ainda em aberto entre os matemáticos é a seguinte:

**Problema 3.2.1** (Conjectura de Dürer). Todos os poliedros convexos têm pelo menos uma planificação.

Mas o que planificações e origamis tem em comum? São duas formas de representarmos poliedros, que vivem no mundo tridimensional, em objetos em duas dimensões! Mas uma diferença fundamental entre os dois é que origamis permitem sobreposição quando estamos construindo.

Mas não queremos só poliedros, queremos a fórmula de Euler. Vamos calculá-la:

1. Para a planificação do cubo:  $V - A + F = 14 - 19 + 6 = 1$
2. Para a planificação do dodecaedro:  $V - A + F = 38 - 49 + 12 = 1$

Conseguimos representar os poliedros (e a fórmula de Euler) em duas dimensões, mas ela parece que dá errado, e agora? Calma, que já vamos explicar. Precisamos melhorar nossa linguagem para falar das duas coisas de um mesmo ponto de vista.

### 3.3 Eis que surge uma linguagem: Grafos

Vimos nas seções anteriores que podemos falar sobre a fórmula de Euler sem falar diretamente de poliedros, a partir de um origami ou uma planificação. Mas de qualquer modo, quando falamos da fórmula de Euler, estamos falando de 3 elementos: vértices, arestas e faces. Vamos mostrar nessa

seção que existe uma linguagem onde planificações podem conversar com origami: Grafos!

Um **Grafo** é uma estrutura matemática bem simples (de início, pelo menos), onde estamos interessados em vértices e arestas:

**Definição 3.3.1.** Um Grafo  $G$  é um par ordenado  $G = (V, E)$  onde  $V$  é um conjunto cujo elementos chamamos de *vértices* e  $E$  é um conjunto de elementos que são pares de vértices e que chamamos *arestas*. (Usamos a letra  $E$  por causa do inglês, onde chamamos arestas de *edges*)

Vamos dar alguns exemplos para compreender melhor:

**Exemplo 3.3.2.** Vamos começar bem simples, apenas com dois vértices:  $a$  e  $b$ . Então  $V = \{a, b\}$ . Agora para nossa aresta, ela será  $\{a, b\}$  então  $E = \{\{a, b\}\}$ . Usamos chaves duas vezes pois  $E$  é um conjunto de conjuntos. Juntando tudo ficamos com:

$$G = (\{a, b\}, \{\{a, b\}\}).$$

Para ficar melhor, um desenho:

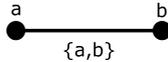


Figura 3.8: Grafo  $G = (\{a, b\}, \{\{a, b\}\})$ .

No exemplo anterior, poderíamos dar um nome para a reta  $\{a, b\}$ , por exemplo  $e$ , e desenhar o Grafo assim:

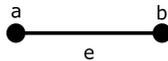


Figura 3.9: Grafo  $G = (\{a, b\}, \{\{a, b\}\})$ .

Como só temos uma aresta entre  $a$  e  $b$ , poderíamos ainda desenhar dessa maneira:

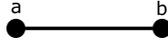


Figura 3.10: Grafo  $G = (\{a,b\}, \{\{a,b\}\})$ .

Todos esses Grafos representam o mesmo Grafo:  $G = (\{a,b\}, \{\{a,b\}\})$ . Lembrem-se que um conceito e a maneira que representamos esse conceito são coisas diferentes: o Grafo  $G$  continua o mesmo ainda que desenhamos ele diferente. Portanto poderíamos ter desenhado a aresta  $\{a,b\} = e$  sem ser uma linha reta:



Figura 3.11: Grafo  $G = (\{a,b\}, \{\{a,b\}\})$ .



Figura 3.12: Grafo  $G = (\{a,b\}, \{\{a,b\}\})$ .

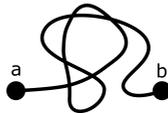
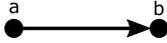


Figura 3.13: Grafo  $G = (\{a,b\}, \{\{a,b\}\})$ .

Apesar do desenho do Grafo e o Grafo serem coisas diferentes, a maneira que desenhamos um Grafo vai ser importante para estudarmos o próximo conceito de **Grafos planares**.

**Exercício 3.3.3.** Definimos um Grafo  $G = (V, E)$  onde as arestas não tem uma orientação. E se quisermos saber pra onde as arestas apontam? Precisaríamos guardar em  $E$  essa informação. Veja o Grafo a seguir:



O exercício é: escreva  $G$  com a notação de conjuntos de forma que saibamos que a aresta sai de  $a$  e vai pra  $b$ .

**Exercício 3.3.4.** A questão anterior tenta responder a seguinte pergunta: “O que é *uma* aresta com orientação?”. Agora estamos dando um passo a mais e nos perguntando: “Como é um Grafo onde *todas* as arestas tem uma orientação?”. Seu exercício agora é tentar escrever essa definição.

Grafos podem ter formas mais particulares, como por exemplo,

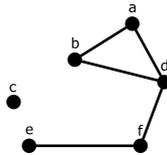


Figura 3.14: Exemplo de Grafo.

e

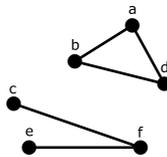


Figura 3.15: Exemplo de Grafo.

Consegue ver o que esses dois Grafos tem em comum? O vértice  $c$  não se liga com nenhum outro. No segundo Grafo, temos dois “pedaços” que não estão ligados, nenhum dos vértices  $a, b$  e  $d$  se liga com qualquer um dos vértices  $c, e$  e  $f$ . Isso nos motiva a definir um novo tipo de Grafo!

**Definição 3.3.5** (Passeio). Considere  $G = (V, E)$  um Grafo. Um **passeio** entre os vértices  $a$  e  $b$  é uma sequência de vértices  $P(a, b) = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$  tal que:

- i.  $e_1 = a$
- ii.  $e_n = b$
- iii. Para todo  $e_k$  e  $e_{k+1}$ ,  $\{e_k, e_{k+1}\} \in E$ . Ou seja, entre quaisquer vértices que estejam lado a lado na sequência, existe uma aresta entre eles.

O que isso quer dizer? Um passeio entre dois vértices significa um “caminho” entre eles.

**Exemplo 3.3.6.** No Exemplo 3.15 um passeio entre  $c$  e  $e$  é  $P(c, e) = (c, f, e)$ , pois  $\{c, f\}$  e  $\{f, e\}$  são arestas. Mas veja que não há um passeio  $P(a, f)$ .

**Definição 3.3.7** (Grafo conexo). Um Grafo  $G = (V, E)$  é dito **conexo** se para quaisquer vértices  $a$  e  $b$ , existe um passeio entre eles.

### 3.3.1 Ainda mais Grafos

Veja que ainda não chegamos em **faces**, vamos precisar dos próximos conceitos para conseguir dizer o que é uma face.

**Definição 3.3.8** (Subgrafo). O que significa um Grafo estar dentro do outro? Como representamos isso? Vamos responder isso agora! Um subgrafo é, também um par ordenado de vértices e arestas. Se  $G = (V, E)$  é um Grafo, um **subgrafo** de  $G$  é um conjunto  $G' = (V', E')$  onde:

- i.  $V' \subseteq V$ ,
- ii.  $E' \subseteq E$ ,

- iii. Se temos um vértice  $a$  em uma aresta de  $E'$ , então  $A \in V$ .

A condição iii. diz que todos os pontos das arestas tem que pertencer aos vértices do Grafo. Ou seja, não tem aresta com uma das pontas faltando.

**Exercício 3.3.9.** Seja  $G = (\{a, b, c\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\})$  um Grafo. Os seguintes Grafos  $G'$  são subgrafos de  $G$ ? (dica: desenhar ajuda!)

1.  $G' = (\{a, b\}, \{\{a, b\}\})$ ,
2.  $G' = (\{a, b\}, \{\{a, c\}\})$ ,
3.  $G' = (\{a, b, c\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}\})$ ,
4.  $G' = (\{a, b, c\}, \{\{a, b, c\}\})$ ,
5.  $G' = (\{a, b, c\}, \{\{a, b\}\})$ ,
6.  $G' = G$ .

**Exercício 3.3.10.** Prove que um subgrafo é de fato um Grafo!

**Definição 3.3.11** (Isomorfismo). Dizemos que dois Grafos  $G = (V, E)$  e  $G' = (V', E')$  são isomorfos quando:

- i. Existe uma função  $f$  bijetiva entre  $V$  e  $V'$ , e
- ii. Se  $\{a, b\} \in E$  então  $\{f(a), f(b)\} \in E'$ .

A condição *i.* significa que precisamos da mesma quantidade de pontos em  $G$  e  $G'$ . A condição *ii.* significa que não podemos “descolar” um vértice de uma aresta depois da transformação.

**Definição 3.3.12.** Um **ciclo** de  $G = (V, E)$  é um subgrafo  $G'$  de  $G = (V', E')$  tal que  $G'$  é isomorfo ao seguinte Grafo:

$$C_n = (\{1, 2, 3, \dots, n\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}).$$

E que Grafo é esse? Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 3.3.13.** Vejamos algum exemplos para  $n$  pequeno:

1.  $C_3 = (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\})$ ,
2.  $C_4 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\})$ .

Agora vamos desenhar para ver:

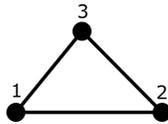


Figura 3.16: Grafo  $C_3$ .

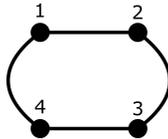


Figura 3.17: Grafo  $C_4$ .

E o caso geral? Se parece com algo assim:

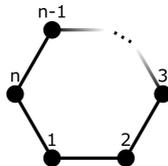


Figura 3.18: Grafo  $C_n$ .

Por que precisamos de ciclos? Para falar de faces! Veja que “dentro” de um ciclo temos uma região, que chamamos de **face**. Contar as faces e contar os ciclos são, basicamente, a mesma coisa. Por que? Porque temos que contar os subgrafos isomorfos a algum  $C_n$  que são uma face!

Agora temos todos os ingredientes que precisamos para chegar na fórmula de Euler: vértices, arestas e faces, mas falta algo ainda para encontrarmos o “= 2”.

Uma das coisas que faltam é o “plano” fora do Grafo. Consideramos a região fora de um Grafo como a “face ilimitada” desse Grafo. Por exemplo, o Grafo  $C_5$  tem duas faces, a de “dentro” e a de “fora”.

**Exercício 3.3.14.** Calcule a fórmula de Euler para os Grafos 3.14 e 3.15, lembrando da face ilimitada deles!

### 3.3.2 Grafos planares

**Definição 3.3.15.** Um Grafo  $G = (V, E)$  é chamado de Grafo *planar* se conseguimos desenhá-lo sem que nenhuma das arestas se cruzem.

Lembre-se que o desenho do Grafo e o Grafo são coisas diferentes! Então por exemplo, o Grafo

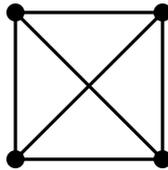


Figura 3.19: Grafo  $K_4$ .

está desenhado de uma maneira não-planar, mas ele é planar, pois podemos desenhá-lo da seguinte maneira:

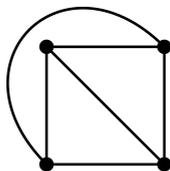


Figura 3.20: Grafo  $K_4$  desenhado planar.

