I

BRINCANDO DE

Matemático

Júnior

O Museu Mágico de Malba Tahan

2021

DMAT - UFPR

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PET
MATEMÁTICA
UFPR

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor:	Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam
Estudantes:	Amanda Maciel Oliveira Beatriz Borba Guergolet Bruno Mielke Schwartsburd Dyckson Ternoski Gabriel Alves de Lima Gabrieli Kmiecik Gabrielly Larsen Luana Bankersen Marcel Thadeu de Abreu e Souza Mateus Balotin Matheus Daniel Galvão de Melo Matheus Kinceski Pires Monique Baptista Fragozo Nil Vinícius Gonçalves de Carvalho Priscilla Pereira de Souza Thais Spannenberg Machado dos Passos
Site:	www.petmatematica.ufpr.br
Facebook:	www.facebook.com/PetMatUFPR
Instagram:	instagram.com/petmatematicaufpr/
E-mail:	petmatufpr@gmail.com
Telefone:	(41) 3361-3672
Data do Evento:	19 a 21 de julho de 2021

Curitiba, julho de 2021.

Apresentação

Prezado Estudante!

É uma grande alegria tê-lo conosco na 1ª edição do Brincando de Matemático Junior! Tenho absoluta certeza de que você irá aprender muito nestes dias!

O Brincando de Matemático é uma atividade de extensão gratuita da UFPR planejada, organizada e conduzida pelos alunos do PET - Matemática com o intuito de oferecer aos estudantes de Ensino Fundamental e Médio a oportunidade de estudar e aprender sobre um tema matemático relevante apresentado de forma acessível, lúdica e interessante. Além de oferecer ao estudante uma excelente oportunidade de interagir com os estudantes do Curso de Matemática da UFPR, o Brincando também funciona como ponte entre a Universidade e a Escola Básica, reafirmando o compromisso de nossa Universidade em oferecer conhecimento de primeira qualidade de forma gratuita aos estudantes brasileiros.

Esta edição, idealizada de forma totalmente remota por conta da pandemia, constitui-se um marco nas atividades do PET - Matemática. A preparação deste evento neste novo formato trouxe um significativo aprendizado para toda a equipe, reafirmando uma das premissas do PET (Programa de Educação Tutorial), que é a de oferecer aos estudantes a possibilidade de transcender o aprendizado meramente formal e permitir ao aluno que este seja protagonista em seu próprio aprendizado. Neste ano, teremos duas frentes: uma para os alunos de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental (O Brincando Junior) e outra para os estudantes das séries seguintes.

O tema do Brincando Junior deste ano é baseado na obra do matemático brasileiro Julio Cesar de Mello e Souza, mais conhecido como Malba Tahan, e tem despertado interesse em gerações de brasileiros há várias décadas. Não tenho dúvidas de que vai despertar sua curiosidade para aprender mais Matemática também!

Gostaria de agradecer, de maneira especial, a cada um dos estudantes do PET - Matemática pela dedicação, zelo e foco com que realizam todas as atividades e também à Administração da UFPR por sempre apoiar esta iniciativa.

Prof. José Carlos Eidam
Tutor do PET-Matemática
Departamento de Matemática - UFPR
Julho de 2021

Sumário

Capítulo 1

Revisão de conceitos do 1º Dia

Nossa jornada pelo mundo do Homem que Calculava irá abordar diversos problemas divertidos!

Entretanto, antes de iniciar a nossa aventura, precisaremos de algumas ferramentas matemáticas.

1.1 Operações Básicas

Dando início à nossa revisão, iremos relembrar as quatro operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. E depois, vamos conversar um pouquinho sobre as expressões numéricas!

Adição e Subtração

Vamos começar com duas operações bem simples, as quais nós aprendemos logo no comecinho da nossa vida escolar: a adição e a subtração.

Exemplo: Aladim é um famoso colecionador de lâmpadas. Ele começou sua coleção com 1 lâmpada, depois **adicionou** mais 1 lâmpada... e assim por diante. No final, Aladim decidiu **somar** quantas lâmpadas ele adquiriu em sua aventura de colecionador.

De modo visual, Aladim está fazendo o seguinte:

Ou seja,

$$1 + 1 + 1 + 1 + ... + 1 =?$$

Desta forma, podemos definir a operação de adição, como segue:

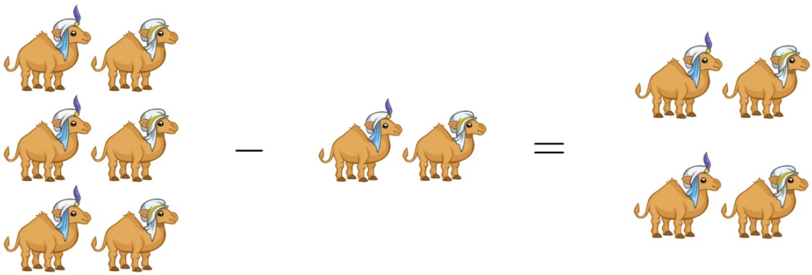
Definição 1.1.1. Sendo a, b e c números quaisquer, a operação **adição** é definida da seguinte forma: $a + b = c$.

Para definirmos a operação de subtração, iremos visitar um evento que ocorreu com um pobre lenhador árabe, há muito tempo atrás.

Ali Babá tinha 6 camelos, uma quantia que pode ser considerada exorbitante para um homem como ele. Apesar do pouco dinheiro, o lenhador tentava manter todos os camelos bem alimentados. Certa vez, 2 dos 6 camelos foram roubados.

Analisando de forma matemática, temos que o número de camelos de Ali Babá **diminuiu**, 2 camelos foram **subtraídos** de um total de 6.

Neste caso, temos



Ou seja,

$$6 - 2 = 4.$$

Logo, Ali Babá ficou com 4 camelos.

Conhecendo a história dos camelos de Ali Babá, podemos definir a operação de subtração como:

Definição 1.1.2. Sendo a, b e d números quaisquer, a operação **subtração** é definida da seguinte forma: $a - b = d$.

Multiplicação e Divisão

Avançando na nossa caminhada matemática, temos as operações de multiplicação e divisão, que também são nossas velhas conhecidas de empreitada!

Certa vez, o extraordinário calculista Beremiz Samir estava estudando sobre a operação de multiplicação. Em meio aos seus estudos, o homem que calculava percebeu que é possível enxergar a multiplicação como sendo a soma de um número por ele mesmo n vezes.

Vejamos um exemplo prático da descoberta de Beremiz:

$$2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 3 + 3 = 6.$$

Note que na primeira soma o número 2 aparece 3 vezes, e na segunda soma o número 3 apareceu 2 vezes.

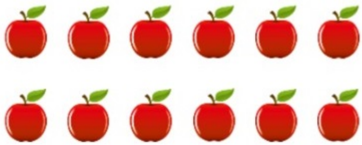
Logo, podemos definir a operação de multiplicação da seguinte forma:

Definição 1.1.3. Sendo a e b números quaisquer, a operação **multiplicação** é definida da seguinte forma:

$$a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ vezes.}} = \underbrace{b + b + \cdots + b}_{a \text{ vezes.}}.$$

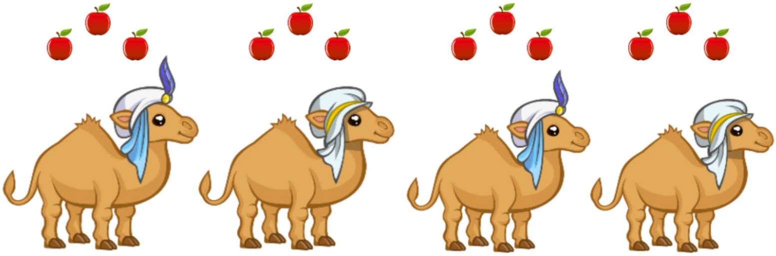
Definida a multiplicação, vamos agora voltar para Ali Babá. Chateado por ter perdido 2 de seus camelos, o pobre lenhador decidiu se arriscar na colheita de maçãs.

Depois de muito colher, Ali Babá chegou ao total de 12 maçãs em seu cesto.



Muito feliz com esta conquista, o lenhador corre para dividir as maçãs entre seus 4 camelos restantes. Já próximo de seus camelos, Ali Babá percebe um problema: como dividir igualmente 12 maçãs para 4 camelos?

Sabemos que a resposta para esta pergunta é simples: basta dar 3 maçãs para cada um e você terá uma divisão perfeita.



Matematicamente falando, expressamos esta divisão do seguinte modo:

$$\frac{12}{4} = 3.$$

Portanto, a definição desta operação segue abaixo.

Definição 1.1.4. Sendo a e b números quaisquer, a operação **divisão** é definida da seguinte forma: $\frac{a}{b} = e$, onde $e \times b = a$.

Ufa! Terminamos a nossa revisão de operações básicas!

No próximo tópico iremos estudar a aplicação destas operações em uma expressão numérica.

1.2 Expressões Numéricas

Como veremos em breve, o Problema dos Quatro Quatros consiste em escrevermos números de 0 a 100 utilizando uma expressão numérica com apenas quatro algarismos 4.

Mas você sabe o que é uma expressão numérica?

Podemos dizer que uma **expressão numérica** nada mais é que um conjunto de números sujeitos à operações matemáticas em uma determinada ordem.

Falando assim parece difícil, mas é bem de boa e muito provavelmente você já mexeu com algo parecido!

Bem, existem certas regrinhas a serem seguidas para que possamos resolver uma expressão numérica. Então vamos relembrá-las a seguir!

Ordem dos Símbolos e das Operações

Você já deve ter visto pelo menos uma vez na vida a tal da "ordem das operações". Iremos relembrá-las na tabelinha abaixo.

Ordem dos Símbolos
Parênteses ( )
Colchetes [ ]
Chaves { }

Ordem das Operações
Potenciação e Radiciação
Multiplicação e Divisão
Adição e Subtração

Exemplo 1.2.1. Vejamos alguns exemplos de expressões numéricas.

- $5 + [12 \times (4 - 1) + 7] - 1.$
- $15 \times \{8 + [3 \times (9 - 5)]\}.$
- $4 + 5 \times 2 - 12/6 + 4^2 - 10.$

É importante ressaltar que se duas operações do mesmo grau de prioridade estiverem juntas, fazemos a resolução na ordem em que as operações aparecem.

Perceba que apareceram duas operações novas na nossa tabelinha, e também nos exemplos: a potenciação e a radiciação. Ambas serão abordadas na próxima seção.

1.3 Potenciação e Radiciação

Para resolver nosso problema também precisaremos ver conteúdos novos, como a Potenciação e a Radiciação. Mas não se preocupe, é molezinha!

1.3.1 Potenciação

Como já sabemos, existe uma operação chamada "multiplicação", que já foi relembrada na seção 1.2.1. Para entender o que é Potenciação, é importante entender bem a multiplicação!

A Potenciação é nada mais que uma multiplicação do mesmo número várias vezes. Por exemplo, se tivermos a multiplicação a seguir:

$$10 \times 10 = 100.$$

também poderíamos escrevê-la da seguinte forma:

$$10^2 = 100.$$

isto é, escrever 10×10 é o mesmo que escrever 10^2. Ok, mas por que utilizamos isso se é uma simples multiplicação? Lembre-se que a multiplicação pode ser feita com mais de dois números, ou seja, podemos ter uma multiplicação como a seguinte:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000000000.$$

Um pouco chato ter que escrever essa multiplicação, não é? Graças à existência da potenciação, podemos escrevê-la simplesmente como:

$$10^{10} = 10000000000.$$

É claro que não existem somente potências de base 10. Podemos ter potências de qualquer número! Desse modo, vamos definir, de forma simples, o que é a potenciação:

Definição 1.3.1. Sendo a e b números quaisquer, a operação **potenciação** é definida da seguinte forma:

$$a^b = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{b \text{ vezes.}}.$$

Exemplo 1.3.2. Calcule o valor de 2^5.

Segundo a definição de potenciação, sabemos que

$$2^5 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{5 \text{ vezes}}.$$

Desse modo, basta fazermos a multiplicação: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Podemos dar nomes aos números com os quais estamos trabalhando. Veja abaixo:

$$\begin{array}{ccc} & & \textit{Expoente} \\ & & \nearrow \\ \textit{Base} \longleftarrow & \mathbf{a}^{\mathbf{b}} = \mathbf{c} & \\ & & \searrow \\ & & \textit{Potência} \end{array}$$

Assim, no exemplo anterior, teríamos que 2 seria a **base**, 5 seria o **expoente** e 32 seria a **potência**.

Observação: Quando temos uma base elevada ao expoente 2, também podemos dizer "base *ao quadrado*".
Exemplo: 1^2 - lê-se "um elevado a dois" ou "um ao quadrado".

Da mesma forma acontece com o expoente 3, podemos dizer "base *ao cubo*".
Exemplo: 2^3 - lê-se "dois elevado a três" ou "dois ao cubo".

Quando calculamos potências, existem algumas coisas, também chamadas de *propriedades*, que facilitam os cálculos. Considere a, b, m e n números naturais (positivos) diferentes de 0:

Propriedades da Potenciação :

- Todo número elevado a 1 tem como resultado ele mesmo: $a^1 = a$.
  Exemplo: $5^1 = 5$.

- Todo número natural não nulo elevado a 0 tem como resultado **1**: $a^0 = 1$.
  Exemplo: $90^0 = 1$.

- Todo número negativo elevado a um expoente par tem resultado positivo: $(-a)^{2b} = a^{2b}$.
  Exemplo: $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = -(-9) = 9 = 3^2$.

- Todo número negativo elevado a um expoente ímpar tem resultado negativo: $(-a)^{2b+1} = -(a^{2b+1})$.
  Exemplo: $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -(-16) \times (-4) = 16 \times (-4) = -64 = -(4^3)$.

Note que, nos últimos dois itens acima, as potências estão escritas da forma "$2b$" e "$2b+1$" somente para representar, respectivamente, um número par e um ímpar, e não uma multiplicação ou soma.

Exemplo 1.3.3. Calcule:

- $(-5)^4$
  Pelas propriedades vistas acima, sabemos que, como temos uma base negativa e um expoente par, então nosso resultado será um número positivo:

  $$(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$$

  Mas note que $5^4 = 625$ também. Assim, $(-5)^4 = 5^4 = 625$.