Lembra de como acabamos de definir face? Podemos ver as faces desse Grafo planar assim:

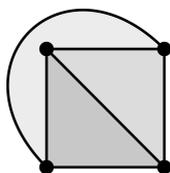


Figura 3.21: faces do Grafo  $K_4$  desenhado planar.

Contando com a face ilimitada temos que:

$$V - A + F =$$

$$4 - 6 + 4 = 2$$

Com isso podemos entender porque nossas fórmulas anteriores dos exemplos de planificações e origamis davam errado! Apenas não sabíamos que faltava a face ilimitada.

### 3.3.3 Kuratowski e Euler

Mas como saber quando um Grafo é planar ou não sem precisar ficar mexendo nos desenhos? Para isso vamos precisar de um conceito e um teorema:

**Definição 3.3.16** (Subdivisão). Uma **subdivisão** de um Grafo  $G = (V, E)$  é uma transformação onde:

- i. Dados dois vértices  $a$  e  $b$ : substituímos pelos vértices  $a$ ,  $x$  e  $b$ . Dado a aresta  $\{a, b\}$ , substituímos pelas arestas  $\{a, x\}$  e  $\{b, x\}$ . Ou seja, estamos “quebrando” uma aresta em duas.

Podemos fazer também uma **subdivisão inversa**:

- ii. Dados três vértices  $a$ ,  $x$  e  $b$ , substituímos pelos vértices  $a$  e  $b$ . Dados as arestas  $\{a, x\}$  e  $\{b, x\}$ , substituímos pela aresta  $\{a, b\}$ .

Vejamos com imagens:

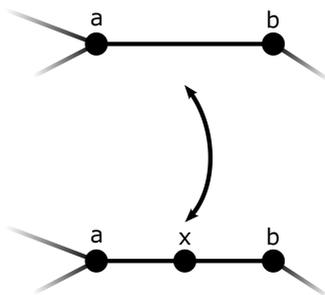


Figura 3.22: Exemplo de divisão e subdivisão.

Intuitivamente, ou estamos colocando um vértice em uma aresta ou retirando um vértice de uma aresta.

**Definição 3.3.17** (Homeomorfismo). Dois Grafos  $G$  e  $G'$  são ditos **homeomórficos** se podemos obter um a partir de uma seqüência de subdivisões ou de subdivisões inversas do outro.

**Teorema 3.3.18** (Kuratowski). Um Grafo é planar se, e somente se, não contiver subgrafo homeomorfo a  $K_5$  ou a  $K_{3,3}$ .

Mas quem são esses Grafos? Esses aqui:

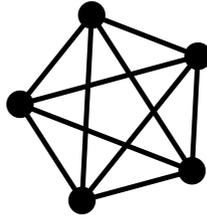


Figura 3.23: Grafo  $K_5$ .

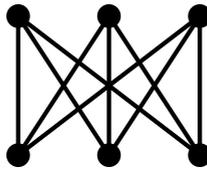


Figura 3.24: Grafo  $K_{3,3}$ .

Mas por que saber se um Grafo planar importa? Por causa do seguinte teorema:

**Teorema 3.3.19.** Em um Grafo planar e conexo, vale

$$V - A + F = 2.$$

**Exercício 3.3.20.** Reflita por que precisamos pedir que o Grafo precisa ser conexo, e de um exemplo dessa necessidade.

Mas se a mesma identidade vale pra Grafos planares, será que temos alguma relação entre elas? A resposta é sim, conseguimos “projetar” os poliedros no plano e desenhmos para serem planares, veja a seguir com os sólidos platônicos:

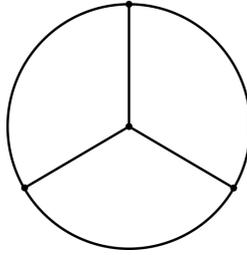


Figura 3.25: Grafo planar do Tetraedro.

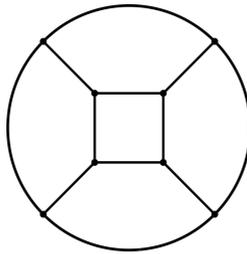


Figura 3.26: Grafo planar do Cubo.

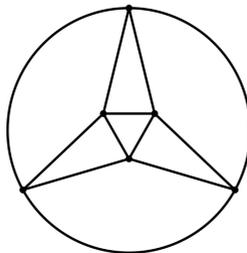


Figura 3.27: Grafo planar do Octaedro.

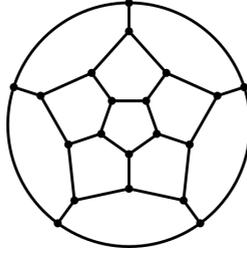


Figura 3.28: Grafo planar do Dodecaedro.

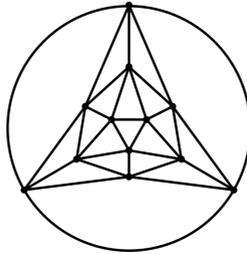


Figura 3.29: Grafo planar do Icosaedro.

## 3.4 Tudo agora é dois

Consegue falar de planificações e origamis em linguagem de Grafos? A gente dá uma ajuda! Vamos mostrar que a constante desses objetos é 2. Mas para provar isso vamos precisar de alguns princípios, que vamos chamar de **afirmações**.

### 3.4.1 Planificações agora são dois

Vamos começar do começo. O que é uma planificação? Um agrupamento de polígonos no plano. E o que é cada polígono? Isso mesmo, um ciclo de tamanho  $n$ ! Mas precisamos de mais polígonos, e eles podem ter outra quantidade de lados, então temos um conjunto de polígonos  $C =$

$\{c_{n_1}, c_{n_2}, \dots, c_{n_k}\}$ . Então precisamos provar que se juntarmos polígonos pelas laterais, em nosso Grafo continua a valer que  $V - A + F = 2$ .

Vamos começar com dois polígonos. Se juntarmos eles teremos que  $V - A + F = 2$ ? Se sim, juntamos mais um, vemos se a fórmula ainda funciona e por ai vai até juntarmos tudo. Antes disso, precisamos das seguintes afirmações:

**Afirmção 3.4.1.** Um polígono com  $n$  lados é representado com um Grafo  $C_n$ .

**Afirmção 3.4.2.** Colamos um polígono em um Grafo através de  $n + 1$  vértices e  $n$  arestas, adicionando uma face.

Agora sim:

**Proposição 3.4.3.** Se juntarmos um Grafo planar com um  $C_k$ , então  $V - A + F = 2$ .

**Demonstração.** Quando juntamos um  $C_k$  em um Grafo planar, fazemos isso por  $n$  arestas. De forma similar, estamos repetindo  $n + 1$  vértices e  $n$  arestas, e adicionando 1 face. Se  $G$  é o nosso Grafo planar então  $V - A + F = 2$  para  $G$ . Então  $V' = V - (n + 1)$ ,  $A' = A - n$  e  $F' = F + 1$ . Então temos:

$$\begin{aligned} V' - A' + F' &= (V - (n + 1)) - (A - n) + (F + 1) \\ &= V - n - 1 - A + n + f + 1 \\ &= V - A + F + n - n - 1 + 1 \\ &= 2 + n - n - 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

### 3.4.2 Origamis agora são dois

Como funciona um origami em termos de Grafos? Calma. Primeiro vamos pensar em uma definição de origami.

Qual o jeito matemático de definir um origami? Normalmente temos um papel e fazemos uma sequência (finita!) de dobras. De forma análoga, temos um papel inicial e colocamos arestas no nosso PD. Pense no papel inicial, como podemos interpreta-lo como um Grafo? Vamos fazer, assim o papel inicial é um ciclo  $C_4$  (caso ele seja um quadrilátero). Ou melhor:

**Afirmção 3.4.4.** Se o papel inicial é um polígono de  $n$  lados, então seu Grafo inicial é um ciclo  $C_n$ .

Então, agora, o que é uma dobra? O que acontece quando dobramos? Vamos listar algumas das propriedades das dobras a seguir:

**Afirmção 3.4.5.**

- i. Uma dobra transforma o Grafo de um PD em outro Grafo de PD. (Lembre-se que estamos interessados no PD de um origami, não no origami em si).
- ii. Uma dobra adiciona, pelo menos, uma aresta e um vértice.
- iii. Uma dobra deve partir de uma aresta ou de um vértice. Se não pedíssemos isso, poderíamos fazer uma dobra no meio do papel, e teríamos um Grafo desconexo. É claro que com papel real conseguimos fazer isso, mas queremos um Grafo conexo para ver que  $V - A + F = 2$ .
- iv. Se a dobra sai e/ou chega em uma aresta, ela divide a(s) aresta(s) em duas outras no origami (Grafo) resultante.

A seguinte afirmação será essencial para provar que a fórmula de Euler funciona para origamis:

**Afirmção 3.4.6.** Se duas dobras se cruzam no PD, elas resultam em um novo vértice.

Agora, sobre alguns tipos de dobras:

**Afirmção 3.4.7.** Temos dois tipos de dobras, ou ela atravessa o papel ponta a ponta (dobra tipo “completa”), ou ela para no meio do papel (dobra do tipo “incompleta”). Para visualizar:

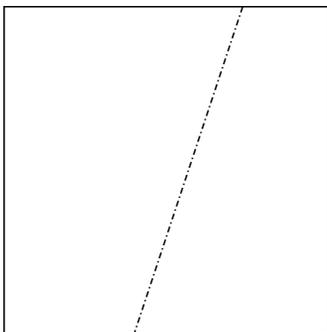


Figura 3.30: Dobra do tipo completa.

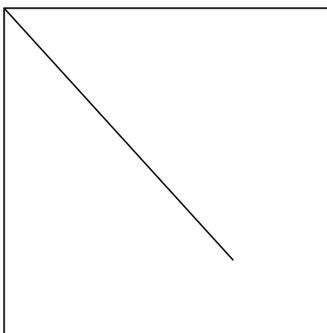


Figura 3.31: Dobra do tipo incompleta.

**Afirmção 3.4.8.** Podemos fazer uma dobra somente entre dois vértices do PD.

**Exercício 3.4.9.** Começamos com um papel que é um  $C_4$ .

Represente uma dobra inicial **incompleta** no PD desse origami. Depois, desenhe sua resposta.

Agora, sabendo disso, vamos provar parecido como anteriormente: primeiro vemos que a dobra inicial (completa ou incompleta) mantém o Grafo planar, e que se adicionarmos qualquer outra dobra (completa ou incompleta), então ele continua planar. Ficaria mais ou menos assim:

**Lema 3.4.10.** Uma dobra inicial em um papel  $C_n$  tem um PD planar.

**Lema 3.4.11.** Uma dobra feita em um PD planar resulta em um PD planar.

Parece complicado né? Mas não precisamos disso, sabemos quem nos dá problemas por causa do Teorema de Kuratowski (3.3.18):  $K_5$  e  $K_{3,3}$ . Por que não tentamos dobrá-los? Isso nos leva ao seguinte teorema:

**Teorema 3.4.12.** Todo PD é um Grafo planar.

*Demonstração.* Comece com algum papel  $C_n$ . Faça cinco dobras incompletas de forma que tenhamos 5 vértices distintos “dentro” do papel esses serão os vértices do  $K_5$ . Faça dobras entre cada um desses vértices dois a dois. Não conseguiremos fazer um  $K_5$ . Se essas dobras resultassem em  $K_5$ , teríamos dobras que se cruzam mas não criam vértices, o que é uma contradição com a afirmação 3.4.6.

Analogamente, faça seis dobras incompletas de forma que tenhamos 6 vértices distintos “dentro” do papel. Se tentarmos fazer um  $K_{3,3}$ , chegaremos na mesma contradição! Então é impossível dobrar um origami que contenha um  $K_5$  ou um  $K_{3,3}$  em seu PD, então ele é um Grafo planar.

□

# Capítulo 4

## Números complexos

### 4.1 Os humilhados serão exaltados

O número imaginário  $i$  tem uma origem um tanto quanto inusitada: algo inútil e sem sentido, demorando 200 anos para os matemáticos se acostumarem e aceitar amargamente o novo tipo de número.

Em 1545, o estudioso Girolamo Cardano estava escrevendo o livro *Ars Magna*, onde ele colocou todas as ideias e estudos mais avançados de matemática da época. Dentre elas, apresentou resoluções para equações cúbicas da forma  $x^3 + ax + b = 0$ , cuja solução apresentada por ele é

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Antes de dizer que essa solução mais atrapalha do que ajuda, note que na verdade você só precisa calcular  $-\frac{b}{2}$  e  $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$ , substituir e fazer algumas operações.

Continuando, essa solução tinha um problema de funcionar perfeitamente para algumas equações, e para outras não.

Se aplicarmos a fórmula na equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$ , teremos  $-\frac{b}{2} = -\frac{-4}{2} = 2$ , e

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} &= \frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27} \\ &= \frac{16}{4} - \frac{(3 \cdot 5)^3}{3^3} \\ &= 4 - \left(\frac{3 \cdot 5}{3}\right)^3 \\ &= 4 - 5^3 = 4 - 125 = -121.\end{aligned}$$

Então

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

O problema aqui é que não existe raiz quadrada de número negativo. A pergunta que a raiz quadrada responde é “quanto vale o lado do quadrado cuja área é 4?”. Bem,  $2 \cdot 2 = 4$ , então  $\sqrt{4} = 2$ . Mas acontece que, fugindo dessa interpretação geométrica e olhando a álgebra,  $(-2)(-2) = 4$ , então é fato que  $\sqrt{4} = \pm 2$ . O que é estranho, já que não existe lado negativo de um quadrado, mas aceitamos porque está provado.

Mas e quando a área é negativa? Quando um número vezes ele mesmo dá  $-4$ ? Não existe! Ao menos, essa é a resposta de todos os matemáticos até então. Eles já evitavam fazer contas com o lado negativo, agora com a área? Esqueça!

Por essa lógica, em seu livro, onde encontrou um novo tipo de número, cuja lógica era fundamentalmente sem sentido, decidiu não se aprofundar no assunto, declarando “tão sutil quanto inútil”.

Em 1572, Rafael Bombelli estudou o livro do Cardano e publicou o livro *L'Algebra*, onde esclarecia as ideias apresentadas por Cardano detalhadamente. Nele, escreveu algo que passou despercebido por Cardano: a equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$

tinha solução real, mesmo considerando esses números bizo-  
nhos!

Nas suas contas, ele percebeu que se substituísse  $x = 4$ ,

$$\begin{aligned}x^3 - 15x - 4 &= 4^3 - 15 \cdot 4 - 4 \\ &= 64 - 60 - 4 = 0.\end{aligned}$$

Então 4 é solução da equação, portanto, a fórmula de Cardano deve funcionar e chegar neste valor. Depois de fazer algumas contas, Bombelli notou que, se considerasse que tais números respeitassem as regras dos reais, valia que  $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$  e  $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$  (verifique!). Desse modo,

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} \\ &= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}\end{aligned}$$

que é igual a 4, porque as raízes negativas se cancelam. Significa que essas contas formais sem sentido obtiveram a RESPOSTA CORRETA.

Mas então, o que são esses números? Na época, era bem aceito que, ao resolver um problema e nele aparecesse uma raiz negativa, o número era *imaginário*, como sinal de que trata-se de um problema sem soluções. Interpretações essas vindas de Descartes, que zombava destes números, afinal, você *imaginava* uma solução para funcionar, o que era um absurdo para os matemáticos da época assim como os irracionais eram para os matemáticos da Grécia antiga.

Para facilitar a leitura, adianto um fato: No século XVIII, Euler fez diversas contribuições à notação matemática, dentre elas, o número imaginário  $i = \sqrt{-1}$  faz parte do número complexo que tem forma  $a + bi$ , com  $a, b$  reais.

Bem, as contas de Bombelli mostravam que os complexos poderiam surgir como parte de um cálculo de soluções que de fato existiam, então alguns matemáticos se debruçaram sobre eles.

No final do século XVII e no século XVIII, tentaram encontrar uma representação geométrica para os números complexos, no que sucedeu o que é chamado hoje de plano de Argand-Gauss. Consiste em dois eixos que se intersectam em  $90^\circ$ , onde  $x$  é real, e  $y$  é imaginário, com valores  $bi$ , onde  $b$  é real.

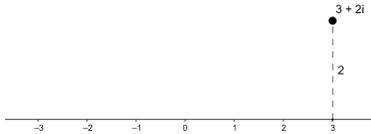


Figura 4.1: Representação de Wessel.

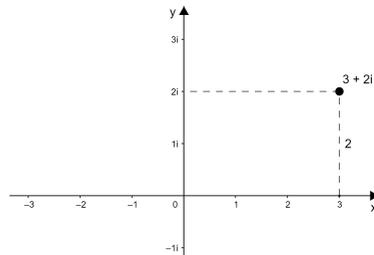


Figura 4.2: Representação de Argand e de Gauss.

Essa representação estava perfeita, mas não explicava o porquê de os complexos formarem um sistema logicamente coerente, nem porquê de ser  $90^\circ$  na intersecção, nem em que sentido eram números.

O que fez os matemáticos realmente levarem a sério os números complexos não foi uma descrição lógica do que eram, mas a avassaladora evidência de que, o que quer que fossem, poderiam fazer bom uso deles. Porque tudo, tudo mesmo, **funcionava bem demais** se considerasse que  $i^2 = -1$  fosse verdade.

Por esse motivo que os complexos se consolidaram em uma das áreas mais poderosas da matemática, chamada de

Análise Complexa, que é basicamente o estudo detalhado das funções usuais com entradas de números complexos. Me refiro aos polinômios, potências, exponencial, funções trigonométricas, entre outras.

É claro, nesse estudo, as funções podem ser o que quisermos, mas não faz sentido chamar de maçã algo cuja natureza é a de um abacaxi, mesmo mudando de árvore. Por um longo período de tempo, os matemáticos discutiram as novas definições e propriedades vindas dessas funções com domínio nos complexos. Dentre esses requisitos, é válido que:

- Queremos que funcionem normalmente com a definição de números reais;
- Queremos que atenda algumas propriedades de função nos reais.

Uma dessas funções que vale destacar, e que mais causa confusão quando se conhece pela primeira vez, é a função  $e^x$ .

Vamos pensar primeiro nos números inteiros. É fácil ver que  $e^4 = e \cdot e \cdot e \cdot e$ , porque a conta de potência é introduzida desse modo, repetir a multiplicação de  $e$  por ele mesmo 4 vezes.

Mas, e para  $e^{0.3}$ ? Podemos fazer  $e^{0.3} = e^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{e^3}$ , mas isso não ajuda muito. Se pedirmos para calculadora resolver, ela vai usar a fórmula

$$e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

que pode seguir infinitamente, para te dar o resultado. Essa função é a utilizada para fazer contas com potências irracionais, como o  $\pi$ , também.

Para um número complexo  $z = x + iy$ ,  $e^z$  não tem nada a ver com o método de multiplicar um número por ele mesmo,

é única e inteiramente ligada à função  $\exp(z)$ . Prova-se que  $e^z = e^x * e^{iy}$ . O que é mais interessante, é que pela forma como se define  $\text{sen}(z)$  e  $\text{cos}(z)$  (se estiver curioso, pule para o final desse capítulo), sendo  $x = 0$ , nós chegamos na fórmula

$$e^{iy} = \text{sen}(y) + i\text{cos}(y)$$

. Essa equação está dizendo que  $e^{iy}$  fica dançando em cima do círculo trigonométrico conforme  $y$  varia. Se escolhermos  $y = \pi$ , chegamos que

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= \text{sen}(\pi) + i\text{cos}(\pi) \\ e^{i\pi} &= -1 + i0 \\ e^{i\pi} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Essa equação é incrível porque relaciona todas as operações e números mais importantes da matemática: A constante de Euler  $e$ , a constante de Arquimedes  $\pi$ , o número imaginário  $i$ , o elemento neutro da multiplicação  $1$ , o elemento neutro da soma  $0$ , a multiplicação, soma e sinal de igualdade.

Além desse estudo das funções usuais na Análise Complexa, que é umas das mais belas áreas da matemática, houveram inúmeras aplicações na física, por conta da facilidade com que os complexos descrevem rotações, em áreas como fluídos, eletroestática e campo eletromagnético.

O número imaginário  $i$  só tem esse nome porque é o que pegou e se manteve, mas o mais adequado seria “número que gira”, “número giratório” ou algo a ver com *spin*, que do inglês significa giro. Porque é fato: quando se multiplica um número complexo por  $i$ , o equivalente é girar a sua representação no plano cartesiano em  $90^\circ$  no sentido anti-horário.

Em engenharia elétrica, todas as contas são feitas com números complexos, porque as equações ficam muito mais

simples de se resolver. Tome como exemplo essa equação para cálculo do valor da corrente elétrica

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = \sqrt{2}V_m \text{sen}(\omega t)$$

, que é complicada de calcular, por possuir derivada e várias operações. Usando complexos, a fórmula vira  $R\dot{I} + j\omega L\dot{I} = \dot{V}$  uma simples conta de somar e multiplicar.

Os números complexos que surgiram como “*inúteis*”, por ser uma solução que fundamentalmente não possui sentido, mas funcionavam. Depois de um tempo com a comunidade acadêmica os utilizando, enfim surgiu uma boa definição do que, de fato, eles eram.

Em 1833, William Rowan Hamilton publicou um artigo onde definiu que o número complexo é um par ordenado de números reais com multiplicação diferente. E tudo funcionava como consequência!

## 4.2 Definição e operações básicas

**Definição 4.2.1.** O conjunto dos números complexos é formado por pares ordenados de números reais  $z = (x, y)$ , satisfazendo as seguintes regras de manipulação para a soma e o produto:

- $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ .
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$ .