- $(-5)^5$
  Ao contrário do anterior, esse resultado será negativo, já que temos uma base negativa e um expoente ímpar:

  $$(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5) = 25\times25\times(-5) = -3125$$

  Mas note que $5^5 = 3125$, ou seja, temos mudança apenas no sinal. Assim, $(-5)^5 = -(5^5) = -3125$.

Veja que, no exemplo acima quando calculamos $(-5)^5$, o que fizemos na verdade foi multiplicar um resultado que já conhecíamos, o $(-5)^4$, por (-5). Ou seja, $(-5)^5 = (-5)^4 \times (-5)$. Mas não somente isso, também podemos escrever $(-5)^5$ como $(-5)^3 \times (-5)^2$. Faça o teste! Teremos o mesmo resultado. Veremos isso na próxima propriedade.

Mais propriedades da Potenciação :

1. **Produto de potências de mesma base:** $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
   Exemplo: $2^1 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8 = 2^3 = 2^{1+2}$.

2. **Divisão de potências de mesma base:** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Exemplo: $\dfrac{10^7}{10^5} = \dfrac{10000000}{100000} = 100 = 10^2 = 10^{7-5}$.

3. **Potência de potência:** $(a^m)^n = a^{m\times n}$.
   Exemplo: $(5^2)^2 = (25)^2 = 625 = 5^4 = 5^{2\times 2}$.

4. **Distributiva em relação à multiplicação:** $a^n \times b^n \times c^n = (a\times b\times c)^n$.
   Exemplo: $2^2 \times 5^2 \times 10^2 = 4 \times 25 \times 100 = 10000 = (100)^2 = (2\times 5\times 10)^2$.

5. **Distributiva em relação à divisão:** $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.
   Exemplo: $\dfrac{6^2}{2^2} = \dfrac{36}{4} = 9 = 3^2 = \left(\dfrac{6}{2}\right)^2$.

Por fim, temos uma última definição importante. Caso tivermos um **expoente negativo**:

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

<u>Mas e o 0^0?</u>
Uma curiosidade é que não podemos afirmar que $0^0 = 1$. Ele é *indeterminação* matemática, o que quer dizer que não conseguimos determinar seu resultado. Uma outra indeterminação muito famosa é o $\frac{0}{0}$. Vamos tentar calcular $\frac{0}{0}$ para mostrar que é uma indeterminação:

Veja que, por um lado, podemos considerar que um número dividido por ele mesmo é igual a 1, assim como $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{1270}{1270} =$

$1, \ldots$ Desse modo, poderíamos chegar à conclusão de que $\frac{0}{0} = 1$.

No entanto, por outro lado, sabemos que 0 dividido por qualquer número resultará em 0, assim, poderíamos chegar à conclusão de que $\frac{0}{0} = 0$.

Mas qual o resultado? 0 ou 1? Ou será ainda outro número? Não há como saber, e é por isso que $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação.

Agora, voltando ao 0^0, veja o seguinte:

$$0^0 = 0^{1+(-1)} = 0^1 \times 0^{-1} = \frac{0}{0} = \text{indeterminação}$$

Temos novamente o $\frac{0}{0}$, o qual já sabemos que é uma indeterminação. Logo 0^0 também é uma indeterminação.

É muito importante entender essas propriedades, mas não se preocupe em decorá-las. Caso você se esqueça de alguma, relembre-a e faça alguns exercícios envolvendo essa propriedade, para fixá-la em sua cabeça! Assim, com o tempo, você lembrará de todas.

1.3.2 Radiciação

Se você parar para pensar, para toda (ou quase toda) ação, existe uma ação *inversa*, como por exemplo "fechar" e "abrir", "subir" e "descer", etc. Assim como na vida, na matemática também existem operações inversas.

Operação inversa:

A ideia da operação inversa é "desfazer" o que uma outra operação fez. Por exemplo, se estamos tratando da operação *soma*, o inverso dela é a *subtração*, afinal, se queremos desfazer uma adição, devemos retirar o que foi adicionado.

Veja um exemplo: Inicialmente um aventureiro tem 5 moedas na carteira, porém, enquanto caminha, encontra outras 10 moedas, ficando com 15 moedas.

$$5 + 10 = 15.$$

No entanto, um vendedor o para e lhe diz que as 10 moedas eram suas. O aventureiro, como é um bom moço, decide devolver as 10 moedas que havia adicionado a sua carteira, ficando assim com suas 5 moedas iniciais.

$$15 - 10 = 5.$$

As operações *multiplicação* e *divisão* também são inversas.

A **radiciação** é a operação inversa da *potenciação*. O que significa que, se tiramos, por exemplo, a **raiz quadrada** de um número a, queremos na verdade descobrir qual número b elevado ao quadrado tem como resultado a.

Por exemplo: Se calcularmos a raiz quadrada de 9, denotada como $\sqrt{9}$, temos que pensar qual número elevado ao quadrado é igual a 9. Nesse caso, já sabemos que $\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 3 \times 3 = 9$.

Repare que no exemplo anterior, a resposta também poderia ser -3, já que $(-3)^2 = 9$. Isso acontecerá sempre quando estivermos tratando de raiz quadrada, teremos um resultado positivo e um negativo. No entanto, aqui nessa apostila, utilizaremos apenas a raiz positiva, portanto não se preocupe com o resultado negativo.

Não existem somente raízes quadradas, podemos tirar a raiz cúbica, quarta, ou até décima de um número. Por exemplo:

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ já que } \ 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$
$$\sqrt[4]{81} = 3, \text{ já que } \ 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$
$$\sqrt[10]{1} = 1, \text{ já que } \ 1^{10} = \underbrace{1 \times 1 \times \cdots \times 1}_{10 \text{ vezes}} = 1$$

A raiz mais utilizada normalmente é a raiz quadrada.

Agora que já sabemos como a raiz funciona, vamos definí-la:

Definição 1.3.4. Sendo a e b números inteiros quaisquer, a operação **radiciação** é definida da seguinte forma: $\sqrt[b]{a} = c$, sendo c um número tal que $c^b = a$.

Existem algumas raízes que não são tão simples de calcular, como por exemplo $\sqrt{2}$. Quando estamos tratando de números inteiros, não existe resposta para essa operação. A resposta está em um outro conjunto de números chamado de conjunto dos números *irracionais*. Como esse não é o foco do curso, não comentaremos mais sobre esses números, no entanto, veja abaixo algumas raízes que não têm resultado nos números naturais:

- $\sqrt{2} = 1,4142135623730$;
- $\sqrt{3} = 1,7320508075688$;
- $\sqrt{20} = 4,4721359549995$.

Podemos nomear os números com os quais estamos trabalhando da seguinte forma:

$$\textit{Índice} \longleftarrow \sqrt[b]{a} = \mathbf{c} \longrightarrow \textit{Raiz}$$
$$\downarrow$$
$$\textit{Radicando}$$

Assim, em $\sqrt[3]{8}$, por exemplo, 3 seria nosso índice, 8 seria nosso radicando, e 2 seria nossa raiz.

Propriedades da radiciação:

Sendo a e b números inteiros, e m e n números racionais, as propriedades da radiciação são as seguintes:

1. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.
   Exemplo: $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$.

   - Dessa propriedade sai outra: $\sqrt[n]{a^n} = a$, já que $\dfrac{n}{n} = 1$.
     Exemplo: $\sqrt[10]{2^{10}} = 2$.

2. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \times p]{a^{m \times p}}$.

   Exemplo: $\sqrt{4} = 2$, e também $\sqrt[2\times 2]{4^{1\times 2}} = \sqrt[4]{16} = 2$. Logo, $\sqrt{4} = \sqrt[4]{16}$.

3. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$.
   Exemplo: $\sqrt{100} \times \sqrt{4} = 10 \times 2 = 20$. Mas também temos que $\sqrt{100 \times 4} = \sqrt{400} = 20$. Logo, $\sqrt{100} \times \sqrt{4} = \sqrt{100 \times 4}$.

4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, com $b \neq 0$.

   Exemplo: $\sqrt{\dfrac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$. Por outro lado, temos:

$\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \dfrac{6}{3} = 2$. Logo, $\sqrt{\dfrac{36}{9}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}$.

5. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
   Exemplo: $(\sqrt{16})^2 = (4)^2 = 16$. Por outro lado, utilizando a propriedade 1, temos: $\sqrt{16^2} = 16^{\frac{2}{2}} = 16$. Logo, $(\sqrt{16})^2 = \sqrt{16^2}$.

6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\times m]{a}$.
   Exemplo: $\sqrt[3]{\sqrt{1000000}} = \sqrt[3]{1000} = 10$. Também temos que $\sqrt[3\times 2]{1000000} = \sqrt[6]{1000000} = 10$.
   Logo, $\sqrt[3]{\sqrt{1000000}} = \sqrt[3\times 2]{1000000}$.

É claro que calcular a raiz de um número não é tão simples quanto calcular potências. Porém, existe um jeito que facilita o cálculo da raiz: a decomposição em fatores primos do radicando. Consiste em dividir o radicando por fatores primos (se for um número par, por exemplo, comece dividindo por 2) e ir dividindo até não podermos mais dividir. Veja no exemplo a seguir:

Exemplo 1.3.5. Calcule:

- $\sqrt{144}$.

  Utilizando a decomposição em fatores primos, podemos dividir 144 por fatores primos até que não possamos mais dividir:

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 2^2 \times 2^2 \times 3^2 \end{array}$$

Começamos dividindo 144 por 2, pois, como 144 é par, com certeza um de seus fatores primos é 2. A divisão resulta em 72. Seguimos dividindo 72 novamente por 2, resultando em 36, e assim por diante.

Os números à esquerda do risco vertical são os que serão divididos, enquanto os da direita são por quem dividiremos. Deixamos eles anotados pois, quando chegamos no resultado 1, o que resta é juntar os fatores primos em forma de quadrados (expoente 2 na potência). Note que, se multiplicarmos todos os fatores primos (números no lado direito do risco), obteremos o número inicial, nesse caso, 144. Assim, $144 = 2^2 \times 2^2 \times 3^2$. Logo:

$$\sqrt{144} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Utilizando a propriedade } 3 \textit{ da radiciação}}}{=} \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2}$$

Por fim, podemos utilizar a propriedade 1 da radiciação para mostrar que:

$$\sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} = 2^{\frac{2}{2}} \times 2^{\frac{2}{2}} \times 3^{\frac{2}{2}} = 2 \times 2 \times 3$$

Assim, finalmente temos que:

$$\sqrt{144} = 2 \times 2 \times 3 = 12.$$

Como não precisaremos calcular raízes dessa forma nessa apostila, fica a seu critério se aprofundar nesse assunto.

Raízes de números negativos:

Na definição 1.3.4, temos que o radicando é um número inteiro, ou seja, ele pode ser um número negativo. Veja que, por exemplo, $\sqrt[3]{-8} = -2$, já que $(-2)^3 = -8$. No entanto, não há como calcular raízes de números negativos e índice par no mundo dos números inteiros (e nem no mundos dos reais!). Por exemplo, não existe a raiz inteira $\sqrt{-4}$, já que $(-2)^2 = 4$, assim como não existe a raiz inteira $\sqrt[4]{-16}$.

Mas, quando olhamos para um outro mundo, ou melhor, outro *conjunto* numérico, essas raízes com radicandos negativos existem. É chamado de **conjunto dos números complexos**, onde $\sqrt{-1} = i$, sendo i a *unidade imaginária.*

Não utilizaremos raízes de números negativos aqui, logo não precisaremos dos números complexos, porém, caso tenha curiosidade, pesquise mais sobre eles, são números muito interessantes e totalmente diferentes dos quais estamos acostumados!

1.4 Fatorial e Termial

Veremos agora duas outras operações muito simples e interessantes: fatorial e termial.

1.4.1 Fatorial

O fatorial $n!$ de um número natural n é calculado pela multiplicação desse número por todos os seus antecessores, até chegar em 1. Tome os seguintes exemplos:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

(lê-se "5 fatorial")

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

(lê-se "10 fatorial")

$$1! = 1$$

(lê-se "1 fatorial")

Definição 1.4.1. Sendo n um número natural, definimos a operação **fatorial** como: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$.

Por convenção, temos que:

$$0! = 1.$$

Propriedades do fatorial:

1. $n! = n \times (n-1)!$
   Exemplo: Vamos calcular $6! = 6 \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 720$. Mas, note que a parte em parênteses $(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 5!$, pela definição de fatorial. Logo $6! = 6 \times 5!$

Essa propriedade nos ajuda muito quando trabalhamos com simplificação de fatorial, que veremos daqui a pouco. Veja que ela também simplifica muito os cálculos. No exemplo anterior, como já sabíamos que $5! = 120$, já que tal resultado já foi passado no livro, então para calcular $6!$ bastaria multiplicar 120 por 6.

Tome cuidado ao fazer **operações com fatorial**. Em somas, subtrações e divisões, o fatorial não se conserva! É necessário calcular cada fatorial separadamente e depois realizar a operação:

- $2! + 3! \neq 5!$
- $4! - 3! \neq 1!$

- $5! \times 2! \neq 10!$

Vamos mostrar como resolver corretamente as operações acima:

- $2! + 3! = (2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1) = 2 + 6 = 8.$
- $4! - 3! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) - (3 \times 2 \times 1) = 24 - 6 = 18.$
- $5! \times 2! = (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1) = 120 \times 2 = 240.$

Simplificação de fatoriais:

A divisão de fatoriais é muito utilizada em *análise combinatória*, algo que você conhecerá melhor em sua escola futuramente. Algumas dessas divisões podem ser simplificadas. Por exemplo:

Exemplo 1.4.2. Calcule $\dfrac{6!}{3!}$.

Primeiramente vamos "abrir" o fatorial do numerador conforme a definição:

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times \mathbf{3} \times \mathbf{2} \times \mathbf{1}}{3!}$$

Mas veja que a parte em destaque $\mathbf{3} \times \mathbf{2} \times \mathbf{1}$ é justamente igual a $3!$. De fato, temos pela propriedade 1 de fatorial que: $6! = 6 \times 5! = 6 \times 5 \times 4! = 6 \times 5 \times 4 \times 3!$.