**Exemplo 4.2.2.** Tomando  $z_1 = (1, -1)$  e  $z_2 = (-3, 4)$ , temos:

- $z_1 + z_2 = (1, -1) + (-3, 4)$   
 $= [1 + (-3), (-1) + 4]$   
 $= (1 - 3, -1 + 4)$   
 $= (-2, 3).$
- $z_1 z_2 = [1 \cdot (-3) - (-1) \cdot (4), 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)]$   
 $= (-3 + 4, 4 + 3)$   
 $= (1, 7).$

Sejam  $z_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , a soma e o produto desses números complexos têm as seguintes propriedades:

1. *Comutatividade*:  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  e  $z_1 z_2 = z_2 z_1$ .
2. *Associatividade*:  
 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  e  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ .
3. *Elemento neutro aditivo*:  $z + (0, 0) = z$ , para todo  $z$  complexo.
4. *Identidade multiplicativa*:  $z(1, 0) = z$  para todo  $z$  complexo.
5. *Simétrico aditivo*:  $z + (-z) = (x, y) + (-x, -y) = 0$ .
6. *Inverso multiplicativo*:  $(x, y) \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0)$ .
7. *Distributividade do produto em relação à soma*:  
 $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ .

### 1. Demonstração 1:

$$\begin{aligned}
 z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\
 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
 &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\
 &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \\
 &= z_2 + z_1.
 \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x_1, y_1)(x_2, y_2) \\
&= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) \\
&= (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1 + y_2 x_1) \\
&= (x_2, y_2)(x_1, y_1) \\
&= z_2 z_1.
\end{aligned}$$

□

## 2. Demonstração 2:

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_3 &= [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) \\
&= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) \\
&= [(x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3] \\
&= [x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)] \\
&= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
&= (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] \\
&= z_1 + (z_2 + z_3).
\end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
(z_1 z_2) z_3 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)(x_3, y_3) \\
&= [(x_1 x_2 - y_1 y_2)x_3 - (x_1 y_2 + y_1 x_2)y_3, (x_1 x_2 - y_1 y_2)y_3 + \\
&\quad (x_1 y_2 + y_1 x_2)x_3] \\
&= [(x_1 x_2)x_3 - (y_1 y_2)x_3 - (x_1 y_2)y_3 - (y_1 x_2)y_3, (x_1 x_2)y_3 - \\
&\quad (y_1 y_2)y_3 + (x_1 y_2)x_3 + (y_1 x_2)x_3] \\
&= [x_1(x_2 x_3) - y_1(y_2 x_3) - x_1(y_2 y_3) - y_1(x_2 y_3), x_1(x_2 y_3) - \\
&\quad y_1(y_2 y_3) + x_1(y_2 x_3) + y_1(x_2 x_3)] \\
&= [x_1(x_2 x_3) - x_1(y_2 y_3) - y_1(y_2 x_3) - y_1(x_2 y_3), x_1(x_2 y_3) + \\
&\quad x_1(y_2 x_3) + y_1(x_2 x_3) - y_1(y_2 y_3)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(y_2x_3 + x_2y_3), x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + \\
&y_1(x_2x_3 - y_2y_3)] \\
&= (x_1, y_1)(x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3) \\
&= z_1(z_2z_3).
\end{aligned}$$

□

### 3. Demonstração 3:

$$\begin{aligned}
z + (0, 0) &= (x, y) + (0, 0) \\
&= (x + 0, y + 0) \\
&= (x, y) \\
&= z.
\end{aligned}$$

□

### 4. Demonstração 4:

$$\begin{aligned}
z(1, 0) &= (x, y)(1, 0) \\
&= (1, 0)(x, y) \\
&= (1x - 0y, 1y + 0x) \\
&= (x, y) \\
&= z.
\end{aligned}$$

□

### 5. Demonstração 5:

$$\begin{aligned}
z + (-z) &= (x, y) + (-x, -y) \\
&= [x + (-x), y + (-y)] \\
&= (x - x, y - y) \\
&= (0, 0).
\end{aligned}$$

□

## 6. Demonstração 6:

$$\begin{aligned} & (x, y) \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \left( x \frac{x}{x^2 + y^2} - y \frac{-y}{x^2 + y^2}, x \frac{-y}{x^2 + y^2} + y \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \left( \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \left( \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy + xy}{x^2 + y^2} \right) \\ &= (1, 0). \end{aligned}$$

□

## 7. Demonstração 7:

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (x_1, y_1)[(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] \\ &= (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= [x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)] \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3) \\ &= [(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3), (x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1y_3 + y_1x_3)] \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) \\ &= z_1z_2 + z_1z_3. \end{aligned}$$

□

**Mas como chegamos no valor de  $i^2 = -1$ ?**

O número complexo  $i = (0, 1)$  é chamado de *unidade imaginária*. Vamos calcular o valor de  $i^2$  utilizando as regras de manipulação definidas anteriormente

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Podemos também encontrar os valores para outras potências de  $i$

$$\begin{aligned}i^3 &= i^2i = (-1)i = -i \\i^4 &= i^2i^2 = (-1)(-1) = 1 \\i^5 &= i^4i = 1i = i \\i^6 &= i^4i^2 = 1(-1) = -1 \\i^7 &= i^5i^2 = i(-1) = -i \\i^8 &= i^4i^4 = 1.1 = 1 \\i^9 &= i^4i^5 = 1i = i.\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}i^2 &= i^6 = -1 \\i^3 &= i^7 = -i \\i^4 &= i^8 = 1 \\i^5 &= i^9 = i.\end{aligned}$$

Portanto, as potências de  $i$  seguem a seguinte periodicidade:

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

Vamos ver como podemos utilizar isto em um exemplo.

**Exemplo 4.2.3.** Calcule  $i^{82}$ .

Queremos descobrir qual regra de periodicidade  $i^{82}$  irá obedecer. Para isto, a primeira coisa a se pensar seria: “82 pode ser dividido por 4?”. A resposta para esta pergunta é negativa, mas sabemos que 80 é um múltiplo de 4. Logo,

podemos escrever  $i^{82}$  da seguinte maneira

$$i^{82} = i^{80+2} = i^{4 \cdot 20+2}.$$

Perceba que  $n = 20$  e  $i^{82}$  pode ser escrita no formato  $i^{4n+2}$ . Portanto,

$$i^{82} = -1.$$

□

Além disso, podemos escrever o par ordenado  $(x, y)$  como sendo

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi = x + iy,$$

que é a forma mais conhecida dos números complexos.

Assim sendo,

•

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 x_2 + iy_1 iy_2 \\ &= x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) + i^2 y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) - y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

**Exemplo 4.2.4.** Sejam  $z_1 = 2 + 3i$  e  $z_2 = 5 - 2i$  números complexos. Queremos calcular a soma e a multiplicação entre eles.

•

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 2i) = (2 + 5) + i(3 - 2) = 7 + i.$$

•

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2 + 3i)(5 - 2i) \\ &= 2 \cdot 5 + 2 \cdot (-2i) + 3i \cdot 5 + 3i \cdot (-2i) \\ &= 10 - 4i + 15i - 6i^2 \\ &= 10 + 11i - 6 \cdot (-1) \\ &= 10 + 11i + 6 \\ &= 16 + 11i. \end{aligned}$$

## 4.2.1 Conjugado

**Definição 4.2.5.** Dado o número complexo  $z = x + iy$ , o *conjugado* de  $z$  é o número complexo  $\bar{z} = x - iy$ .

**Exemplo 4.2.6.** Dado  $z = 2 + 7i$ , calcule o seu conjugado. Note que basta trocar o sinal do segundo termo de  $z$ . Ou seja,

$$\bar{z} = 2 - 7i.$$

**Importante:** Note que apenas o termo que acompanha a unidade imaginária  $i$  troca de sinal!

Além disso, é fácil perceber que  $\overline{\bar{z}} = z$ , pois

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{x - iy} = x + iy = z.$$

Antes de darmos continuidade ao estudo do conjugado, precisamos entender o que é parte real e o que é a parte imaginária de um número complexo.

Dado um número complexo  $z = x + iy$  denotamos  $x$  como sendo a *parte real* de  $z$  e chamaremos  $y$  de *parte imaginária* de  $z$ . Escrevemos

$$x = \operatorname{Re}(z) \text{ e } y = \operatorname{Im}(z)$$

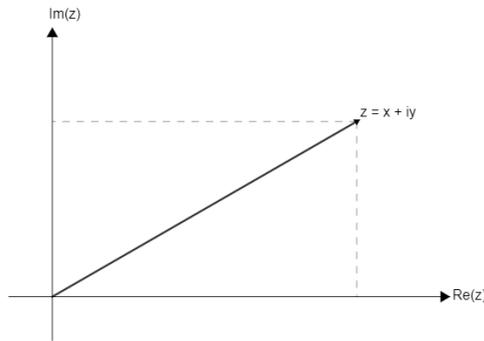


Figura 4.3: Representação gráfica de um número complexo.

Isto posto, se tomarmos  $z = x + iy$ , o conjugado  $\bar{z}$  deve satisfazer as seguintes propriedades:

1.  $z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$ ,
2.  $z - \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Im}(z) \cdot i$ ,
3.  $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$ .

Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 4.2.7.** Dados  $z = 3 + 2i$ , calcule  $z + \bar{z}$  e  $z - \bar{z}$ .

- $z + \bar{z} = 3 + 2i + 3 - 2i = 6 = 2 \cdot 3 = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$ ,

- $z - \bar{z} = 3 + 2i - (3 - 2i) = 3 + 2i - 3 + 2i = 4i = 2 \cdot \text{Im}(z) \cdot i.$

Deixaremos a demonstração dos itens 1 e 2 para o leitor interessado. Vejamos como se dá a demonstração do item 3:

**Demonstração:** Dado um número complexo  $z = x + iy$ , temos por hipótese que  $z = \bar{z}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} z = \bar{z} &\iff x + iy = x - iy \iff y = -y \iff \\ &\iff y = 0 \iff z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Além destas três propriedades básicas, se tomarmos os números complexos  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$ , eles obedecerão as seguintes regras de soma e produto com relação ao conjugado:

I.  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$

II.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$

**Demonstração I:**

Sabemos que  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ , portanto,

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

□

**Demonstração II:**

Sabemos que

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1). \end{aligned}$$

Isto posto,

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) - i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \\ &= (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.\end{aligned}$$

□

Na Figura 4.4 podemos analisar graficamente o que o conjugado significa. Note que  $\bar{z}$  é simétrico em relação ao eixo  $x$  com  $z$ .

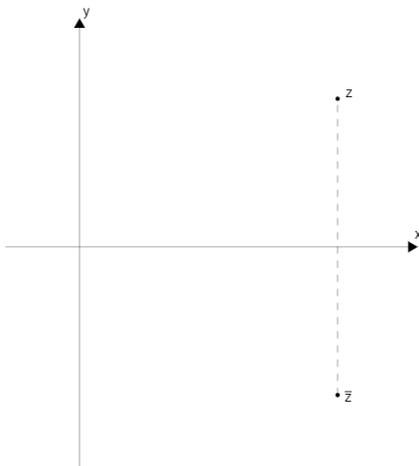


Figura 4.4: Conjugado de um número complexo.

### Mas para que o conjugado serve?

Você notou que quando falamos das operações com números complexos normalmente não comentamos sobre a divisão? Isso se deve ao fato de ser muito complicado realizar a divisão de números complexos sem esse carinha que acabamos de conhecer: o conjugado.

Vejam os exemplos de como realizar a divisão de um número complexo.

**Exemplo 4.2.8.** Dados os números complexos  $z_1 = 4 + 2i$  e  $z_2 = 3 + 5i$ , vamos calcular a divisão de  $z_1$  por  $z_2$ , ou seja,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 + 2i}{3 + 5i}$$

Como fazemos para resolver isso? Basta multiplicar pelo que chamamos de “um termo conveniente”, que no caso seria o conjugado de  $z_2$  sobre ele mesmo, como segue:

$$\frac{4 + 2i}{3 + 5i} \cdot \frac{3 - 5i}{3 - 5i} = \frac{22 - 14i}{34} = \frac{11}{17} - \frac{7i}{17}.$$

Percebeu agora a importância do conjugado de um número complexo?

## 4.2.2 Módulo

Vamos utilizar o conjugado que definimos anteriormente para obter o módulo de um número complexo  $z$ .

**Exemplo 4.2.9.** Vamos calcular  $z\bar{z}$ .

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\ &= x^2 - ixy + ixy - (iy)^2 \\ &= x^2 - i^2y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

Deste resultado, obtemos que o *módulo* de um número complexo  $z$  é dado por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

**Exemplo 4.2.10.** Vamos calcular o módulo de  $z_1 = \sqrt{5} + 2i$ ,  $z_2 = -2i$  e  $z_3 = -4 + 3i$ .

- $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3$ ,
- $|z_2| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{0 + 4} = \sqrt{4} = 2$ ,
- $|z_3| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ .

Tomando  $z = x + yi$ , o módulo de  $z$  satisfaz algumas propriedades:

- I.  $|z| \geq 0$ ,
- II.  $|z| = 0, \iff z = 0$ ,
- III.  $|z| = |\bar{z}|$ ,
- IV.  $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$ ,
- V.  $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$ .

Além disso, se  $z_1$  e  $z_2$  são dois números complexos quaisquer, vale que:

- I.  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ,
- II.  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ , desde que  $z_2 \neq 0$ ,
- III.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  (Desigualdade triangular).

**Exemplo 4.2.11.** Vamos aplicar as propriedades acima para  $z_1 = 3 + 4i$  e  $z_2 = 12 - 5i$ .

- $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
- $|z_2| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

- $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i) \cdot (12 - 5i) = 56 + 33i$
- $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{56^2 + 33^2} = \sqrt{3136 + 1089} = \sqrt{4225} = 65 = 5 \cdot 13 = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 4i}{12 - 5i} = \frac{(3 + 4i)(12 + 5i)}{(12 - 5i)(12 + 5i)} = \frac{16 + 63i}{144 + 25} = \frac{16 + 63i}{169}$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\frac{16^2 + 63^2}{169^2}} = \sqrt{\frac{4225}{169^2}} = \frac{65}{169} = \frac{5}{13} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (12 - 5i) = 15 - i$
- $|z_1 + z_2| = \sqrt{15^2 + (-1)^2} = \sqrt{226} \leq 18 = |z_1| + |z_2|$

### 4.2.3 Forma trigonométrica

Antes de começarmos a definir a forma trigonométrica de um número complexo, precisamos primeiro saber o que é uma função trigonométrica. É o que veremos a seguir.

#### O que são funções trigonométricas?

Para responder esta pergunta, analise o triângulo retângulo ABC da Figura 4.5 abaixo.

Chamaremos  $a$  de *hipotenusa* do triângulo ABC e  $b$  e  $c$  de *catetos*. Como estamos tratando de um triângulo retângulo, o ângulo  $\alpha$  mede  $90^\circ$ , ou seja,  $\alpha$  é um *ângulo reto*. Isto posto, o que podemos dizer sobre os ângulos  $\theta$  e  $\phi$ ?

É partindo deste questionamento que definimos as funções trigonométricas.

Fixemos o ângulo  $\theta$ . Note que  $b$  é o *cateto oposto* ao ângulo  $\theta$  e  $c$  é o *cateto adjacente* ao ângulo  $\theta$ . Desta forma, definimos as funções seno, cosseno e tangente como sendo:

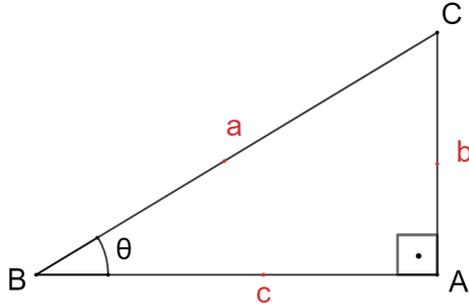


Figura 4.5: Triângulo retângulo.

- $\text{sen}(\theta) = \frac{b}{a}$
- $\text{cos}(\theta) = \frac{c}{a}$
- $\text{tg}(\theta) = \frac{b}{c}$

Note que,

$$\frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \text{tg}(\theta).$$

Mas como podemos obter o ângulo  $\theta$  a partir disso? Para isto, utilizamos a função arco-tangente, que nada mais é que o inverso da tangente que acabamos de definir. Ou seja,

$$\text{tg}(\theta) = \frac{b}{c} \implies \text{arctg}[\text{tg}(\theta)] = \text{arctg}\left(\frac{b}{c}\right) \implies \theta = \text{arctg}\left(\frac{b}{c}\right).$$

Com isso em mente, somos aptos a definir a forma trigonométrica de um número complexo.

Dada a representação de  $z$  no plano complexo, podemos identificar na Figura 4.6 que o módulo de  $z$  é  $\rho$  (segmento OP) e o ângulo que  $z$  forma com o eixo real é  $\theta$ . Chamaremos o ponto P de afixo de  $z$ .

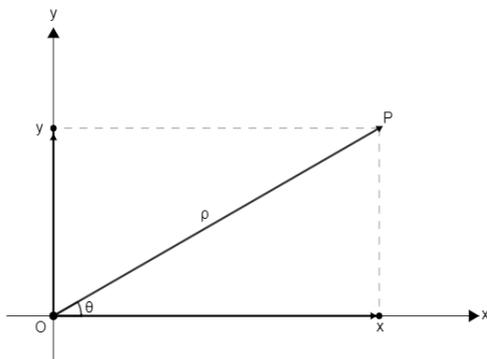


Figura 4.6: Forma polar de um número complexo.

Podemos utilizar as relações trigonométricas de *seno* e *coseno* para obter a seguinte relação:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \cdot \cos(\theta) \\ \sen(\theta) = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \cdot \sen(\theta) \end{cases}$$

Como sabemos, as funções *seno* e *coseno* têm periodicidade de  $2\pi$ , ou seja,  $(\cos(\theta), \sen(\theta)) = (\cos(\theta_0 + 2k\pi), \sen(\theta_0 + 2k\pi))$ , quando  $0 \leq \theta_0 < 2\pi$  e  $k \in \mathbb{Z}$ . Dessa forma, chamaremos  $\theta_0$  de *argumento principal de  $z$*  ou simplesmente de argumento de  $z$ .

Ainda podemos encontrar o argumento de  $z$  através da função inversa *arco-tangente*, que definimos anteriormente.

**Exemplo 4.2.12.** Vamos calcular o argumento principal de alguns números complexos  $z$ :

1.

$$z = \sqrt{3} + i \implies \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}(\theta) = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\implies \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$\implies \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

2.

$$z = -2i \implies \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{2} = 0 \\ \text{sen}(\theta) = \frac{y}{\rho} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$
$$\implies \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\implies \theta_0 = \frac{3\pi}{2}.$$

3.

$$z = -5 \implies \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = \frac{-5}{5} = -1 \\ \text{sen}(\theta) = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{5} = 0 \end{cases}$$
$$\implies \theta = \pi + 2k\pi$$
$$\implies \theta_0 = \pi.$$

4.

$$z = -1 - i \implies \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}(\theta) = \frac{y}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
$$\implies \theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$
$$\implies \theta_0 = \frac{5\pi}{4}.$$

Dado um número complexo  $z = x + yi$ , e as relações de *seno* e *co-seno* anteriormente estabelecidas, obtemos:

$$z = x + yi = \rho \cdot \cos(\theta) + \rho \cdot \operatorname{sen}(\theta)i = \rho(\cos(\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta))$$

Chamaremos  $z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$  de *forma trigonométrica* ou *polar* de  $z$ .

**Exemplo 4.2.13.** Vamos encontrar a forma polar do **Exemplo 1.2.12**:

$$1. z = \sqrt{3} + i \implies \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow z = 2 \cdot (\cos(\frac{\pi}{6}) + i \cdot \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})),$$

$$2. z = -2i \implies \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow z = 2 \cdot (\cos(\frac{3\pi}{2}) + i \cdot \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2})),$$

$$3. z = -5 \implies \begin{cases} \rho = 5 \\ \theta = \pi \end{cases} \Rightarrow z = 5 \cdot (\cos(\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(\pi)),$$

$$4. z = -1 - i \implies \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow z = \sqrt{2} \cdot [\cos(\frac{5\pi}{4}) + i \cdot \operatorname{sen}(\frac{5\pi}{4})].$$

A forma trigonométrica é mais prática que a forma algébrica para as operações de potenciação e radiciação em  $\mathbb{C}$ , conforme veremos a seguir.