Logo, podemos reescrever o que tínhamos como:

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6 \times 5 \times 4 = 120.$$

Como temos o fator comum **3!** tanto no numerador quanto no denominador, podemos dividí-los, ficando com o denominador 1. Por isso os termos se "cancelam".

Exemplo 1.4.3. Calcule $\frac{2!}{4!}$.

Veja que, dessa vez, o denominador é maior que o numerador, assim, vamos abrir o fatorial do denominador dessa vez, até chegar em 2!:

$$\frac{2!}{4!} = \frac{\cancel{2!}}{4 \times 3 \times \cancel{2!}} = \frac{1}{12}.$$

<u>Fatoriais gigantes??</u>

Uma curiosidade é que, se você reparar, conforme aumentamos o valor de n, nosso $n!$ também aumenta. E aumenta muito! Veja a diferença de 4! para 5! e para 10!. Assim, se pegamos um n muito grande, o fatorial de n será *muuuuito* maior.

Os fatoriais de números grandes são tão enormes que nem uma calculadora científica consegue calcular, pois a mesma tem um limite de dígitos.

O maior fatorial que uma calculadora científica é 170!, e existem calculadoras que nem conseguem chegar até o 170!.

Para ter uma ideia, 170! tem um total de 307 dígitos decimais, ou seja, é um número gigantesco. Imagine só o tamanho do fatorial de 1000000!.

1.4.2 Termial

Agora que você conhece o fatorial, você pode estar se perguntando: mas será que existe uma operação em que, ao invés de multiplicarmos um número por seus antecessores, somamos este número por seus antecessores?

Bem, a resposta para esta pergunta é: SIM!

O termial $n?$ de um número natural n é calculado pela soma desse número por todos os seus antecessores, até chegar em 1. Podemos dizer que trata-se de um "fatorial da soma". Vejamos os exemplos a seguir:

$$4? = 4 + 3 + 2 + 1 = 10.$$

(lê-se "4 termial")

$$5? = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.$$

(lê-se "5 termial")

$$10? = 10 + 9 + ... + 4 + 3 + 2 + 1 = 5.5$$

(lê-se "10 termial")

Definição 1.4.4. Seja n um número natural qualquer, a operação **termial** pode ser definida como sendo

$$n? = n + (n - 1) + (n - 2) + ... + 1.$$

ou ainda:

$$n? = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Se você quiser saber sobre as propriedades do termial, vai perceber que são bem semelhantes às do fatorial que vimos anteriormente!

Propriedades do termial:

1. $n? = n + (n-1)?$
   Exemplo: Vamos calcular $8? = 8 + (7+6+5+4+3+2+1) = 720$. Mas, note que a parte em parênteses $(7+6+5+4+3+2+1) = 7?$, pela definição de termial. Logo $8? = 8 + 5?$

Operações com termial:

Assim como no caso do fatorial, precisamos calcular cada termial separadamente para depois realizar as operações. Vejamos alguns exemplos:

- $4? + 3? \neq 7?$
- $7? - 5? \neq 2?$
- $2? \times 6? \neq 12?$

Resolvendo corretamente as operações acima, temos:

- $4? + 3? = (4+3+2+1) + (3+2+1) = 10 + 6 = 16.$
- $7? - 5? = (7+6+5+4+3+2+1) - (5+4+3+2+1) = 28 - 15 = 13.$
- $2? \times 6? = (2+1) \times (6+5+4+3+2+1) = 3 \times 21 = 63.$

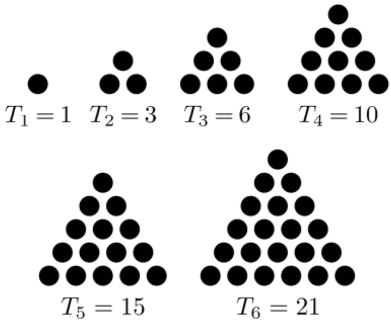
Números Triangulares

Aqui vai uma curiosidade interessante para você, meu jovem aventureiro!

Existe uma segunda forma de definir a operação termial, conhecida como a fórmula de um **número triangular**.

Okay, mas o que é isso?

De modo direto, podemos dizer que um número triangular é um número natural que pode ser representado como um triângulo equilátero. Veja os 6 primeiros números triangulares abaixo:



T_1 representa o primeiro número triangular, assim como T_n representa o n-ésimo número triangular. A fórmula para encontrar o n-ésimo número triangular segue abaixo:

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}\ ,\ n \in \mathbb{N}.$$

Sabemos, por exemplo, que $T_3 = 6$, vejamos se a fórmula confere isso:

$$T_3 = \frac{3 \times (3+1)}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Note que $3? = 3 + 2 + 1 = 6$ também! Como dito anteriormente, podemos definir o termial como na fórmula dos números triangulares, ou seja:

$$n? = \frac{n \times (n+1)}{2}.$$

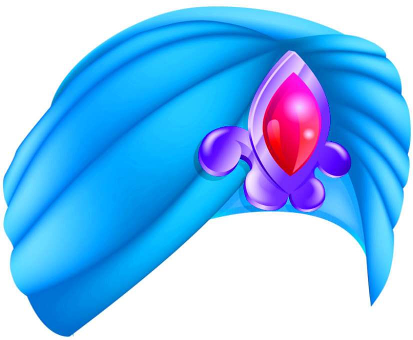
Com os exemplos apresentados, estamos mais do que preparados para enfrentar o Problema dos Quatro Quatros!

Capítulo 2

O Problema dos Quatro Quatros

Antes de iniciarmos a abordagem do problema em si, gostaríamos de explicitar qual o contexto no qual ele está inserido na história do livro “O Homem que Calculava”, de Malba Tahan.

Nosso cenário é a tenda “Os quatro quatros” pertencente à um mercador sírio, no suque de Bagdá, por volta do séc. XIII. Nesta tenda, todos os produtos são vendidos por 4 dinares, inclusive um belo turbante azul-claro; objeto de interesse do calculista Beremiz Samir.



O Problema dos Quatro Quatros consiste em formar todos os números inteiros de 0 a 100 utilizando apenas quatro algarismos 4 e operações.

É importante ressaltar que existem várias formas de escrever um mesmo número utilizando o sistema de quatro quatros, então os métodos apresentados a seguir não são os únicos!

2.1 Resolução

Nesta resolução, iremos apresentar algumas representações de números inteiros escritos no formato de quatro quatros.

Como iremos utilizar as expressões voltadas mais especificamente para o número 4, deixaremos alguns resultados importantes que serão utilizados na resolução abaixo.

- $4 \times 4 = 16$;
- $4^4 = 256$;
- $\sqrt{4} = 2$;
- $4! = 24$;
- $4? = 10$;
- $4^{\sqrt{4}} = 16$.

Como representar números de 0 a 10?

Para exemplificar o que foi dito anteriormente sobre as várias formas de representar um número utilizando quatro quatros, iremos começar com algumas opções para o número zero.

Se você pensa em expressar o número zero de forma simples e compacta, segue abaixo duas sugestões nesse parâmetro:

$$44 - 44 = 0;$$

$$\frac{4}{4} - \frac{4}{4} = 0.$$

Bem, se você preferir deixar esta representação mais extensa, por exemplo, podemos escrever o número zero como sendo:

$$4 + 4 - 4 - 4 = 0;$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} - \sqrt{4} - \sqrt{4} = 0.$$

Além destas 4 formas apresentadas, existem várias outras que podem ser utilizadas! Poderíamos inclusive escrever uma apostila apenas com as representações do número zero no sistema de quatro quatros.

Dando seguimento à nossa resolução, uma possível representação do número 1 seria

$$\frac{44}{44} = 1;$$

$$\frac{4^{\sqrt{4}}}{4^{\sqrt{4}}} = 1.$$

Nada mais fácil do que representar o número 2

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2.$$

Utilizando um número 1 conveniente $(\frac{4}{4})$, realizamos a soma que resulta em 2.

Vejamos um método interessante para a obtenção do número 3:

$$\frac{4+4+4}{4} = 3.$$

Perceba que também podemos representar o número 3 da mesma maneira que a apresentada anteriormente, mas substituindo os quatros por $\sqrt{4}$, como segue:

$$\frac{\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = 3.$$

Agora, a estrela principal do nosso problema, o número 4, pode ser escrito como sendo:

$$4 + \frac{4-4}{4} = 4,$$

onde a parcela $\frac{4-4}{4}$ seria nula.

Podemos também utilizar a seguinte expressão:

$$\frac{4+\sqrt{4}+\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = 4.$$

O número 5 pode ser obtido utilizando diversas expressões; deixaremos aqui duas opções interessantes:

$$\frac{4 \times 4 + 4}{4} = 5;$$

$$\frac{4+4+\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = 5.$$

Vejamos agora as representações dos números 6, 7, 8 e 9 no sistema quatro quatros:

$$4 + \sqrt{4} + \sqrt{4} - \sqrt{4} = 6;$$

$$\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\frac{4}{4}=7;$$

$$\frac{4\times\sqrt{4}\times\sqrt{4}}{\sqrt{4}}=8;$$

$$4+4+\frac{4}{4}=9.$$

Por fim, podemos utilizar da expressão abaixo para representar o número 10:

$$\frac{44-4}{4}=10.$$

Como representar números de 11 a 20?

De modo a aumentar o nível de dificuldade desta lista, o que você me diz de encontrarmos os números de 11 a 20 neste formato dos quatro quatros?

A partir deste tópico, iremos utilizar as operações **fatorial** e **termial**, que até o momento não haviam dado as caras por aqui.

Mas vem com a gente que vai ser legal!

Damos início a esta exposição com o número 11 e sua representação no sistema dos quatro quatros, como segue

$$\frac{4!}{\sqrt{4}}-\frac{4}{4}=11.$$

O triplo do protagonista deste capítulo também tem seu lugar nesta humilde apostila! O número 12 pode ser escrito da seguinte forma

$$\frac{4 \times 4}{\sqrt{4}} + 4 = 12.$$

Se quisermos obter o número 13 como uma expressão de quatro quatros, podemos utilizar o termial de 4 para escrever o número 10 e formar o número 3 utilizando três quatros:

$$4? + \frac{4 + \sqrt{4}}{\sqrt{4}} = 13.$$

Para o número 14, podemos fazer novamente uso do termial de 4, além de escrever o número 4 como sendo $4 + 0$. Desta forma, teremos a seguinte representação:

$$4? + 4 + 4 - 4 = 14.$$

Um método simples para escrever o número 15 está descrito abaixo

$$4 \times 4 - \frac{4}{4} = 15.$$

Podemos escrever o quadrado do número 4 utilizando multiplicações sucessivas de $\sqrt{4}$ por ele mesmo. É uma forma elegante de escrever o número 16:

$$\sqrt{4} \times \sqrt{4} \times \sqrt{4} \times \sqrt{4} = 16.$$

De modo prático, podemos escrever o número 17 como sendo

$$4 \times 4 + \frac{4}{4} = 17.$$

Utilizando fatorial, o número 18 pode ser escrito da seguinte forma:

$$4! - \sqrt{4} - \sqrt{4} - \sqrt{4} = 18.$$

A soma de dois termiais de 4 subtraídos de um número 1 escrito de forma conveniente nos dão o número 19 escrito em quatro quatros.

$$4? + 4? - \frac{4}{4} = 19.$$

Finalmente, finalizamos este tópico com uma das formas de escrever o número 20:

$$4 \times 4 + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 20.$$

Algumas representações de números maiores

Para finalizar a resolução do Problema dos Quatro Quatros, iremos conhecer a representação dos números 24, 74 e 100.

Utilizando o fatorial de 4 e as operações de adição, subtração e divisão, podemos obter facilmente o número 24. Perceba que assim como na primeira representação do número 4, utilizamos de uma segunda parcela nula nesta expressão:

$$4! + \frac{4! - 4!}{4!} = 24.$$

O número 74 pode ser escrito utilizando apenas as operações de adição e multiplicação, como segue

$$4 \times 4 \times 4 + 4? = 74.$$

Nosso último e tão esperado número, o algarismo 100, pode ser representado do modo descrito abaixo

$$4 \times 4! + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 100.$$

Se fizermos a operação $4 \times 4!$ iremos obter $4 \times 24 = 96$. Sabemos que $\sqrt{4} = 2$, portanto,

$$96 + 2 + 2 = 100.$$

E assim, escrevemos o número 100 no sistema dos quatro quatros!

Perceba que apesar de serem números maiores, a dificuldade continua sendo a mesma: pensar nas operações que permitem que possamos escrever um número inteiro qualquer entre 0 e 100 utilizando apenas quatro algarismos 4.

O Problema dos Quatro Quatros é simples e divertido, e agora nós convidamos você a testar seus conhecimentos sobre ele na seção de Exercícios!

2.2 Exercícios

Ao longo deste capítulo, nós revisamos as quatro operações básicas e conhecemos mais outras quatro novas operações, além de termos aprendido sobre expressões numéricas. Todo esse conteúdo foi necessário para que pudéssemos realizar a resolução do Problema dos Quatro Quatros.

Mas você pode estar se perguntando: será que existe a possibilidade de escrever os números inteiros dessa mesma forma, mas com outros números?

Pensando nisso, convidamos você a se aventurar nos exercícios abaixo:

1. Escreva números inteiros utilizando apenas três algarismos 3 e as operações que vimos.

2. Escreva números inteiros utilizando apenas cinco algarismos 5 e as operações que vimos.

Como comentado anteriormente, a resolução apresentada não é única. Além disso, existem vários outros números que não foram expressados neste material que podem ser escritos com quatro quatros. Então aí vai um outro desafio que consiste em:

3. Procure formas diferentes das apresentadas de escrever números inteiros utilizando o sistema dos quatro quatros.

4. Utilizando cada operação apenas uma vez, tente escrever o maior número possível usando o sistema dos quatro quatros.

Capítulo 3

Revisão de Conceitos do 2º Dia

Antes de apresentarmos os problemas, precisamos relembrar de algumas ferramentas matemáticas que vamos precisar!