#### 4.2.4 Potenciação e radiciação

Dados dois números complexos

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1),$$

$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2),$$

vamos calcular o módulo e o argumento do produto:

$$z = z_1 \cdot z_2 = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$$

Temos:

$$\begin{aligned} z &= z_1 \cdot z_2 \\ &= \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\theta_2) \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\theta_2) \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2) \\ &\quad + i(\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \text{sen}\theta_2)], \end{aligned}$$

portanto,

$$\rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) = (\rho_1 \cdot \rho_2) [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

e então:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 \cdot \rho_2 \\ \theta &= \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.2.14.** Considere  $z_1 = \sqrt{3} + i$  e  $z_2 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ .

$$z_1 \cdot z_2 = 6i \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2} \right).$$

Por outro lado, temos:

$$z_1 = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen} \frac{\pi}{6} \right) \text{ e } z_2 = 3 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen} \frac{\pi}{3} \right),$$

dessa forma

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 2 \cdot 3 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) \right] \\ &= 6 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Podemos estender este mesmo procedimento para o produto de  $n$  fatores aplicando a propriedade associativa da multiplicação:

$$z = z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta),$$

então:

$$z = (\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n) [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)],$$

portanto,

$$\rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) = (\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n) [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)],$$

e finalmente:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_n \\ \theta &= \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

## Primeira Fórmula de Moivre

**Teorema 4.2.15.** Dado o número complexo  $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$ , não nulo, e o número  $n \in \mathbb{Z}$ , temos:

$$z^n = \rho^n \cdot [\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)]$$

A demonstração deste teorema para  $n \in \mathbb{N}$  utiliza o princípio de indução finita, e a prova fica a cargo do leitor. Já para  $n \in \mathbb{Z}^-$  a demonstração segue:

Se  $n < 0$ , então  $n = -m$  com  $m \in \mathbb{N}$ ; portanto a  $m$  se aplica a fórmula:

$$\begin{aligned}
z^{-m} &= \frac{1}{z^m} = \frac{1}{\rho^m \cdot [\cos(m\theta) + i.\text{sen}(m\theta)]} \\
&= \frac{1}{\rho^m} \cdot \frac{\cos(m\theta) - i.\text{sen}(m\theta)}{[\cos(m\theta) + i.\text{sen}(m\theta)][\cos(m\theta) - i.\text{sen}(m\theta)]} \\
&= \frac{1}{\rho^m} \cdot \frac{\cos(m\theta) - i.\text{sen}(m\theta)}{\cos^2(m\theta) + \text{sen}^2(m\theta)} \\
&= \rho^{-m} \cdot [\cos(-m\theta) + i.\text{sen}(-m\theta)]
\end{aligned}$$

**Exemplo 4.2.16.** Vamos calcular as potências de  $z$ :

(a)  $\left(-\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$

$$\rho = |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \cos\theta = -\frac{1}{2} \text{ e } \text{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

forma trigonométrica de  $z$ :

$$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
z^{100} &= 1^{100} \cdot \left(\cos\frac{200\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{200\pi}{3}\right) \\
&= 1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

(b)  $(3 - 3i)^{-12}$

$$\rho = |z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}, \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \text{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

forma trigonométrica de  $z$ :

$$z = 3\sqrt{2} \cdot \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} z^{-12} &= \left( 3\sqrt{2} \right)^{-12} \cdot [\cos(-21\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(-21\pi)] \\ &= 3^{-12} \cdot 2^{-6} \cdot (\cos\pi + i \cdot \operatorname{sen}\pi) = -\frac{1}{3^{12} \cdot 2^6}. \end{aligned}$$

(c)  $\left( -\sqrt{3} - i \right)^{20}$

$$\rho = |z| = \sqrt{\left( -\sqrt{3} \right)^2 + (-1)^2} = 2, \quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$$

forma trigonométrica de  $z$ :

$$z = 2 \cdot \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} z^{20} &= 2^{20} \cdot \left( \cos \frac{140\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{140\pi}{6} \right) = 2^{20} \cdot \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= 2^{20} \cdot \left( -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^{19} \cdot (-1 - i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Dado um número complexo  $z$ , chama-se *raiz enésima* de  $z$ , e denota-se  $\sqrt[n]{z}$ , a um número complexo  $z_k$  tal que  $z_k^n = z$ .

$$\sqrt[n]{z} = z_k \iff z_k^n = z.$$

Logicamente,  $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$  ( $n \neq 0$ ), ou seja, tomando  $m = \frac{1}{n}$ , podemos utilizar a primeira fórmula de Moivre:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = z^m &= \rho^m \cdot [\cos(m\theta) + i.\text{sen}(m\theta)] \\
&= \rho^{\frac{1}{n}} \cdot [\cos(\frac{\theta}{n}) + i.\text{sen}(\frac{\theta}{n})] \\
&= \sqrt[n]{\rho} \cdot [\cos(\frac{\theta}{n}) + i.\text{sen}(\frac{\theta}{n})].
\end{aligned}$$

Note que nos números reais, por exemplo,  $\sqrt{4}$  possui dois valores, 2 e  $-2$ , pois ambos elevados ao quadrado resultam em 4. Vejamos se a fórmula encontrada acima é satisfeita para o complexo  $z = 4$ :

$z = 4 \implies \rho = 4$  e  $\theta = 0$ , logo:

$$\sqrt[2]{4} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} \cdot [\cos(\frac{0}{2}) + i.\text{sen}(\frac{0}{2})] = 2 \cdot (1 + i.0) = 2$$

É fácil notar que não encontramos o valor  $-2$  quando aplicamos  $\rho$  e  $\theta$  na fórmula encontrada, ou seja, há algum problema nesta fórmula.

Nos exemplos a seguir, fica a cargo do leitor calcular o valor da raiz através do Teorema 4.2.15.

**Exemplo 4.2.17.** Vejamos quais os valores para  $\sqrt[3]{1}$ :

- 1 é um valor de  $\sqrt[3]{1}$  pois  $1^3 = 1$ ,
- $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  é um valor de  $\sqrt[3]{1}$  pois  $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$ ,
- $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  é um valor de  $\sqrt[3]{1}$  pois  $\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$ .

Assim sendo,  $\sqrt[3]{1}$  admite 3 valores distintos.

**Exemplo 4.2.18.** Vejamos quais os valores para  $\sqrt{i}$ :

- $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$  é um valor de  $\sqrt{i}$  pois  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = i$ ,

- $\frac{-\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$  é um valor de  $\sqrt{i}$  pois  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = i$ .

Assim sendo,  $\sqrt{i}$  admite 2 valores distintos.

Mas afinal, quantas e quais são as raízes enésimas  $z^n$ ? Esta pergunta é respondida com o seguinte teorema:

## Segunda Fórmula de Moivre

**Teorema 4.2.19.** Dados o número complexo  $z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$  e o número natural  $n$  ( $n \geq 2$ ), então existem  $n$  raízes enésimas de  $z$  que são da forma:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \right],$$

em que  $\sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}^+$  e  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Demonstração:

Determinaremos todos os complexos  $z_k$  tais que  $\sqrt[n]{z} = z_k$ . Se  $z_k = r \cdot (\cos\omega + i \cdot \text{sen}\omega)$ , nossas incógnitas são  $r$  e  $\omega$ . Aplicaremos a definição de  $\sqrt[n]{z}$ :

$$\sqrt[n]{z} = z_k \iff z_k^n = z,$$

então:

$$r^n \cdot [\cos(n\omega) + i \cdot \text{sen}(n\omega)] = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta),$$

portanto é necessário:

$$(1) \quad r^n = \rho \implies r = \sqrt[n]{\rho} \quad (r \in \mathbb{R}^+).$$

$$(2) \quad \begin{cases} \cos(n\omega) = \cos(\theta) \\ \text{sen}(n\omega) = \text{sen}(\theta) \end{cases} \implies n\omega = \theta + 2k\pi \implies \omega = \frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}.$$

Supondo  $0 \leq \theta < 2\pi$ , vamos determinar os valores de  $k$  para os quais resultam valores de  $\omega$  compreendidos entre 0 e  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} k = 0 &\implies \omega = \frac{\theta}{n} \\ k = 1 &\implies \omega = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \\ k = 2 &\implies \omega = \frac{\theta}{n} + 2\frac{2\pi}{n} \\ &\vdots \\ k = n - 1 &\implies \omega = \frac{\theta}{n} + (n - 1)\frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Estes  $n$  valores de  $\omega$  não são congruentes por estarem todos no intervalo  $[0, 2\pi[$ ; portanto, dão origem a  $n$  valores distintos para  $z_k$ .

Consideremos agora o valor de  $\omega$  obtido para  $k = n$ :

$$k = n \implies \omega = \frac{\theta}{n} + n\frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

Este valor de  $\omega$  é dispensável por ser congruente ao valor obtido com  $k = 0$ .

Fato análogo ocorre para  $k = n + 1, n + 2, n + 3, \dots$  e  $k = -1, -2, -3, \dots$

Então para obtermos os valores de  $z_k$  é suficiente fazer  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

Conclusão: todo número complexo  $z$  não nulo admite  $n$  raízes enésimas distintas, as quais têm todas o mesmo módulo ( $\sqrt[n]{|z|}$ ) e argumentos principais formando uma progressão aritmética de primeiro termo  $\frac{\theta}{n}$  e razão  $\frac{2\pi}{n}$ .

**Exemplo 4.2.20.** Calcular as raízes quadradas de -1.

Temos que  $z = 1$ , então  $\rho = 1$  e  $\theta = \pi$ .

De acordo com o Teorema 4.2.19, temos:

$$z_k = \sqrt{1} \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right], k = 0, 1$$

$$k = 0 \implies z_0 = 1 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] = i$$

$$k = 1 \implies z_1 = 1 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} + \pi \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} + \pi \right) \right] = -i$$

**Exemplo 4.2.21.** Calcular as raízes cúbicas de 8.

Temos que  $z = 8$ ,  $\rho = 8$  e  $\theta = 0$ .

Pelo Teorema 4.2.19, vem:

$$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot \left[ \cos \left( k \frac{2\pi}{3} \right) + i \cdot \text{sen} \left( k \frac{2\pi}{3} \right) \right], k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \implies z_0 = 2 \cdot (\cos 0 + i \cdot \text{sen} 0) = 2$$

$$k = 1 \implies z_1 = 2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{2\pi}{3} \right) \right] = -1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2 \implies z_2 = 2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{4\pi}{3} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{4\pi}{3} \right) \right] = -1 - i\sqrt{3}$$

**Exemplo 4.2.22.** Calcular as raízes quartas de  $-8 + i \cdot 8\sqrt{3}$ .

Temos que  $z = -8 + i \cdot 8\sqrt{3}$ , então  $\rho = 16$  e  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ .

Aplicando o Teorema 4.2.19, temos:

$$\begin{aligned}
 z_k &= \sqrt[4]{16} \cdot \left[ \cos \left( \frac{2\pi/3}{4} + k \frac{2\pi}{4} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi/3}{4} + k \frac{2\pi}{4} \right) \right] \\
 &= 2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

$$k = 0 \implies z_0 = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1 \implies z_1 = 2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = -1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2 \implies z_2 = 2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + \pi \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} + \pi \right) \right] = -\sqrt{3} - i$$

$$k = 3 \implies z_3 = 2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} \right) \right] = 1 - i\sqrt{3}$$

Veremos na seção de aplicações que as enésimas raízes de um número complexo são interpretadas geometricamente como vértices de um polígono regular de  $n$  lados.

## 4.2.5 Exercícios

Vamos agora testar nossos conhecimentos sobre os números complexos!

**Exercício 4.2.23.** Dados os números complexos  $z_1 = 3 - 2i$ ,  $z_2 = 5 + 2i$  e  $z_3 = 7 + 4i$ , calcule o que é pedido.

a)  $z_1 + z_2$

b)  $z_2 \cdot z_3$

c)  $z_1 - z_3$

d)  $\frac{z_1}{z_2}$

e)  $\frac{z_1}{z_3}$

f)  $\frac{z_2}{z_3}$

**Exercício 4.2.24.** Calcule o conjugado e o módulo dos seguintes números complexos:

a)  $4 + i$ .

b)  $5 + 2i$

c)  $11 - 3i$

d)  $1 - 7i$

**Exercício 4.2.25.** Calcule  $i^{2022} + i^{2023}$ .

**Exercício 4.2.26.** Mostre que

- $z + \bar{z} = 2 \cdot \text{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2 \cdot \text{Im}(z) \cdot i$

**Exercício 4.2.27.** Determine o módulo e o argumento principal, coloque na forma trigonométrica e dê a representação gráfica dos números:

a) 4

e)  $-5$

b)  $1 + i\sqrt{3}$

f)  $-2i$

c)  $3i$

g)  $-5 - 5i$

d)  $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

g)  $2 - 2i$

**Exercício 4.2.28.** Coloque na forma algébrica os seguintes números:

a)  $3 \cdot (\cos\pi + i \cdot \text{sen}\pi)$

$$\text{b) } 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{c) } 4 \cdot \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} \right)$$

$$\text{d) } 5 \cdot \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right)$$

**Exercício 4.2.29.** Escreva o número complexo  $\frac{1}{1-i} - \frac{1}{i}$  na forma algébrica e na forma trigonométrica.

**Exercício 4.2.30.** Dados os números complexos

$$z_1 = \rho \cdot (\cos \phi + i \cdot \operatorname{sen} \phi) \text{ e}$$

$$z_2 = \rho \cdot (\operatorname{sen} \phi + i \cdot \cos \phi),$$

determine se  $z_1 - i \cdot z_2$  é real, imaginário ou imaginário puro.

**Exercício 4.2.31.** Calcule as seguintes potências:

$$\text{a) } \left( -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{100}$$

$$\text{d) } \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{2}{2} \right)^{17}$$

$$\text{b) } (3 - 3i)^{-12}$$

$$\text{e) } (-1 + i)^6$$

$$\text{c) } (\sqrt{3} - i)^{20}$$

$$\text{f) } (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^8$$

**Exercício 4.2.32.** Calcule:

$$\text{a) } \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^7 - \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^{10}$$

$$\text{b) } \frac{i}{\left( -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^6}$$

**Exercício 4.2.33.** Calcule as seguintes raízes:

a)  $\sqrt[4]{1}$

e)  $\sqrt[6]{-729}$

b)  $\sqrt[3]{1+i}$

f)  $\sqrt[3]{-64}$

c)  $\sqrt{-16i}$

g)  $\sqrt{\sqrt[3]{1}}$

d)  $\sqrt{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$

h)  $\frac{1}{\sqrt{-4i}}$

**Exercício 4.2.34.** Sendo  $\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$  uma das raízes **quartas** de um número  $z$ , determine as raízes **quadradas** de  $z$ .

**Exercício 4.2.35.** Uma das raízes de ordem 6 de um número complexo é  $-2$ . Determine as outras raízes de ordem 6 desse número.

# Capítulo 5

## Aplicações Para Números Complexos

### 5.1 Polígonos regulares

Vimos que  $\sqrt[n]{z}$  pode assumir  $n$  valores distintos porém todos com o mesmo módulo. Assim, os afixos das  $n$  raízes enésimas de  $z$  são pontos da mesma circunferência, com centro na origem no plano complexo (Argand-Gauss) e raio  $\sqrt[n]{|z|}$ .

Vimos também que os argumentos principais de  $\sqrt[n]{z}$  formam uma progressão aritmética que começa com  $\frac{\theta}{n}$  e tem razão  $\frac{2\pi}{n}$ . Assim, os afixos das  $n$  raízes enésimas de  $z$  dividem a circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $r = \sqrt[n]{|z|}$  em  $n$  partes congruentes, isto é:

se  $n = 2$  são pontos diametralmente opostos

ou

se  $n \geq 3$  são vértices de um polígono regular inscrito na circunferência citada.

Reexaminando os exemplos **1.2.20**, **1.2.21** e **1.2.22**, temos:

**(1.2.20)** raízes quadradas de  $-1$

$$z_k = 1 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right], k = 0, 1$$

Os afixos de  $\sqrt{-1}$  dividem a circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio 1 em duas partes congruentes.

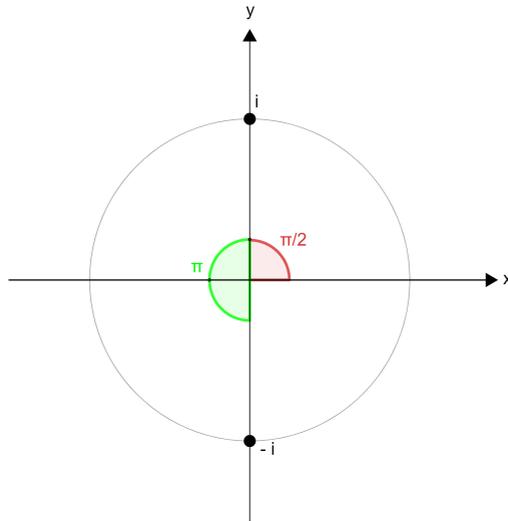


Figura 5.1: Afixos de  $\sqrt{-1}$ .

**(1.2.21)** raízes cúbicas de 8

$$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot \left[ \cos \left( k \frac{2\pi}{3} \right) + i \cdot \text{sen} \left( k \frac{2\pi}{3} \right) \right], k = 0, 1, 2$$

Os afixos de  $\sqrt[3]{8}$  são vértices do triângulo inscrito na circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio 2 sendo  $(2, 0)$  um dos vértices, como segue a Figura 5.2.

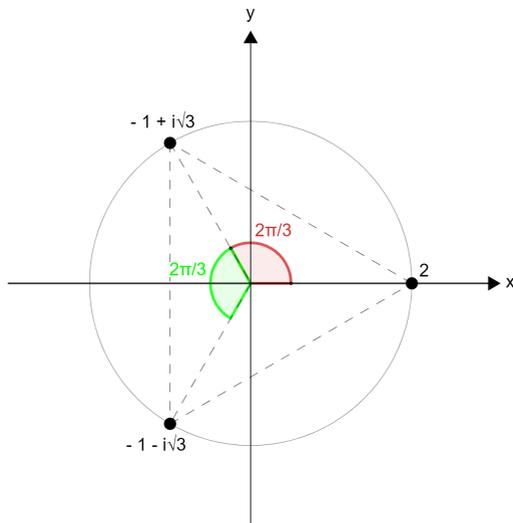


Figura 5.2: Afixos de  $\sqrt[3]{8}$ .

(1.2.22) raízes quartas de  $-8 + i.8\sqrt{3}$

$$z_k = 2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2} \right) \right], k = 0, 1, 2, 3$$

Os afixos de  $\sqrt[4]{-8 + i.8\sqrt{3}}$  são vértices do quadrado inscrito na circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio 2, sendo  $(\sqrt{3}, 1)$  um dos vértices, como segue a Figura 5.3.

Vamos agora ver alguns exemplos desde o cálculo do módulo de um número complexo  $z$  e de seu argumento principal até as suas enésimas raízes com o objetivo de encontrar o polígono associado às suas raízes.

**Exemplo 5.1.1.** Vamos calcular as raízes sextas de  $z = 64$ .

Em primeiro lugar vamos encontrar o módulo e o argumento principal de  $z$ :

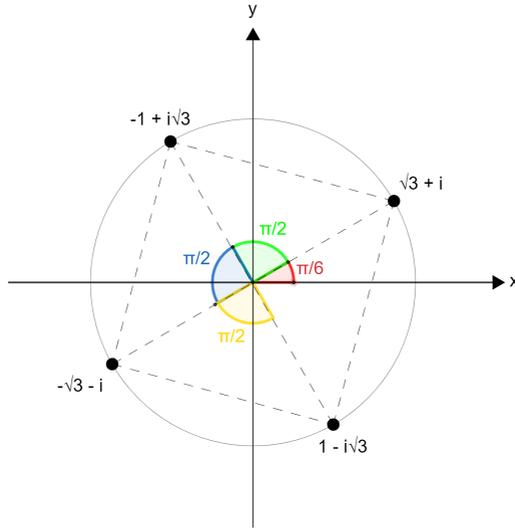


Figura 5.3: Afixos de  $\sqrt[4]{-8 + i.8\sqrt{3}}$ .

$$\rho = \sqrt{64^2 + 0^2} = \sqrt{64^2} = 64$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = \frac{64}{64} = 1 \\ \text{sen}(\theta) = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{64} = 0 \end{cases} \implies \theta = 0 + 2k\pi \implies \theta_0 = 0$$

forma polar de  $z$ :

$$z = 64 \cdot (\cos 0 + i \cdot \text{sen} 0)$$

Sabemos que

$$\sqrt[n]{z} = z_k \iff z_k^n = z$$

e, pela segunda fórmula de Moivre:

$$\begin{aligned}
z_k &= \sqrt[6]{64} \cdot \left[ \cos \left( 0 + \frac{2k\pi}{6} \right) + i \cdot \text{sen} \left( 0 + \frac{2k\pi}{6} \right) \right] \\
&= 2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{k\pi}{3} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{k\pi}{3} \right) \right], k \in [0, 5]
\end{aligned}$$

Assim,

$$k = 0 \implies z_0 = 2 \cdot (\cos 0 + i \cdot \text{sen} 0) = 2$$

$$k = 1 \implies z_1 = 2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{3} \right) \right] = 1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2 \implies z_2 = 2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{2\pi}{3} \right) \right] = -1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 3 \implies z_3 = 2 \cdot (\cos \pi + i \cdot \text{sen} \pi) = -2$$

$$k = 4 \implies z_4 = 2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{4\pi}{3} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{4\pi}{3} \right) \right] = -1 - i\sqrt{3}$$

$$k = 5 \implies z_5 = 2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{5\pi}{3} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{5\pi}{3} \right) \right] = 1 - i\sqrt{3}$$

Note que para cada  $k_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$ ,  $|z_i| = 2$ , ou seja, os afixos de  $z_i$  pertencem a uma circunferência de raio 2 cujos argumentos formam uma progressão aritmética de razão  $\frac{\pi}{3}$ , como segue a Figura 5.4.

Com isso, podemos observar que as raízes sextas de 64 são vértices de um hexágono regular.

**Exemplo 5.1.2.** Vamos calcular as raízes oitavas de  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ .

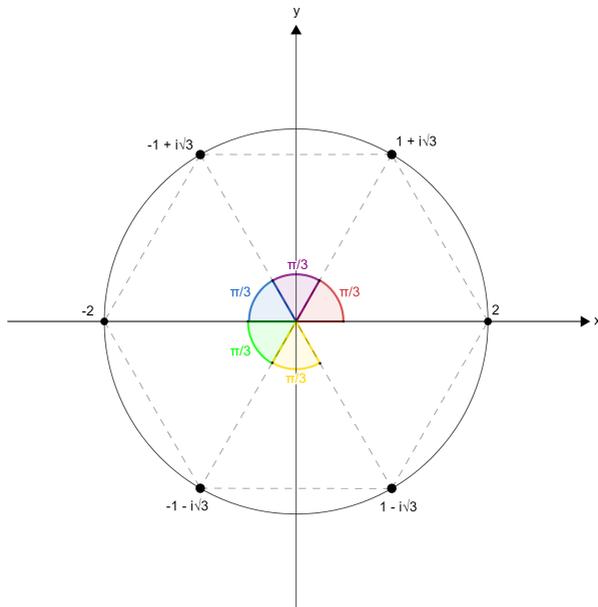


Figura 5.4: Afixos de  $\sqrt[6]{64}$ .