3.1 Equações de 1º grau com 1

Assim como expressões numéricas, as **equações de 1º grau** definem a igualdade entre valores. A grande diferença entre essas duas expressões matemáticas é a apresentação de incógnitas. Incógnitas são símbolos utilizados para representar valores que ainda não são conhecidos. Por exemplo:

$$3 \times x = 15, \quad \text{ou somente} \quad 3x = 15.$$

Essa equação expressaque existe um número para x tal que o triplo dele é igual a 15. Entretanto, ainda não sabemos qual é esse número, então utilizamos a letra x para simbolizar esse valor.

Para descobrirmos o valor de x, vamos utilizar as operações aritméticas com as mesmas regras utilizadas nas contas com numéros. Nosso objetivo é isolar o x em um dos lados da expressão. Nesse caso, iremos dividir ambos os lados por 3:

$$3x \times \frac{1}{3} = 15 \times \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \;\; \frac{3}{3} \times x = \frac{15}{3} \;\; \Rightarrow \;\; 1 \times x = 5.$$

Portanto, nossa incógnita x é equivalente a 5.

De maneira geral, equações do 1º grau são expressões numéricas que possuem incógnitas e podem ser resolvidas através de operações aritméticas elementares (soma, subtração, divisão e multiplicação).

3.2 Regra de três

Você já ouviu falar sobre **proporção**? Na Matemática, quando nos referimos a esse termo queremos encontrar a relação existente entre duas ou mais grandezas. Um exemplo no nosso dia a dia é a comparação de preços que fazemos no mercado.

Quando você se depara com uma promoção do tipo "Leve 4, Pague 3", você faz as contas para saber se realmente está pagando o que foi prometido ou só aceita o preço exposto? Vamos imaginar que um pacote de bolachas esteja sendo vendido a R$3,46, mas a promoção "Leve 4, Pague 3"está R$10,99.

Para descobrir se a oferta está correta, você pode simplesmente comparar os valores. Vamos calcular o valor que você pagaria levando 4 pacotes não promocionais:

1 pacote por
R$ 3,64

4 pacotes por
R$ 10,99

$$3,46 \times 4 = 13,84.$$

A diferença entre esse valor e o valor promocional, R$10,99, é de R$2,85. Isso quer dizer que, com a promoção, você está pagando menos pelas bolachas, mas o desconto não equivale ao preço de mais um pacote.

O que acabamos de fazer é uma comparação de grandezas. Nós relacionamos a grandeza da quantidade de pacotes com a do preço. Observe a tabela abaixo.

Quantidade (unidade)	Preço (reais)
1 pacote	R$3,46
4 pacotes	R$13,84

Agora, veja as seguintes igualdades.

$$\frac{1}{4} = 0,25. \qquad \frac{3,46}{13,84} = 0,25.$$

Se a proporção entre nossas grandezas está correta, ao transformarmos os valores encontrados em cada coluna da nossa tabela em frações, devemos sempre obter o mesmo resultado. Com a **regra de 3** utilizamos esse raciocínio para descobrir valores proporcionais entre si. Para entendermos sua aplicação, vamos utilizar mais um exemplo.

Imagine que sua mãe pede que você compre 1kg de arroz. Chegando ao mercado, você descobre que não são mais vendidos pacotes com esse peso, apenas pacotes de 200 gramas.

Para descobrir quantos pacotes você deve levar, é só aplicar a regra de 3. Vamos começar montando a tabela com os valores que temos:

N° de pacotes (unidades)	Peso (?)
1 pacote	200 g
x pacotes	1 kg

Na segunda coluna, temos dois valores com unidades de medida diferentes, um em gramas e um em quilos. Para aplicarmos nossa proporção, precisamos que as grandezas utilizadas em cada uma das colunas sejam as mesmas. Portanto, iremos converter o valor expresso em quilogramas para gramas, obtendo assim a tabela:

N° de pacotes (unidades)	Peso (gramas)
1 pacote	200 g
x pacotes	1000 g

Agora, com as unidades de medida definidas, podemos afirmar que a proporção entre 1 e x deve ser igual a proporção entre 200 g e 1000 g. Com isso, podemos transformar nossos valores na equação:

$$\frac{1}{x} = \frac{200}{1000}.$$

Reduzindo nossa fração numérica, obtemos:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 5.$$

Portanto, para levarmos 1 kg de arroz, precisamos de 5 pacotes de 200 g. Generalizando nossa resolução, temos o passo a passo:

1. Encontre as grandezas com as quais irá trabalhar;

2. Monte a sua tabela com as informações que você possui;

3. Confira se as unidades de medida de suas grandezas coincidem. Em caso negativo, transforme um de seus valores para igualar as unidades de medida de cada coluna;

4. Construa e resolva sua equação.

Considerando que os passos 1 e 2 já foram cumpridos, podemos continuar nossa generalização construindo a tabela:

Grandeza 1 (u.m.)	Grandeza 2 (u.m.)
G_1	g_1
G_2	g_2

De acordo com esses valores, podemos escrever a equação:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{g_1}{g_2}.$$

Multiplicando ambos os lados por G_2:

$$\frac{G_1}{G_2} \times G_2 = \frac{g_1}{g_2} \times G_2 \quad \Rightarrow \quad G_1 = \frac{g_1 \times G_2}{g_2}.$$

Multiplicando ambos os lados por g_2:

$$G_1 \times g_2 = \frac{g_1 \times G_2}{g_2} \times g_2$$

$$\Rightarrow G_1 \times g_2 = g_1 \times G_2$$

É por esse motivo que costumamos afirmar que, para aplicar regra de 3, “multiplicamos cruzado”. Observe:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{g_1}{g_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{G_1}{G_2} = \frac{g_1}{g_2} \quad \Rightarrow G_1 \times g_2 = g_1 \times G_2$$

Com essas aplicações e conceitos em mente, podemos voltar à nossa história e entender como o matemático fez para solucionar o problema dos 60 melões.

Capítulo 4

Problemas dos 21 Vasos

Ao passarem em frente à hospedaria durante um passeio pela cidade, o calculista e o narrador, Hank Tadae-Maiá, encontram seu amigo xeque Salém, que os chamava dizendo que passava por um caso sério.

O xeque os leva para dentro da hospedaria, onde se encontram com três viajantes sentados em uma mesa redonda. Esses três são apresentados como criadores de carneiros em Damasco, que então explicam da situação em que se encontram.

Em uma venda recente de um lote de carneiros receberam um quantidade de vinho fino como pagamento. Esse vinho veio separado em 21 vasos iguais, mas a quantidade da bebida em cada um deles foi dada da seguinte forma:

7 cheios

7 meio cheios

7 vazios

Os vendedores querem repartir o pagamento de forma igual, ficando cada um com 7 vasos e a mesma porção de vinho. Como isso poderá ser feito?

4.1 Resolução

Primeiro, vamos rever as informações que nos foram dadas pelo enunciado da situação:

1. São 7 vasos cheios de vinho, 7 vazios e outros 7 meio cheios.

2. O número de vasos deve ser o mesmo para cada um dos comerciantes.

3. A quantidade de vinho deve ser repartida igualmente entre eles.

Se tentarmos dividir igualmente a quantidade de vasos cheios, vazios e pela metade para cada um dos comerciantes, percebemos que a divisão não pode ser feita dessa maneira. Isso porque, o número de vasos em cada um dos grupos (7) não é divisível pelo número de vendedores (3).

Então, precisamos encontrar uma forma de distribuir os vasos deixando cada mercador com 7 vasos, além da mesma quantidade de vinho.

Para descobrirmos como efetuar essa partilha, vamos começar pensando na quantidade total de vinho disponível nesses 21 vasos.

As informações que temos a respeito do volume de bebida em cada vaso é baseado no fato deste estar vazio, meio cheio ou totalmente cheio. Então, podemos atribuir a cada vaso meio cheio uma unidade de vinho, enquanto cada vaso cheio possui duas e os vazios possuem zero. Com esses valores em mente, podemos chegar a quantidade total de vinho nos vazos

$$7 \times 1 + 7 \times 2 + 7 \times 0 = 21.$$

Se dividirmos esse resultado por três, chegaremos a quantidade de vinho que cada vendedor deve receber

$$\frac{21}{3} = 7.$$

Agora, basta pensar em formas de dividir os vasos que contém o vinho de modo que alcancemos 7 unidades da bebida em cada porção. Para completarmos o número de vasos devidos a cada mercador usamos os que não possuem vinho dentro de si.

Como solução podemos obter: O primeiro sócio, de acordo com a partilha, receberá três vasos cheios, um vaso meio cheio e três vasos vazios, totalizando

$$2 + 2 + 2 + 1 = 7 \text{ unidades da bebida.}$$

$$3 + 1 + 3 = 7 \text{ vasos.}$$

E cada um dos outros dois sócios receberá dois vasos cheios, três meio cheios e dois vasos vazios, totalizando

$$2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7 \text{ unidades da bebida.}$$

$$2 + 3 + 2 = 7 \text{ vasos.}$$

Capítulo 5

Problema dos 60 Melões

Ao deixarem o palácio do poeta Iezid, Beremiz e o narrador encontram com o jovem Harim Namir. Harim pede a ajuda do matemático com um problema enfrentado por ele, seu irmão, Hamir, e um mercador.

Os irmãos, Harim e Hamed, encarregaram um mercador de vender duas partidas (remessas) de melões. O mercador deveria vender 30 melões à razão de 3 por 1 dinar e outros 30 melões à razão de 2 por 1 dinar, totalizando 25 dinares. Entretanto, ao chegar à feira, o vendedor decidiu que a melhor estratégia de venda seria juntar as duas partidas e aumentar proporcionalmente o preço. Portanto, ele começou a vender os melões em grupos de 5 por 2 dinares.

Após vender os 12 lotes de 5 melões cada um, o mecador recebeu 24 dinares. O que aconteceu? Como pagar os dois irmãos, se o primeiro deve receber 10 e o segundo 15 dinares?

5.1 Resolução

Segundo a história, após a venda dos melões, o comerciante recebeu 1 dinar a menos que o esperado. É fácil perceber que o total da venda deveria ser 25 dinares. Vejamos:

- 30 dos melões deveriam ser vendidos em grupos de 3 por 1 dinar $\Rightarrow \dfrac{30}{3} \times 1 = 10$;
- Os outros 30 deveriam ser vendidos em razão 2 por 1 $\Rightarrow \dfrac{30}{2} \times 1 = 15$;
- Ou seja, a venda dos 60 melões deveria totalizar 25 dinares.

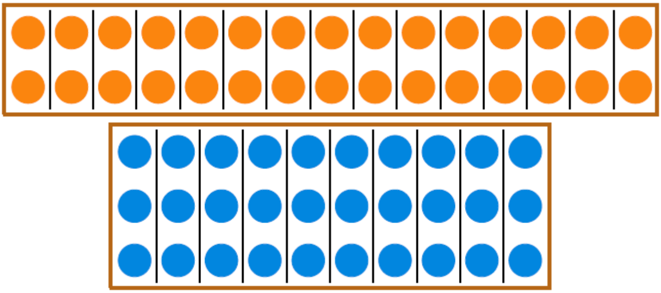
Entretanto, o vendedor recebeu apenas 24 dinares ao final do dia. Sabendo disso, nos resta responder a uma pergunta: por que vender os melões em grupos de 2 e 3 frutos por 1 dinar não é a mesma coisa que vender logo 5 deles por 2 dinares?

Para compreendermos melhor o problema ocorrido na venda dessas frutas, vamos organizar nossas informações em uma tabela. Vamos recapitular: ambos irmãos entregaram 30 melões ao mercador, porém cada um propôs uma estratégia de venda diferente. Enquanto Hamed encarregou o mercador de vender 15 lotes de 2 melões por 1 dinar cada, Harim encarregou o mesmo homem pela venda de seus 10 lotes de três melões cada, também, por 1 dinar. Ou seja:

Representando as partidas graficamente, iremos considerar que os círculos em laranja representam os melões de Hamed e em azul os melões de Harim.

Ao receber todos os melões, o mercador os juntou e, então, os redividiu em lotes com 5 frutas cada. Vamos fazer o mesmo:

Irmão	Hamed	Harim
Total de frutas	30	30
Tipo de venda	2 melões por lote	3 melões por lote
Quantidade de lotes	15	10
Total da venda	15 dinares	10 dinares



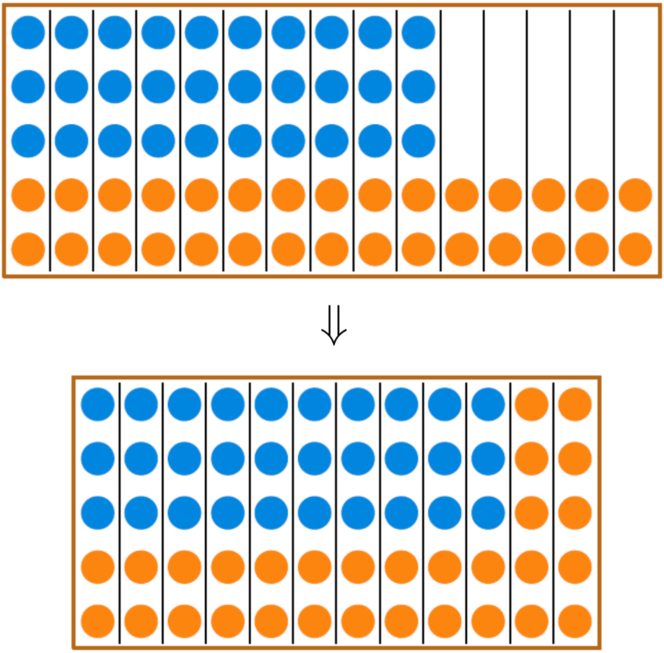
Repare que até o 10º lote conseguimos formar novos lotes de frutas com 5 unidades em cada utilizando 3 melões de Harim e 2 melões de Hamed. Entretanto, para formarmos nossos últimos dois lotes de 5 frutas, utilizamos apenas melões pertencentes a partida de Hamed.