Em primeiro lugar vamos encontrar o módulo e o argumento principal de  $z$ :

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}(\theta) = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \implies \theta_0 = \frac{\pi}{6}$$

forma polar de  $z$ :

$$z = 1 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen} \frac{\pi}{6} \right)$$

Sabemos que

$$\sqrt[n]{z} = z_k \iff z_k^n = z$$

e, pela segunda fórmula de Moivre:

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[8]{1} \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{8} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{8} \right) \right] \\ &= 1 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4} \right) \right], k \in [0, 7] \end{aligned}$$

Assim,

$$k = 0 \implies z_0 = 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen} \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$k = 1 \implies z_1 = 1 \cdot [\cos(\frac{5\pi}{12}) + i \cdot \text{sen}(\frac{5\pi}{12})] = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$k = 2 \implies z_2 = 1 \cdot [\cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \text{sen}(\frac{2\pi}{3})] = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 3 \implies z_3 = 1 \cdot [\cos(\frac{11\pi}{12}) + i \cdot \text{sen}(\frac{11\pi}{12})] = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$k = 4 \implies z_4 = 1 \cdot (\cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen} \frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$$

$$k = 5 \implies z_5 = 1 \cdot [\cos(\frac{17\pi}{12}) + i \cdot \text{sen}(\frac{17\pi}{12})] = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} - i \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$k = 6 \implies z_6 = 1 \cdot [\cos(\frac{5\pi}{3}) + i \cdot \text{sen}(\frac{5\pi}{3})] = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 7 \implies z_7 = 1 \cdot [\cos(\frac{23\pi}{12}) + i \cdot \text{sen}(\frac{23\pi}{12})] = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Note que para cada  $k_i$ ,  $i = 0, \dots, 7$ ,  $|z_i| = 1$ , ou seja, os afixos de  $z_i$  pertencem a uma circunferência de raio 1 cujos argumentos formam uma progressão aritmética com termo inicial sendo  $\frac{\pi}{6}$  e razão  $\frac{\pi}{4}$ , como segue a Figura 5.5.

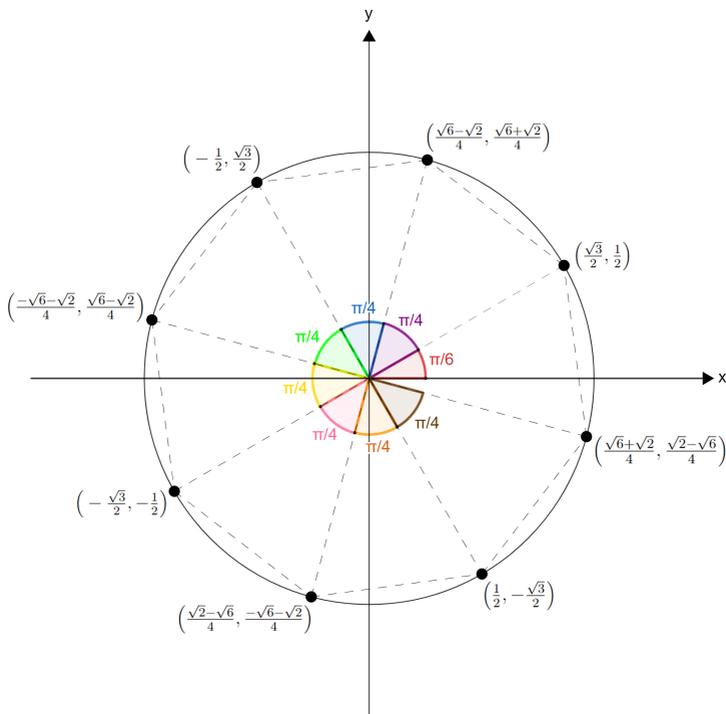


Figura 5.5: Afixos de  $\sqrt[8]{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}$ .

Com isso, podemos observar que os vértices do octágono regular encontrado são obtidos através das raízes oitavas de  $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ .

## 5.2 Euler

A exponencial de um número complexo  $z$  é dada pela expressão

$$e^z = \exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

No caso de imaginários puros, onde  $z = iy$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 e^{iy} &= 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots \\
 &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \dots \\
 &= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots \\
 &\quad + iy - i\frac{y^3}{3!} + i\frac{y^5}{5!} - i\frac{y^7}{7!} + \dots \\
 &= \left( 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots \right) \\
 &\quad + i \left( y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

No caso dos números reais, é fato que as correspondentes somas em parênteses são equivalentes às funções  $\cos(y)$  e  $\sen(y)$  usando uma expansão por derivadas de Taylor (que é um longo assunto que não vamos adentrar). Isso quer dizer que

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sen(y).$$

Dessa forma, temos a seguinte definição: Dado um número complexo  $z = x + yi$ , a exponencial de  $z$  vale

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sen(y)).$$

No caso em que  $z = i\pi$ , nós obtemos

$$e^{i\pi} = e^0(\sen(\pi) + i\cos(\pi)) = -1.$$

ou seja,  $e^{i\pi} + 1 = 0$ .

Algebricamente, a explicação é essa. Mas vamos olhar agora geometricamente.

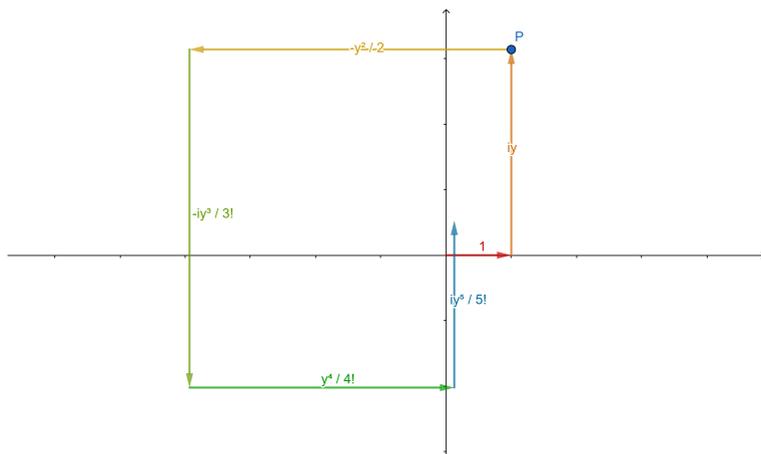
Note que cada termo da expressão

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \dots$$

é um número complexo, ou seja, um ponto no plano. Isso também significa que são vetores. Ou seja, temos uma soma infinita de vetores.

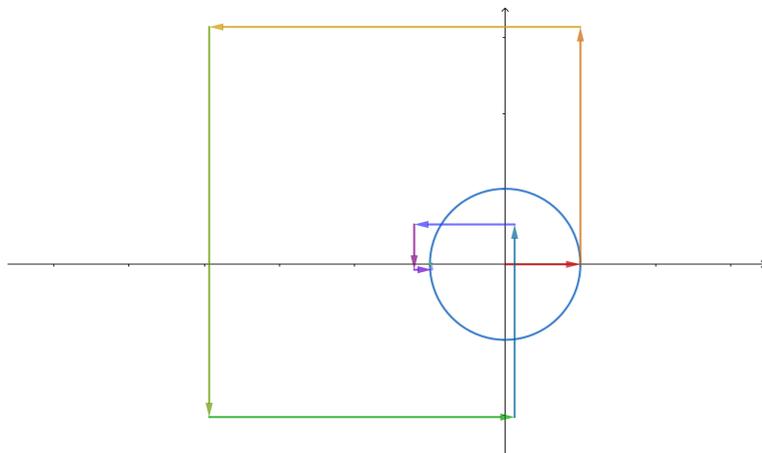
Vamos ver os dois primeiros termos,  $1$  e  $iy$ . Colocando os respectivos vetores no plano Argand-Gauss, posicionando  $iy$  na ponta de  $1$  obtemos o resultado da soma  $1 + iy$ : a ponta do último vetor, que é o ponto  $P$ .

Somando até o 6º termo, nós temos



Note que os vetores começaram a diminuir de tamanho em um determinado momento. Somando mais alguns termos, podemos notar que a soma está parando em um determinado lugar...

Acontece que o círculo trigonométrico é descrito pela expressão  $\text{sen}(x) + i\text{cos}(x)$ , para algum  $x \in \mathbb{R}$ . Dessa forma, fica claro que um dos pontos desse círculo é  $\text{sen}(y) + i\text{cos}(y)$ , ou seja,  $e^{iy} = \text{sen}(y) + i\text{cos}(y)$ .



Essa construção feita vale para qualquer número  $y$  real, e no caso  $y = \pi$ , a soma de vetores cai em cima do ponto  $(-1, 0)$ , por isso  $e^{i\pi} = -1$ .

## 5.2.1 Exercícios

**Exercício 5.2.1.** Escreva os seguintes números complexos na forma retangular, e represente-os no plano Argand-Gauss, identificando as partes real e imaginária, argumento e módulo.

- $e^{5\pi i}$
- $e^{2+3\pi i}$
- $4e^{2\pi i}$
- $2e^{1+\frac{\pi}{2}i}e^{-2}$

**Exercício 5.2.2.** Usando a exponencial complexa, prove a fórmula de De Moivre:

$$(\cos(yi) + i\operatorname{sen}(yi))^n = \cos(nyi) + i\operatorname{sen}(nyi)$$

**Exercício 5.2.3.** Calcule o valor de

$$\frac{\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\operatorname{sen}(-\frac{3\pi}{4})}{(\cos(\frac{11\pi}{4}) + i\operatorname{sen}(\frac{11\pi}{4}))^5}$$

**Exercício 5.2.4.** Prove as seguintes identidades,  $\theta \in \mathbb{R}$ :

a)  $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\operatorname{sen}(\theta)$ .

b)  $|e^{i\theta}| = 1$ .

c)  $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ , onde  $\operatorname{Re}(z)$  é a parte real de  $z$ .

d)  $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ .

e)  $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ .

**Exercício 5.2.5.** Se pensarmos no plano complexo em cima de um relógio, as horas podem ser expressadas como números complexos de módulo 1. Por exemplo, o ponteiro das horas que marca 3 horas pode ser expressado como  $e^{i0} = 1$ , e 6 horas pode ser expressado como  $e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -i$ . Sabendo disso, expresse em números complexos o ponteiro das horas que marca 12h45.

Obs.: Lembre-se que o ponteiro das horas se move ao longo do período de 1 hora, e não faz um pulo imediato para a próxima hora.

# Referências

- [1] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. **A Matemática do Ensino Médio**: Volume 2. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.
- [2] STEWART, Ian. **17 Equações que Mudaram o Mundo**. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.
- [3] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria espacial. 4. ed. São Paulo: Atual, 1992.
- [4] GONÇALVES JÚNIOR, Oscar. **Matemática por Assunto**: geometria plana e espacial. 6. ed. São Paulo: Scipione, 1998.
- [5] RICHESON, David S.. **Euler's Gem**: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- [6] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Complexos, Polinômios, Equações, Volume 6, 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- [7] OCHI, Masashi. **Guia Mangá - Números Complexos**. 2010.