Sabemos que cada um dos 10 primeiros lotes deve ser vendido por 2 dinares. Isso pode ser afirmado, pois cada um desses lotes é formado por um lotes de melões de Hamed, que custa 1 dinar, e um lotes de Harim, que custa mais 1 dinar, totalizando 2 dinares.

$$1 \times 1 + 1 \times 1 = 1 + 1 = 2 \text{ dinares.}$$

Entretanto, os dois últimos lotes de 5 frutas foram formados utilizando apenas frutas provindas da partida de Hamed. Podemos descobrir o valor que deveria ser cobrado por essas remessas montando a tabela com as informações que temos:

Utilizando o que apresendemos sobre regra de 3:



Quantidade de melões (unidades)	Preço (dinar)
2	1
5	x

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad 2x=5 \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{2}x=\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad x=2,5.$$

Portanto, as últimas duas partidas deveriam ser vendidas por dois dinares e meio. O real preço de venda dos 60 melões organizados em lotes de 5 seria de 10 lotes por 2 dinares cada (os lotes com melões azuis e laranjas) e 2 lotes por 2,5 dinares cada (os lotes apenas com melões laranjas). Totalizando:

$$10\times 2+2\times 2,5=20+5=25 \text{ dinares.}$$

Como o mercador não percebeu essa diferença de preços, vendeu os 12 lotes de 5 melões pelo preço de 2 dinares, totalizando:

$$12 \times 2 = 24 \text{ dinares.}$$

Descobrimos assim como o mercador perdeu 1 dinar na venda dos 60 melões!

Capítulo 6

Problema da Pérola Mais Leve

Um mercador de Benares, na Índia, dispunha de oito pérolas iguais - na forma, no tamanho e na cor. Dessas oito pérolas, sete tinham o mesmo peso; a oitava, entretanto, era um pouquinho mais leve que as outras. Como poderia o mercador descobrir a pérola mais leve e indicá-la, com toda segurança, usando a balança apenas duas vezes, isto é, efetuando apenas duas pesagens?

Sabendo que a balança que será usada é de dois pratos, como na imagem, como podemos solucionar o problema dado?

6.1 Resolução

Como o problema exige que a pérola mais leve seja descoberta e determinada com duas pesagens apenas, sabemos que não podemos pesá-las individualmente. Precisaremos agrupar as pérolas. Primeiramente, precisamos enteder que agrupar as pérolas não é um problema.

Supondo que cada pérola regular pese 10 gramas, sabemos que um grupo de 4 pérolas regulares deve ter 40 g. Como temos uma pérola com peso menor, ao separarmos nossas 8 pérolas, em dois grupos de quatro, certamente um será mais pesado. Então, ao colocarmos cada grupo em um lado da balança, conseguimos determinar onde está a pérola mais leve.

Nossa primeira hipótese, é dividir nossas 8 pérolas em duplas e fazer suas pesagens colocando uma em cada prato. Se chamarmos os pares formados de A, B, C e D seguiremos da seguinte forma:

1. Colocamos o par de pérolas A em um prato, e no outro o par B. Se a pérola mais leve estiver em um destes, saberemos porque seu prato subirá.

2. Assim, podemos dividir esse par, colocando cada uma de suas pérolas em um dos pratos, de forma a descobrir qual é a mais leve.

3. Caso a pérola mais leve não esteja em um destes dois primeiros pares, passamos a comparar o par C com o par D.

4. Daí, basta pegarmos destes grupos o mais leve, e compararmos o peso das duas pérolas para encontrarmos a mais leve.

Entretanto, se a pérola que procuramos for uma das últimas a serem pesadas, seriam necessárias quatro pesagens no total para descobri-la. O que podemos fazer pra contornar essa situação, é aumentar o número de pérolas por grupo.

Montando dois grupos (A e B) com três pérolas em cada um, e um terceiro (C) com apenas duas. Comparando os pesos dos grupos A e B podemos nos deparar com duas situações distintas:

1. O grupo A e B têm o mesmo peso;

2. Os grupos A e B têm pesos diferentes.

Na primeira hipótese, podemos garantir que a pérola mais leve não pertence ao grupo A nem ao grupo B. A pérola procurada é uma das duas que formam o grupo C. Tomando essas duas pérolas e levando-as para a balança (pondo cada uma em um dos pratos), a balança indicará qual a mais leve.

Na segunda hipótese, a pérola mais leve é uma das três pérolas do grupo A ou B. Então, levamos duas pérolas quaisquer, do grupo mais leve, para a balança. Novamente, temos duas possibilidades:

1. Se a balança ficar em equilíbrio, a terceira pérola (que ficou de lado) é a mais leve;

2. Se houver desequilíbrio, a pérola mais leve estará no prato que subiu.

Dessa forma descobrimos a pérola mais leve com apenas duas pesagens independentemente do grupo inicial ao qual ela pertence.

Capítulo 7

Revisão de Conceitos do 3º Dia

7.1 Frações

A primeira notícia do uso das frações vem do Egito antigo, por volta de 3.000 a.C., quando as terras em volta das margens do rio Nilo eram distribuídas entre os grupos familiares em troca de pagamento de tributo ao Estado.

Nesta época, como o rio Nilo sofria constantes mudanças de nível, a necessidade de medir e demarcar novos limites para cada pedaço de terreno era recorrente. Porém, as demarcações de terra, que eram antes feitas de maneira muito simples, acabavam sendo constantemente apagadas nas inundações do rio, gerando um imenso trabalho para os egípcios a cada desnível vivenciado.

O faraó, então, visando acabar com este problema de vez, decretou o uso de cordas nas novas demarcações de terrenos, instruindo seus geômetras a ajudarem seus súditos na implementação desta nova ferramenta. No entanto, em meio a esta prática, os geômetras notaram que as terras concedi-

das a alguns grupos familiares compunham medidas que não eram inteiras, de modo que, a solução imediata encontrada por eles ao tratar com estes "novos tipos" de medidas, foi utilizar o conceito que hoje conhecemos popularmente como ***frações****.*

Formalmente, uma fração é representada por meio da expressão

$$\frac{a}{b},$$

onde a e b são números inteiros, com $b \neq 0$. Mais ainda, existe uma classificação especial dada a este tipo de notação, sendo a parte superior a da fração dita como *numerador* e a parte inferior b como *denominador*.

Quando olhamos para uma fração, assim como os geômetras do faraó pensaram pela primeira vez neste conceito, conseguimos enxergar nela duas perspectivas simples e complementares: como parte de um todo ou como o resultado da divisão entre dois números inteiros. No geral, estas duas perspectivas seguem praticamente inseparáveis no campo da matemática, mas, aqui, para fins de melhor entendimento, vamos abordar de início cada uma delas separadamente.

- A fração como divisão entre dois números inteiros.

Quando pensamos em uma fração como resultado da divisão entre dois números inteiros, enxergamos a representação $\frac{a}{b}$ como sendo exclusivamente uma divisão da forma $a : b$.

Para entender melhor essa perspectiva vamos observar a seguinte situação:

Suponha que tenhamos em mãos uma barra de chocolate e queremos reparti-la igualmente com um grupo de três amigos. Logo, precisamos dividir a barra em quatro partes iguais, uma para cada amigo e uma para nós

$$1 : 4.$$

Nesta situação, cada pessoa envolvida ficará com uma de quatro partes da barra, de modo que a divisão feita pode ser representada como

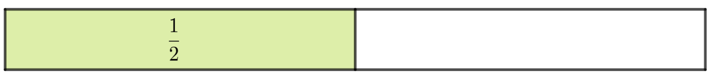
$$1 : 4 = \frac{1}{4}.$$

Note que aqui enxergamos a fração como uma representação do quociente entre dois números naturais, onde a barra de chocolate representa o todo, e a quantidade de pessoas representa o número de partes em que este todo foi repartido.

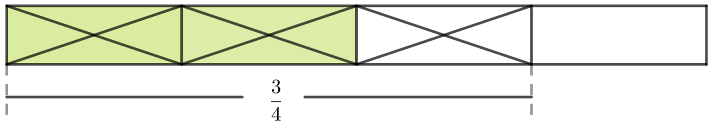
- A fração como quantidade a de partes, tomadas de um todo que foi repartido em b partes iguais.

Esta forma de abordar frações pode ser entendida a partir de uma simples manipulação com uma tira de papel, como nessa figura:

Veja que, se dobrarmos essa tira ao meio e pintarmos uma das partes, podemos representar a parte colorida dela por meio da fração $\frac{1}{2}$, visto que, do total de partes iguais em que a tira foi repartida - denominador - pintamos apenas uma - numerador.



Mais uma vez, se resolvermos agora dobrar cada metade da tira novamente ao meio e marcar com um X três das quatro partes obtidas, teremos que a fração que representa a parcela marcada da tira é $\frac{3}{4}$.



Note que em ambos os tópicos descritos acima, tomamos nosso inteiro como sendo "algo" – uma barra de chocolate, uma fita... – porém, é importante ressaltar que podemos tomar frações de qualquer coisa que represente uma ou mais unidades, inclusive, podemos tomar frações de quantidades numéricas.

Imagine o seguinte: ao invés de apenas um inteiro, temos agora 12 inteiros e, destas 12 unidades, estamos interessados em obter apenas $\frac{3}{4}$ delas.

Bom, para realizar este procedimento, basta focarmos na noção de fração como sendo a quantidade a de partes tomada do total repartido em b seções iguais.

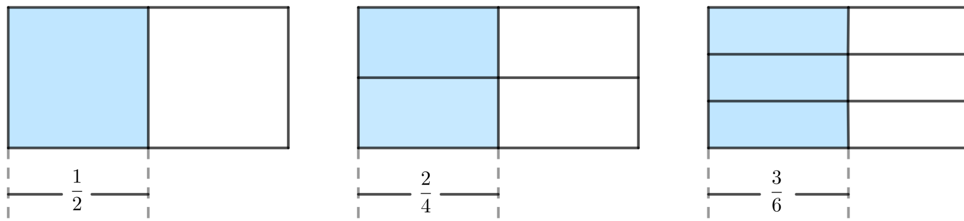
Na nossa situação em específico, essa definição nos diz que para encontrarmos o quanto vale $\frac{3}{4}$ de 12, temos que repartir nosso total de unidades em 4 partes iguais e tomar 3 destas. Matematicamente falando, este processo se dá ao dividirmos 12 por 4 e, depois, multiplicarmos o resultado por 3

$$\frac{12}{4} \times 3 = 9.$$

7.1.1 Frações equivalentes

Agora, já tendo introduzido o conceito de frações, podemos finalmente começar a falar sobre algumas peculiaridades importantes deste conteúdo, iniciando assim o tema "frações equivalentes".

Observemos então as seguintes imagens:



Veja que nos três casos apresentados acima, temos a parte colorida do retângulo correspondendo exatamente à sua metade, ou seja, mesmo com quantidades diferentes de repartições e representações fracionárias distintas para cada figura, no fim, ainda estamos nos referindo a uma mesma parte do todo.

Em termos de frações, percebemos então que

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6},$$

as quais descrevem exatamente a mesma quantia de partes coloridas da figura total.

Estes tipos de frações, que representam a mesma porção da unidade, são chamadas de frações equivalentes.

Um conjunto de frações equivalentes, como diz o nome, é composto por frações que equivalem a uma mesma quantidade do todo. Este tipo de relação, que será muito útil mais adiante, nos revela a existência de uma certa “compatibilidade” matemática entre este tipo de frações, de modo que, sem maiores esforços, podemos enxergar com facilidade no exemplo acima a seguinte relação:

$$\frac{1}{2} \underset{\times\mathbf{2}}{\overset{\times\mathbf{2}}{=}} \frac{2}{4} \qquad\qquad \frac{1}{2} \underset{\times\mathbf{3}}{\overset{\times\mathbf{3}}{=}} \frac{3}{6}.$$

Esta relação é decorrente de uma importante propriedade das frações, a saber,

> “Ao multiplicar ou dividir o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número (diferente de zero), obtêm-se uma fração equivalente a esta.”

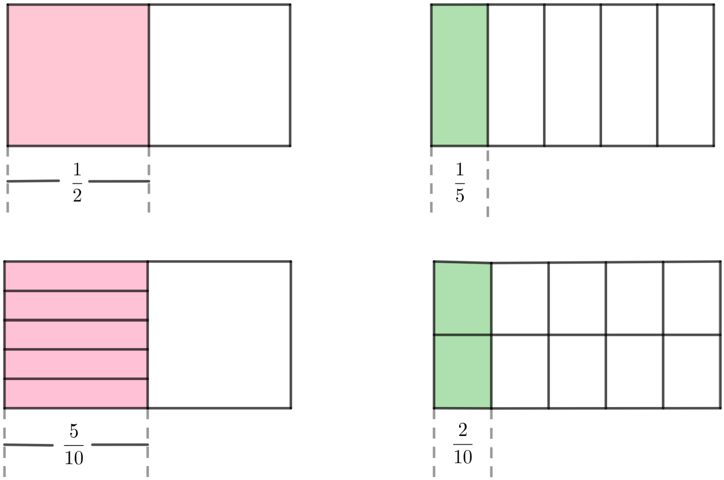
e que, no geral, é muito utilizada quando precisamos reduzir duas frações ao mesmo denominador.

7.1.2 Redução ao mesmo denominador: Cálculo do MMC

Tomemos as frações $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{5}$ conforme as figuras abaixo.

Agora, vamos “redesenhar” nosso esquema, representando novamente as mesmas quantidades do todo, mas, dessa vez, com frações equivalentes às primeiras e de mesmo denominador.

Veja que, matematicamente, esta transição pode ser representada por meio dos seguintes cálculos



$$\frac{1}{2} \overset{\times \mathbf{5}}{\underset{\times \mathbf{5}}{=}} \frac{5}{10} \qquad \frac{1}{5} \overset{\times \mathbf{2}}{\underset{\times \mathbf{2}}{=}} \frac{2}{10},$$

onde o novo denominador obtido consiste em um múltiplo comum entre os dois denominadores iniciais.

Esta estratégia de tomar duas frações de denominadores diferentes e representá-las por meio de frações equivalentes de mesmo denominador formula o que chamamos de “redução a um denominador comum”.

Representar duas frações distintas a partir da redução ao um denominador comum é algo que pode ser feito com qualquer par de frações. Para tanto, basta procedermos conforme o exemplo acima, encontrando sempre um múltiplo comum entre os denominadores inicias.

Tome como exemplo as frações $\dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{5}{6}$.

Se quiséssemos reduzir ambas a um mesmo denominador, bastaria achar um múltiplo comum entre 4 e 6. Sabemos que, ao fazer 4×6, com certeza obtemos um múltiplo de ambos os números, logo, tomando 24 como o denominador em comum, temos

$$\frac{3}{4} \underset{\times 6}{=} \frac{?}{24} \qquad\qquad \frac{5}{6} \underset{\times 4}{=} \frac{?}{24}.$$

Mais ainda, tendo das seções anteriores a forma correta de se trabalhar com frações equivalentes, basta agora multiplicarmos os numeradores pelos mesmo números que os denominadores foram multiplicados, chegando no seguinte resultado:

$$\frac{3}{4} \overset{\times 6}{\underset{\times 6}{=}} \frac{18}{24} \qquad\qquad \frac{5}{6} \overset{\times 4}{\underset{\times 4}{=}} \frac{20}{24}.$$

Esta é uma das formas de se realizar a redução de um par de frações à frações equivalentes de mesmo denominador.

Agora note o seguinte, já sabemos que $\dfrac{18}{24}$ e $\dfrac{20}{24}$ são frações equivalentes à $\dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{5}{6}$ com denominadores em comum. Porém, se realizarmos uma simplificação na primeiras, em especial, dividindo o numerador e o denominador por 2, chegamos em

É fácil ver que estas novas simplificações, além de novamente apresentarem um denominador em comum, também equivalem à $\dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{5}{6}$.

Desta maneira, fica clara a existência de mais de uma forma de redução de frações à um mesmo denominador, de

$$\frac{18}{24} \overset{:\,2}{\underset{:\,2}{=}} \frac{9}{12} \qquad\qquad \frac{20}{24} \overset{:\,2}{\underset{:\,2}{=}} \frac{10}{12}.$$

modo que, ao avaliar esta "duplicidade" de representação, é natural que surja o seguinte questionamento:

> "Se existe mais de uma forma de reduzir as frações,
> como saberemos qual é a correta?"

A resposta para essa pergunta é que, assim como no caso de frações equivalentes, não existe uma forma mais "correta" de se reduzir as frações a um denominador comum. Porém, visto a nossa iminente necessidade de sempre buscar múltiplos comuns entre denominadores, toma-se como uma forma mais "prática" e formal de realizar este processo as ideias de mínimo múltiplo comum (MMC).

Vamos tomar novamente $\dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{5}{6}$ como exemplo. Assim como antes, estamos em busca de um múltiplo comum entre os denominadores, mas, agora, ao invés de encontrar algum número que satisfaça esta condição aleatoriamente, vamos calcular o MMC entre 4 e 6, visando assim obter o menor entre esses múltiplos:

Disto, sabemos que o menor denominador em comum para as frações propostas é 12 e, portanto, $\dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{5}{6}$ podem ser representados como

Esta estratégia de utilizar o MMC para encontrar o denominador comum, nos garante, além da praticidade, que as frações finais obtidas sejam sempre as menores representações de denominador comum possíveis para as frações

$$
\begin{array}{r|l}
4,6 & 2 \\
2,3 & 2 \\
1,3 & 3 \\
1,1 & 1
\end{array}
\qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{MMC}(4,6) = 2 \times 2 \times 3 \times 1 = 12.
$$

$$
\frac{3}{4} \overset{\times \mathbf{3}}{\underset{\times \mathbf{3}}{=}} \frac{9}{12} \qquad\qquad \frac{5}{6} \overset{\times \mathbf{2}}{\underset{\times \mathbf{2}}{=}} \frac{10}{12}.
$$

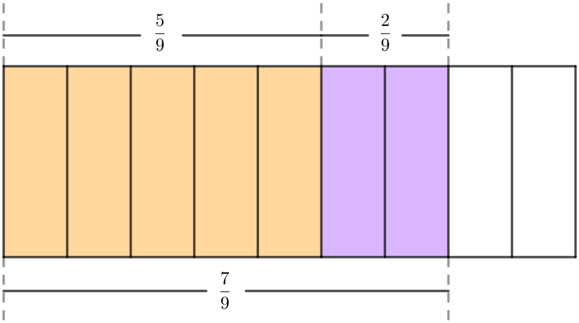
iniciais. Além disso, este método do MMC é muito útil ao trabalharmos com soma ou subtração de frações, visto que o manuseio com números menores durante estas operações é certamente mais fácil.

7.1.3 Adição e Subtração de frações

Tendo já uma boa base de entendimento acerca das frações, passaremos agora a discutir finalmente sobre as operações de adição e subtração realizadas entre elas.

A partir da imagem na próxima página, vemos que a parte laranja representada consiste em $\frac{5}{9}$ da imagem toda, enquanto a parte roxa consiste em $\frac{2}{9}$. Assim, no geral, se formos considerar a parcela colorida total da figura, temos que esta é dada por $\frac{7}{9}$.

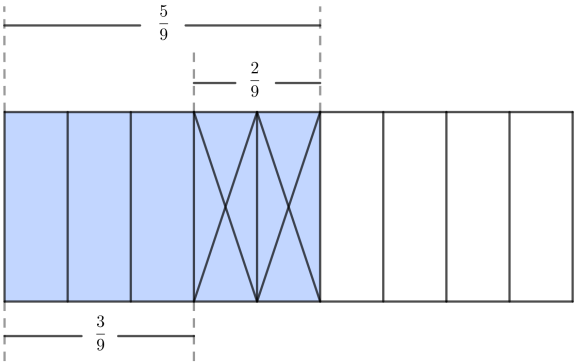
Em termos matemáticos, a constatação feita pode ser



representada por meio da soma

$$\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

Um processo muito similar vale para a subtração, veja a figura abaixo. Nela, os pedaços azuis representam a parcela da tira que foi colorida e as marcações com X representam as partes que foram "apagadas".



Note que, neste caso, podemos representar qual é a parte colorida do todo por meio do cálculo

$$\frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9}.$$

Percebemos então que, dos exemplos expostos acima, as operações de soma e subtração de frações para elementos de igual denominador são dados da seguinte forma: a operação pedida é realizada entre os numeradores e o denominador comum se mantêm.

Com isto definido, é natural que surja a seguinte pergunta: E se os denominadores das frações que quero somar ou subtrair não forem iguais?

Bom, como já vimos na seção anterior, somos sempre capazes de realizar a redução à um denominador comum entre qualquer conjunto de frações. Desta forma, se temos frações como, por exemplo, $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{3}$, para somá-las basta encontrar suas frações equivalentes de denominador comum e, após este procedimento, somá-las conforme o exposto acima:

- Tirando o MMC:

$$\begin{array}{r|l} 2,3 & 2 \\ 1,3 & 3 \\ 1,1 & 1 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \text{MMC}(2,3) = 2 \times 3 \times 1 = 6.$$

- Encontrando as frações equivalentes:

$$\overset{\times \mathbf{3}}{\underset{\times \mathbf{3}}{\frac{1}{2} = \frac{3}{6}}} \qquad\qquad \overset{\times \mathbf{2}}{\underset{\times \mathbf{2}}{\frac{1}{3} = \frac{2}{6}}}.$$

- Somando as frações de mesmo denominador:

$$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}.$$

Capítulo 8

Problema das Maçãs

Após seu estabelecimento em Bagdá a fama do calculista progrediu exponencialmente. Uma visita ao divã do califa colocou o nome de Beremiz na boca do povo e, como era de se esperar, cada vez mais pessoas apareciam para consultar a grande inteligência do homem. Todos os dias dezenas de pessoas vinham visitá-lo com algum novo questionamento: contadores com cálculos que não batiam, soldados turcos buscando maneiras seguras de vencer jogos, e até mesmo supersticiosos que buscavam saber que números deveriam escrever nos antebraços para obter sorte. Beremiz atendia a todos com paciência e bondade, recusando sistematicamente todo o dinheiro que lhe era proposto pelas soluções e redistribuindo aos pobres qualquer tipo de lucro que obtinha nos atendimentos.

No entanto, certa vez, mesmo guiado por seu grande instinto de generosidade, o calculista recebeu uma oferta indistribuível. Após resolver com muita calma e apontar com muita destreza os erros de cálculos realizados por um grande mercador, o homem insistiu em levá-lo a um passeio na cidade. Desta maneira, alegando a excepcionalidade de um *café que se encontrava na praça principal e oferecendo companhia ao calculista na visita ao estabelecimento, o mercador o guiou dentre as grandes ruas da cidade.*

Neste café, por coincidência, se encontrava no momento um grande contador de histórias. Um homem com seus cinquenta anos, negro, com barba densa e dois grandes olhos cintilantes prendia a atenção do povo com sua grande eloquência, empolgação e paixão ao contar uma bela história de amor. A narrativa encantava a todos e, como era de se esperar, seu fim foi seguido de ávidos aplausos e grandes elogios.

Aproveitando o momento, o mercador, que parecia ser extremamente popular na região, acompanhou Beremiz ao centro da sala e anunciou com empolgação a ilustre presença de seu convidado. Que noite agitada para o café! Centenas de olhos pousaram sobre o calculista e, assim como todos, o contador de histórias dirigiu um respeitoso salã ao famoso Homem que Calculava. Após as honrosas referências, o contador anunciou então:

— Meus amigos! Tenho contado histórias maravilhosas de gênios reis e efrites, mas, agora, em homenagem ao luminoso calculista que acaba de chegar, vou narrar uma história que envolve um problema cuja solução, até agora, não foi descoberta!

> *"Vivia outrora, em Damasco, um bom e esforçado camponês que tinha três filhas. Um dia, conversando com o cádi, declarou o camponês que suas filhas eram dotadas de alta inteligência e de raro poder imaginativo. O cádi, invejoso e implicante, irritou-se ao ouvir o rústico elogiar o talento das jovens e declarou:*
>
> *— Já é a quinta vez que ouço de tua boca elogios*

exagerados que exaltam a sabedoria de tuas filhas. Vou apurar se elas são, como afirmas, dotadas de engenho e perspicácia de espírito.

Mandou o Cádi chamar as três raparigas e disse-lhes:

— Aqui estão 90 maçãs que vocês deverão vender no mercado. Fátima, que é a mais velha, levará 50. Cunda levará 30 e Siha, a caçula, será encarregada de vender as 10 restantes. Se Fátima vender as maçãs a 7 por um dinar, as outras deverão vender, também, pelo mesmo preço, isto é, a 7 por um dinar; se Fátima fizer a venda das maçãs a três dinares cada uma, será esse o preço pelo qual Cunda e Siha deverão vender as que levam. O negócio deve fazer-se de sorte que as três apurem, com a venda das respectivas maçãs, a mesma quantia.

— E não posso desfazer-me de algumas maçãs que levo? — perguntou Fátima.

— De modo algum — obstou, de pronto, o impertinente cádi. — A condição, repito, é essa: Fátima deve vender 50. Cunda venderá 30 e Siha só poderá vender as 10 que lhe tocaram. E pelo preço que Fátima as vender, pelo mesmo preço deverão as outras negociar as frutas. Façam a venda de modo que apurem, ao final, quantias iguais.

Aquele problema, assim posto, afigurava-se absurdo e disparatado. Como resolvê-lo? As maçãs, segundo a condição imposta pelo cádi, deviam ser vendidas pelo mesmo preço. Ora, nessas condições, é claro que a venda de 50 maçãs devia produzir *quantia muito maior que a venda de 30 ou de 10 apenas.*

E, como as moças não atinassem com a forma de resolver o caso, foram consultar, sobre o complicado problema, um imã que morava nas vizinhanças.

O imã, depois de encher várias folhas de números, fórmulas e equações, concluiu:

— Meninas! Esse problema é de uma simplicidade cristalina. Vendam as noventa maçãs, conforme o cádi ordenou, e chegarão, sem erro, ao resultado que ele mesmo determinou.

A indicação dada pelo imã em nada esclarecia o intrincado enigma das 90 maçãs proposto pelo cádi.

As jovens foram ao mercado e venderam todas as maçãs, isto é, Fátima vendeu 50, Cunda vendeu 30 e Siha encontrou logo comprador para as dez que levara. O preço foi sempre o mesmo para as três moças e, por fim, cada uma delas apurou a mesma quantia."

8.1 Resolução

Aqui termina a nossa história e, agora, cabe a nós, assim como coube ao grande calculista Beremiz na época, explicar como foi resolvido este novo e intrigante problema das maçãs.

Começaremos então lendo o enunciado exposto acima mais uma vez. Neste primeiro momento, buscaremos identificar informações pertinentes à resolução do problema, observando com atenção os dados mais relevantes e procurando por dicas ou instruções que nos guiem melhor daqui pra frente.

Fazendo isso, logo de início vemos que os dados mais substanciais fornecidos ao problema são:

- A quantidade de maçãs vendidas por cada irmã:

Fátima vendeu 50, Cunda 30 e Siha 10, conseguindo, ao fim, o mesmo lucro por cada venda.

- E a rigorosa imposição feita pelo cádi:

> *"Se Fátima vender as maçãs a 7 por um dinar, as outras deverão vender, também, pelo mesmo preço, isto é, a 7 por um dinar; se Fátima fizer a venda das maçãs a três dinares cada uma, será esse o preço pelo qual Cunda e Siha deverão vender as que levam. O negócio deve fazer-se de sorte que as três apurem, com a venda das respectivas maçãs, a mesma quantia."*

Além disso, outra informação valiosa dada no enunciado do problema e que muitas vezes passa despercebida em um primeiro momento é que, mediante ao aparente absurdo da proposta do cádi às irmãs, estas tiveram necessidade de consultar o imã da região para resolver este impasse. O imã, por sua vez, após muito pensar, proferiu então o seguinte conselho:

> *"Vendam as noventa maçãs, conforme o cádi ordenou, e chegarão, sem erro, ao resultado que ele mesmo determinou."*

Estas três informações em destaque constituem o cerne do nosso problema. A partir delas somos capazes de criar algumas hipóteses e determinar certos direcionamentos para o início do processo de resolução.

Note que, ao observarmos as falas destacadas do imã e do cádi em conjunto, em especial, os trechos

> *"Se Fátima vender as maçãs a 7 por um dinar, as outras deverão vender, também, pelo mesmo preço, isto é, a 7 por um dinar; se Fátima fizer a venda das maçãs a três dinares cada uma, será esse o preço pelo qual Cunda e Siha deverão vender as que levam."*

e

> *"Vendam as noventa maçãs, conforme o cádi ordenou..."*

já conseguimos entender a grande sacada que desconfigura o problema do campo do absurdo: as maçãs não precisam ser vendidas com um preço fixo do começo ao fim.

Ao seguir o conselho do imã, tendo em vista a fala precedente do cádi, podemos perceber que, mesmo se Fátima fixar um preço inicial para as maçãs – e, consequentemente, definir o preço para Cunda e Siha também – existe a possibilidade dela mudar a oferta quando lhe convém. Mais ainda, como a fala do cádi contém "instruções" bem específicas, temos um ponto de partida definido para nossas tentativas de resolução: primeiro tomaremos o preço de 7 maçãs por 1 dinar e, depois, de 3 dinares por cada maçã.

Fazendo isso, temos então que a solução pode ser dada a partir do seguinte raciocínio:

Fátima iniciou sua venda ofertando 7 maçãs por um dinar. Assim, como carregava 50 maçãs, conseguiu vender 49 a este preço e, ao fim deste período, obteve 7 dinares e uma maçã de sobra.

Quantidade inicial de maçãs

Oferta de venda: de 7 em 7

$$\begin{array}{r|l} 50 & 7 \\ \cline{2-2} -\,49 & 7 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Maçãs sobressalentes $\longleftarrow$ 1

Quantidade de vendas efetuadas

Cunda, tendo também que fixar o preço inicial de 7 maçãs por um dinar, conseguiu vender de seu total de 30, 28 maçãs a este preço, lucrando então 4 dinares e tendo duas maçãs sobressalentes.

Quantidade inicial de maçãs

Oferta de venda: de 7 em 7

$$\begin{array}{r|l} 30 & 7 \\ \cline{2-2} -\,28 & 4 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Maçãs sobressalentes $\longleftarrow$ 2

Quantidade de vendas efetuadas

Já Siha, com apenas 10 maçãs para vender, viu-se obrigada a vender 7 destas por um dinar e, com isso, obteve um dinar e 3 maçãs de sobra.

Quantidade inicial de maçãs

Oferta de venda: de 7 em 7

$$\begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ \cline{2-2} -\,7 & 1 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Maçãs sobressalentes $\longleftarrow$ 3

Quantidade de vendas efetuadas

	Dinares obtidos	Maçãs sobressalentes
Fátima	7	1
Cunda	4	2
Siha	1	3

Feito isto, afim de vender o restante das maçãs e não podendo manter a dinâmica de preço anterior, Fátima declarou que a partir daquele momento as maçãs passariam a ser vendidas a 3 dinares cada.

Desta forma, visto a quantidade de maçãs sobressalentes que tinha cada uma das três irmãs, Fátima, Cunda e Siha obtiveram nesta venda final, respectivamente, um lucro de 3, 6 e 9 dinares.

Ou seja, Fátima lucrou $7 + 3 = 10$ dinares; Cunda lucrou $4 + 6 = 10$ dinares e Siha lucrou $1 + 9 = 10$ dinares, constituindo assim, um lucro igual de dinares para as três irmãs através de uma venda de quantidades desiguais de maçãs.

Capítulo 9

Problema dos Cinco Discos

Neste capítulo falaremos sobre mais um dos intrigantes problemas resolvidos pelo nosso grandioso calculista Beremiz, o problema dos cinco discos. Este, envolve um bela história de propostas de casamento à filha única do rei Cassim, a bela princesa Dahizé...

Quando Dahizé completou dezoito anos e vinte e sete dias de idade foi pedida em casamento por três príncipes cujos nomes a tradição perpetuou: Aradim, Benefir e Camozã.

O rei Cassim ficou indeciso. Como escolher, entre os três ricos pretendentes, aquele que deveria ser o noivo de sua filha? Feita a escolha, a consequência fatal seria a seguinte: ele, o rei, ganharia um genro, mas, em troca, adquiriria dois rancorosos inimigos! Péssimo negócio para um monarca sensato e cauteloso, que desejava viver em paz com seu povo e seus vizinhos.

A princesa Dahizé, consultada, afinal, declarou que se casaria com o mais inteligente dos seus apaixonados.

A decisão da jovem foi recebida com grande contenta-

mento pelo rei Cassim. O caso, que parecia tão delicado, apresentava uma solução muito simples. O soberano árabe mandou chamar os cincos maiores sábios da corte e disse-lhes que submetessem os três príncipes a um rigoroso exame.

Qual seria, dos três, o mais inteligente?

Terminadas as provas, os sábios apresentaram ao monarca minucioso relatório. Os três príncipes eram inteligentíssimos. Conheciam profundamente Matemática, Literatura, Astronomia e Física; resolviam complicados problemas de xadrez, questões sutilíssimas de Geometria, enigmas arrevesados e charadas obscuras!

– Não encontramos artifício – concluíram os sábios – que nos permitisse chegar a um resultado definitivo a favor deste ou daquele!

Diante desse lamentável fracasso da ciência, resolveu o rei consultar um dervixe que tinha fama de conhecer a magia e os segredos do ocultismo.

O sábio dervixe disse ao rei:

> *"Só conheço um meio que vai permitir determinar o mais inteligente dos três! É a prova dos cinco discos!"*

– Façamos, pois, essa prova – concordou o rei.

Os três príncipes foram levados ao palácio. O dervixe, mostrando-lhes cinco discos de madeira muito fina, disse-lhes:

> *"Aqui estão cinco discos, dos quais dois são pretos e três brancos. Reparai que eles são do mesmo tamanho e do mesmo peso, e só se distinguem pela cor."*

A seguir, um pajem vendou cuidadosamente os olhos dos três príncipes, deixando-os impossibilitados de distinguir a menor sombra.

O velho dervixe tomou então ao acaso três dos cinco discos, e pendurou-os às costas dos três pretendentes.

Disse, então, o dervixe:

> *"Cada um de vós tem preso às costas um disco cuja cor ignora! Sereis interrogados um a um. Aquele que descobrir a cor do disco que lhe coube por sorte, será declarado vencedor e casará com a linda Dahizé. O primeiro a ser interrogado poderá ver os discos dos dois outros concorrentes; ao segundo será permitido ver o disco do último. E este terá que formular a sua resposta sem ver coisa alguma! Aquele que der a resposta certa, para provar que não foi favorecido pelo acaso, terá que justificá-la por meio de um raciocínio rigoroso, metódico e simples. Qual de vós deseja ser o primeiro?"*

Respondeu prontamente o príncipe Camozã:

– Quero ser o primeiro!

O pajem retirou a venda que cobria os olhos do príncipe Camozã, e este pôde ver a cor dos discos que se achavam presos às costas de seus rivais.

Interrogado, em segredo, pelo dervixe, não foi feliz na resposta. Declarado vencido, foi obrigado a retirar-se do salão. Camozã viu dois dos discos e não soube dizer, com segurança, qual a cor de seu disco.

O rei anunciou em voz alta, a fim de prevenir os dois outros:

– O jovem Camozã acaba de fracassar!

– Quero ser o segundo - declarou o príncipe Benefir.

Desvendados os seus olhos, o segundo príncipe olhou para as costas do terceiro e último competidor e viu a cor do disco. Aproximou-se do dervixe e formulou, em segredo, a sua resposta.

O dervixe sacudiu negativamente a cabeça. O segundo príncipe havia errado, e foi logo convidado a deixar o salão. Restava apenas o terceiro concorrente, o príncipe Aradim.

Este, logo que o rei anunciou a derrota do segundo pretendente, aproximou-se, com os olhos ainda vendados, do trono, e declarou, em voz alta, a cor exata de seu disco.

Concluída esta bela narrativa observamos que, o príncipe Aradim, para formular a resposta certa, arquitetou um raciocínio rigorosamente perfeito. Esse raciocínio levou-o a resolver, com absoluta segurança, o problema dos cinco discos, conquistando assim a mão da formosa Dahizé.

Agora, já sabendo do sucesso de Aradim, nos resta saber duas coisas para decifrar a solução deste problema:

1 - Qual foi a resposta do príncipe Aradim?

2 - Como descobriu ele, com a precisão de um geômetra, a cor de seu disco?

9.1 Resolução

A resposta do príncipe Aradim é que seu disco é branco. Vamos analisar o porque dele ter certeza sobre sua resposta.

Primeiramente, vamos organizar as informações dadas:

- Existem 3 discos brancos e 2 discos pretos;

- O príncipe Camozã foi o primeiro a responder, podendo observar os discos dos outros príncipes e respondeu errado;

► O príncipe Benefir foi o segundo a responder, podendo observar o último príncipe e respondeu errado.

Note que os príncipes responderam errado se, e somente se, estavam incertos sobre a resposta, ou seja, havia mais que uma possibilidade de escolha.

Agora, vamos analisar as possíveis situações que poderiam ter ocorrido com o primeiro príncipe, Camozã.

- **Situação 1:** Os discos dos outros príncipes serem pretos, assim sobrando 3 discos brancos.

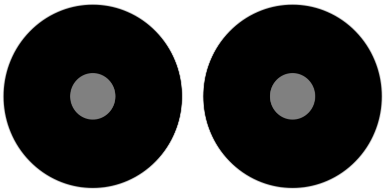


Figura 9.1: Camozã olhando os discos dos príncipes

Nessa primeira situação, o príncipe Aradim poderia pensar o seguinte:

> *"Como o príncipe Camozã observou 2 discos pretos, os únicos discos que restariam seriam brancos. Logo, Camozã saberia que seu disco era branco.*
>
> *Porém, sei que Camozã errou a resposta. E errou por quê?*
>
> *Porque sua resposta foi baseada na sorte. Não tinha certeza sobre sua reposta.*

De fato, se o príncipe Camozã tivesse observado 2 discos pretos nos concorrentes, simplesmente responderia ao rei:

'Como os discos dos meus competidores são pretos, os únicos discos que restam são brancos. Logo, meu disco é branco.'

E dito isso, o rei o declararia vencedor.

Mas sei que o primeiro príncipe errou a resposta. Logo, os discos que ele viu não podem ser ambos pretos."

Logo, só sobram duas situações possíveis:

- **Situação 2:** Os discos nos outros príncipes eram brancos.

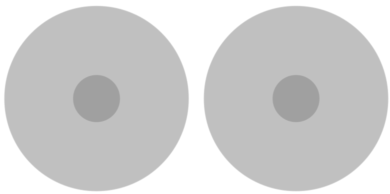


Figura 9.2: Camozã olhando os discos dos príncipes.

Dessa situação, o príncipe Aradim saberia que seu disco era branco, pois se Camozã viu dois discos brancos, então isso significa que os discos de Benefir e Aradim eram brancos.

- **Situação 3:** Os discos dos outros príncipes são um preto e outro branco.

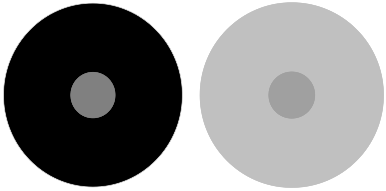


Figura 9.3: Camozã olhando os discos dos príncipes.

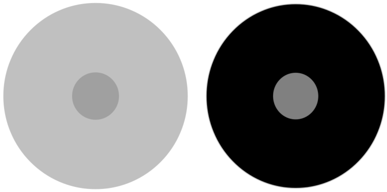


Figura 9.4: Camozã olhando os discos dos príncipes.

Nesse cenário, o príncipe Aradim raciocinou:

> *"Há 2 situações possíveis, o disco preto está comigo ou o disco preto está com o príncipe Benefir."*

Logo, basta observar as escolhas possíveis para o segundo príncipe, Benefir.

- **Situação 3 - (a):** O disco do príncipe Aradim ser branco.

Dessa situação, o príncipe Aradim concluiu que seu disco era branco. Conclusão esta que é a mesma da Situação 2.

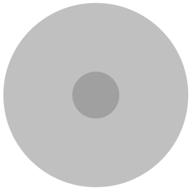


Figura 9.5: Benefir olhando o disco do príncipe Aradim.

- **Situação 3 - (b):** O disco do príncipe Aradim ser preto.

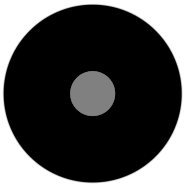


Figura 9.6: Benefir olhando o disco do príncipe Aradim.

Nesse caso, a análise do príncipe Aradim foi:

> *"Se o disco preto está comigo, então o disco com o príncipe Benefir é branco ou preto."*

Esse pensamento veio do fato que, supondo uma grande inteligência do príncipe Benefir, este deveria ter pensado de acordo com o seguinte raciocínio:

> *"Vejo que o disco do príncipe Aradim é preto. Se o meu disco for preto, então o príncipe Camozã teria acertado a resposta. Pois só restaram 3 discos brancos. Logo, não é possível que meu disco seja preto. Portanto, o meu disco é branco."*

Porém, sabendo que o príncipe Benefir errou a resposta ao rei, Aradim concluiu que a Situação 3 - (b) também não poderia ter ocorrido.

Deste modo, Aradim obtêm da análise de cada situação exposta acima que:

- A situação 1 não pode ocorrer.
- A situação 2 diz que seu disco é branco.
- A situação 3 também diz que seu disco é branco.

justificando assim a sua resposta acertiva ao problema.

Capítulo 10

Problema dos Camelos

Neste curioso problema, Beremiz - o homem que calculava - e seu colega de jornada, encontraram três homens discutindo acaloradamente ao pé de um lote de camelos:

> *"Não pode ser! Isto é um roubo! Não aceito!"*

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

> *"Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos como heranças esses* 35 *camelos. Segundo vontade de nosso pai devo receber a metade, o meu irmão Hamed uma terça parte e o mais moço, Harin, deve receber apenas a nona parte do lote de camelos. Contudo, não sabemos como realizar a partilha, visto que a mesma não é exata."*

– É muito simples – falou o Homem que Calculava. Encarrego-me de realizar, com justiça, a divisão se me permitirem que junte aos 35 *camelos da herança este belo animal, pertencente a meu amigo de jornada, que nos trouxe até aqui.*

E, assim foi feito.

– Agora – disse Beremiz - de posse dos 36 camelos, farei a divisão justa e exata.

Voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

– Deverias receber a metade de 35, ou seja, 17,5. Receberás a metade de 36*, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão.*

E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou: – E tu, deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, ou seja, 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação.

Por fim, disse ao mais novo:

– Tu, segundo a vontade de teu pai, deverias receber a nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, ou seja, 4. Teu lucro foi igualmente notável.

E, concluiu com segurança e serenidade:

– Pela vantajosa divisão realizada, couberam 18 *camelos ao primeiro, 12 ao segundo, e 4 ao terceiro, o que dá um resultado 18 + 12 + 4 de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobraram, portanto, dois. Um pertence a meu amigo de jornada. O outro, cabe por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!*

> *"Sois inteligente, ó Estrangeiro! – exclamou o mais velho dos irmãos. Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!"*

Agora perguntamos, como Beremiz conseguiu chegar a esta solução?

10.1 Resolução

Primeiramente, vamos organizar alguns dados:

▶ Temos 35 camelos no total que serão divididos entre os 3 irmãos;

▶ O primeiro irmão recebe $\frac{1}{2}$ do total, ou seja, 17 camelos + $\frac{1}{2}$;

▶ O segundo irmão recebe $\frac{1}{3}$ do total ou seja, 11 camelos e $\frac{2}{3}$;

▶ O terceiro irmão recebe $\frac{1}{9}$ do total, ou seja, 3 camelos e $\frac{8}{9}$.

O sábio Beremiz, escutando pacientemente a narração do irmão mais velho, já logo de imediato percebeu dois erros crucias do pai ao declarar a divisão de sua herança:

- O pai dividiu a herança entre seus filhos de maneira errônea, visto que a parte destinada a cada um dos três irmãos não constitui um número exato de camelos.

Somando a parte que cada irmão ganhou da herança, temos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}.$$

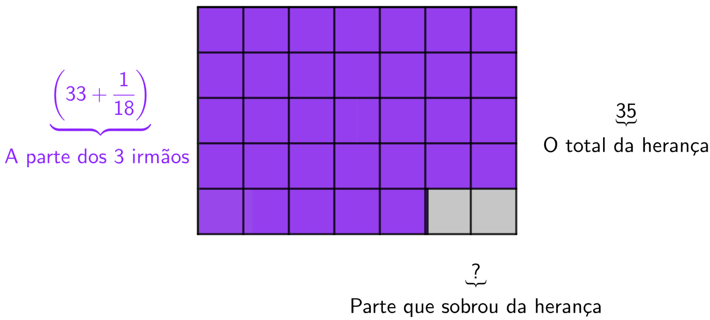
Como sabemos que o total da herança é 35 camelos, teremos que a herança dos irmãos vai ser $\frac{17}{18}$ de 35, ou seja,

$$35 \cdot \frac{17}{18} = \frac{35}{1} \cdot \frac{17}{18} \quad \Rightarrow \quad \frac{35 \cdot 17}{18 \cdot 1} = \frac{595}{18} = 33 + \frac{1}{18}.$$

Observe que ao somar as partes que cada irmão ganhou chegamos no mesmo resultado

$$\left(17 + \frac{1}{2}\right) + \left(11 + \frac{2}{3}\right) + \left(3 + \frac{8}{9}\right) = 33 + \frac{1}{18}.$$

Note que a soma das partes que os irmãos ganharam da herança não totalizam o valor total, 35 camelos.



Como sabemos qual a parte que sobrou da herança?

Note que usando os dados anteriores, a soma das partes dos irmãos é $\dfrac{17}{18}$.

Logo, para achar o quanto sobrou da herança, basta achar o quanto falta para $\dfrac{17}{18}$ ser o todo:

$$\frac{17}{18} + \frac{1}{18} = \frac{17+1}{18} = \frac{18}{18} = 1.$$

Como vimos, a herança total é de 35 camelos, logo, há uma "sobra" de $\dfrac{1}{18}$ de 35 camelos:

$$35 \cdot \frac{1}{18} = \frac{35}{1} \cdot \frac{1}{18} \quad \Rightarrow \quad \frac{35 \cdot 1}{1 \cdot 18} = \frac{35}{18} = \frac{17+18}{18} = 1 + \frac{17}{18}.$$

Podemos ainda chegar nesse resultado de outra forma, subtraindo do total da herança, as partes que os três irmãos ganharam:

$$35 - \left(33 + \frac{1}{18}\right) = 2 - \frac{1}{18} = \frac{36}{18} - \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{36-1}{18} = \frac{35}{18} = 1 + \frac{17}{18}.$$

Logo, temos

$$\underbrace{\left(33 + \frac{1}{18}\right)}_{\text{A parte dos 3 irmãos}} + \overbrace{\left(1 + \frac{17}{18}\right)}^{\text{A parte que ficou fora da herança}} = \underbrace{35}_{\text{Total da herança}}$$

A fração $\frac{17}{18}$ é especial.

Note que podemos reescrever essa fração como

$$\frac{17}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}.$$

Agora, podemos acrescentar essas partes da fração $\dfrac{17}{18}$ a herança dos 3 irmãos.

► Somando $\frac{1}{2}$ a parte do primeiro herdeiro, o mesmo receberia 18 camelos;

► Somando $\frac{1}{3}$ a parte do segundo herdeiro, o mesmo receberia 12 camelos;

► Somando $\frac{1}{9}$ a parte do terceiro herdeiro, o mesmo receberia 4 camelos.

Com isso parece que resolvemos o problema, porém ainda ficou 1 camelo de fora e a herança dos irmãos não é mais a mesma.

O primeiro irmão vai ganhar $\left(17 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$; o segundo irmão $\left(11 + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}$ e o terceiro irmão $\left(3 + \frac{8}{9}\right) + \frac{1}{9}$.

- O pai também errou ao determinar o total da herança: eram pra ser 36 camelos, e não 35.

O sábio percebendo isso, querendo deixar a herança entre os irmãos da forma inicial, emprestou o camelo do seu amigo e aumentou o total da herança para 36 camelos.

Com isso, como 36 é divisível por 2, 3 e 9 cada irmão ganhou uma parte exata e como foi aumentado o total da herança, cada um ganhou um acréscimo a sua parte.

► Primeiro irmão: $\frac{1}{2}$ de 36, ou seja, 18 camelos;

► Segundo irmão: $\frac{1}{3}$ de 36, ou seja, 12 camelos;

► Terceiro irmão: $\frac{1}{9}$ de 36, ou seja, 4 camelos.

Porém, somando a herança dos irmãos, $18+12+4=34$, percebemos que sobram 2 camelos, um que o sábio emprestou do seu amigo e o outro que ganhou por ter resolvido o problema.

Note que se o pai tivesse o conhecimento matemático do sábio e quisesse deixar uma herança que não causasse conflito para seus filhos, aumentaria o total da herança para 36 camelos, deixando a herança repartida como:

- $\frac{1}{2}$ para o primeiro irmão;
- $\frac{1}{3}$ para o segundo irmão;
- $\frac{1}{6}$ para o terceiro irmão.

Dessa forma, somando as partes fracionárias dos irmãos, teríamos que os mesmos ganhariam a herança toda sem problemas

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{3+2+1}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

e, mais ainda, cada irmão finalmente teria uma parte inteira de camelos para si:

- Primeiro irmão: $\frac{1}{2}$ de 36, ou seja, 18 camelos;
- Segundo irmão: $\frac{1}{3}$ de 36, ou seja, 12 camelos;
- Terceiro irmão: $\frac{1}{6}$ de 36, ou seja, 6 camelos.

$$18+12+6=36.$$

Outra forma de resolver o problema seria ainda se o pai tivesse deixado 36 camelos como herança porém tivesse mais um filho, o qual receberia $\frac{1}{18}$ do total de camelos.

Nesta configuração, teríamos que a divisão para cada irmão seria dada por:

- Primeiro irmão: $\dfrac{1}{2}$ de 36, ou seja, 18 camelos;
- Segundo irmão: $\dfrac{1}{3}$ de 36, ou seja, 12 camelos;
- Terceiro irmão: $\dfrac{1}{9}$ de 36, ou seja, 4 camelos;
- Quarto irmão: $\dfrac{1}{18}$ de 36, ou seja, 2 camelos.

onde a soma das partes de cada um resultaria no total de camelos precisamente

$$18 + 12 + 4 + 2 = 36.$$

Capítulo 11

Problema dos soldados

Já muito reconhecido pelo povo por conta de seus bons feitios e ajudas recorrentes na resolução de problemas, o calculista agora passara a frequentar também palácios. Vez ou outra grandes nomes da sociedade solicitavam a ajuda de Beremiz para solucionar os conflitos complicados que surgiam em seus domínios, escoltando-o de sua humilde habitação e ofertando-lhe todas as comodidades necessárias.

Uma destas recorrentes visitas aos altos da sociedade foi, certa vez, ao palácio do poderoso grão-vizir Ibraim Maluf. Este, acompanhado de mais três auxiliares de sua confiança, recebeu Beremiz em seu salão de audiência com grade seriedade, anunciando imediatamente o problema pelo qual o calculista havia sido requisitado.

A questão toda, no geral, envolvia muito mais do que pura matemática, envolvia também interpretação de leis e recursos que diziam respeito à justiça sendo feita na vida de um prisioneiro. Por conta disso, Beremiz não aceitou apenas resolver o problema de forma alheia ao seu contexto, exigindo antes de tudo visitar a cela do homem encarcerado.

O vizir, estranhando a exigência do calculista, insistiu em *uma explicação para esta vontade espontânea de Beremiz, o qual narrou o seguinte:*

> "*— Encontram-se, muitas vezes, nas paredes das prisões, legendas interessantes, fórmulas, versos e inscrições que nos esclarecem o espírito e nos orientam os sentimentos de bondade e clemência. Conta-se que, certa vez, o rei Mazim, senhor da rica província de Korassã, foi informado de que um presidiário hindu escrevera palavras mágicas na parede de sua cela. O rei Mazim chamou um escriba diligente e hábil e determinou-lhe copiasse todas as letras, figuras, versos ou números que encontrasse nas paredes sombrias da prisão.*
>
> *Muitas semanas gastou o escriba para cumprir, na íntegra, a ordem extravagante do rei. Afinal, depois de pacientes esforços, levou ao soberano dezenas de folhas cheias de símbolos, palavras ininteligíveis, figuras disparatadas, blasfêmias de loucos e números inexpressivos. Como traduzir ou decifrar aquelas páginas repletas de coisas incompreensíveis?*
>
> *Um dos sábios do país, consultado pelo monarca, disse: "Rei! Essas folhas contêm maldições, pragas, heresias, palavras cabalísticas, lendas e até um problema de Matemática com cálculos e figuras.*
>
> *Respondeu o rei: As maldições, pragas e heresias não acordam a curiosidade que me vive no espírito. As palavras cabalísticas deixam-me indiferente; não acredito no poder oculto das letras nem na força misteriosa dos símbolos humanos. Interessa-me, entretanto, conhecer o verso,*

o problema e a lenda, pois são produções que nobilitam o homem e podem trazer consolo ao aflito, ensinamento ao leigo e advertência ao poderoso.

Diante do pedido do monarca, disse o ulemá:

— Eis os versos escritos por um dos condenados:

‘A felicidade é difícil porque somos muito difíceis em matéria de felicidade.

Não fales da tua felicidade a alguém menos feliz do que tu.

Quando não se tem o que se ama é preciso amar o que se tem.’

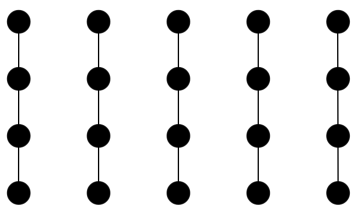
Eis agora o problema escrito a carvão na cela de um condenado.

Colocar 10 soldados em cinco filas, tendo cada fila 4 soldados. ”

11.1 Resolução

A solução única dada a este problema é derivada de uma pequena percepção feita logo na leitura de seu enunciado.

É comum que, ao pensarmos em cinco filas com 4 soldados cada, tenhamos na cabeça a seguinte configuração:

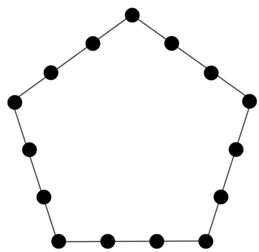


Porém, vemos logo de imediato que esta forma de pensar não corresponde ao raciocínio exigido pelo problema, visto que desta maneira a soma total de soldados excede os 10 disponíveis.

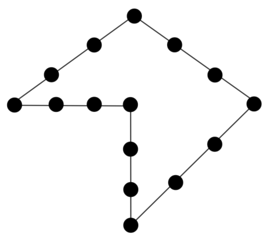
Este primeiro embate de ideias nos leva a uma nova reflexão em cima do enunciado proposto e, após um tempo de observação, nota-se que nada impede que interpretemos o termo “filas” como sendo, na verdade, “linhas”.

Tomando esta nova perspectiva, abrimos então outras possibilidades na tentativa de alinhar os 10 soldados, podendo considerar agora configurações que remetem a figuras conhecidas de 5 lados.

Seguindo este raciocínio, podemos tentar, em um primeiro momento, alinhar os soldados na forma de um pentágono:



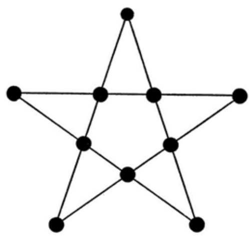
Ou até mesmo de um polígono qualquer de 5 lados:



Mesmo assim, novamente, estes arranjos não satisfazem as condições do nosso problema.

No entanto, note que essas tentativas de organizar os soldados não foram em vão. É fácil ver, com um pouco de atenção, que estas configurações antes expostas nos proporcionam uma valiosa dica: é impossível alinhar os dez soldados da maneira requerida no enunciado alocando-os como polígonos, visto que estas configurações sempre exigem uma quantidade muito maior de soldados do que temos disponível. Logo, nossas possibilidades de organização dos soldados se reduzem a figuras formadas por cinco linhas que, necessariamente, precisam se cruzar.

Com esta informação em mãos, finalmente, após algumas tentativas e erros, é possível chegar na seguinte solução única para o problema:



Referências Bibliográficas

[1] TAHAN, Malba. **O Homem que Calculava.** 1938.

[2] POTENCIAÇÃO e radiciação. Disponível em: https://www.todama
e-radiciacao/. Acesso em: 8 jul. 2021.