J3M 2019
Caderno de Resumos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor:	Prof. José Carlos Corrêa Eidam
Estudantes:	Bianca Elena Wiltuschnig
	Bruno Pilatti Oleiro
	Danielly Araujo Pereira dos Santos
	Gabriel Alves de Lima
	Isac Messias Michelon
	João Antonio Francisconi Lubanco Thomé
	Leonardo Gonçalves Fischer
	Luana Bankersen
	Lucas Cabral Port
	Marcel Thadeu de Abreu e Souza
	Marina Sayuri Vieira
	Mateus Balotin
	Matheus Daniel Galvão de Melo
	Matheus Kinceski Pires
	Matheus Moraes Santos
	Monique Baptista Fragozo
	Priscilla Pereira de Souza
	Vinicius Medeiros Prantl dos Santos
Site:	www.petmatematica.ufpr.br
Telefone:	(41) 3361-3672
Data do Evento:	06 a 08 de Novembro de 2019
Local de Realização:	Bloco PC - Anfiteatros A,B e Sala PC-16 Centro Politécnico - UFPR

Curitiba, novembro de 2019.

Caderno de Resumos - J3M

5° Edição - 2019
PET-Matemática

Conteúdo

Apresentação

Prezado Estudante,

É com grande satisfação que apresentamos o caderno de resumos da 5a edição da J3M! Este é um evento criado, gerido e organizado pelo grupo PET Matemática e surgiu do desejo de estudantes de graduação criarem um espaço próprio para apresentação de seus trabalhos de iniciação científica.

O evento encontra-se em sua 5a edição e bateu novamente um recorde de 97 trabalhos inscritos, evidenciando-se como um evento de alcance regional, recebendo inscrições de alunos universitários de cidades e estados vizinhos. Os trabalhos são divididos por área de conhecimento (Álgebra, Análise, Geometria & Topologia, Análise Numérica, Otimização e Educação Matemática), sendo que cada área conta com bancas especializadas, formadas por docentes da UFPR e de outras universidades e também alunos de pós-graduação. Ao final do evento, os trabalhos mais destacados recebem destaque e premiação.

Agradecemos por todo o apoio recebido da UFPR para a realização do evento e também aos Coordenadores de áreas, pelo trabalho árduo de revisão e organização dos resumos e também pela coordenação do trabalho das bancas. Finalmente, um agradecimento mais que especial vai para os alunos do PET Matemática por todo o esforço e dedicação com que têm cuidado deste evento desde a sua concepção.

Prof. José Carlos Eidam
Tutor do PET Matemática
Chefe do DMAT/UFPR

Palestras

Valor ou blefe? O jogo de pôquer como um laboratório para exercício de decisões sob risco

Prof. Dr. Cristiano Torezzan

Resumo

O jogo de pôquer pode ser visto como um laboratório para exercitar a tomada de decisões em situações de risco que envolvem estatística, negociação e aspectos comportamentais. O estudo de heurísticas mentais de decisão formam a base da economia comportamental e exercem importante presença em situações cotidianas da vida profissional. Nesta palestra apresentamos as ideias que motivaram o surgimento da disciplina de Fundamentos do Pôquer, que introduzimos como eletiva da graduação na Unicamp com bastante êxito. Durante a palestra, são apresentadas diversas situações de decisão sob risco e discutidas analogias com decisões cotidianas fora do jogo.

Mulheres na Matemática: Desafios e Perspectivas

Profa. Dra. Nara Bobko

Resumo

Nesta palestra serão levantados alguns pontos que têm sido discutidos sobre a sub-representação de mulheres na área de Ciências Exatas, Tecnologia, Engenharia e Matemática (CETEM), tanto no Brasil como em muitos outros países. O intuito é compreender um pouco das causas, desafios e possíveis iniciativas para reduzir este problema.

Álgebra

Banca Avaliadora:

Prof. Francismar Ferreira Lima (DAMAT/UTFPR)
Profa. Maria Eugênia Martin (DMAT/UFPR)
Profa. Mari Sano (DAMAT/UTFPR)
Prof. Matheus Brito (DMAT/UFPR)
Arthur Resende Alves Neto (PPGM/UFPR)
Cléber Barreto dos Santos (PPGM/UFPR)

Estrutura algébrica da herança genética

Ana Flavia Lopes *
Licenciatura em Matemática - UFPR
lopesbenites@gmail.com

Maria Eugênia Martin (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
eugeniamartin@gmail.com

Palavras-chave: álgebras genéticas, herança genética, genética de populações.

Resumo:
A compreensão moderna da herança genética foi iniciada com as teorias de Charles Darwin, mas foi o monge agostiniano Gregor Mendel quem, em 1856, começou a descobrir a natureza matemática do assunto. De fato, o simbolismo que Mendel usou para descrever seus primeiros resultados é bastante algebricamente sugestivo. Mais de oito décadas depois, o matemático inglês Ivor Etherington introduziu a linguagem formal da álgebra abstrata para o estudo da genética em seu artigo "Genetic Algebras", veja [1].

Uma **álgebra (não associativa)** sobre o corpo $\mathbf{k}$ é um $\mathbf{k}$-espaço vetorial A munido de um produto $(\cdot)$ que satisfaz:

1. $(a+b)\cdot c = a\cdot b + a\cdot c$ e $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
2. $\alpha(a\cdot b) = (\alpha a)\cdot b = a\cdot(\alpha b)$

quaisquer que sejam $a, b, c \in A$ e $\alpha \in \mathbf{k}$.

No que segue A representará uma álgebra de dimensão n sobre $\mathbf{k}$ e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base de A, assim todo elemento $a \in A$ é uma combinação linear

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \text{ com } \alpha_i \in \mathbf{k}.$$

O produto de dois elementos quaisquer de A é definido por

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} (\alpha_i \beta_j)\,(e_i \cdot e_j)$$

*Bolsista do Projeto do CNPq "Meninas na Matemática: Procuram-se Arletes", nº 44213220182.

juntamente com uma tabela de multiplicação dos elementos da base:

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} \Upsilon_{ijk} e_k \text{ onde } \Upsilon_{ijk} \in k \tag{1}$$

Organizaremos as n^2 equações (1) na forma de uma tabela:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & e_1 & \dots & e_j & \dots & e_n \\
\hline
e_1 & & & \vdots & & \\
\vdots & & & \vdots & & \\
e_i & \dots & \dots & \sum \Upsilon_{ijk} e_k & \dots & \dots \\
\vdots & & & \vdots & & \\
e_n & & & \vdots & &
\end{array}$$

A multiplicação fica completamente determinada pelos n^3 escalares $\Upsilon_{ijk} \in \mathbf{k}$, chamados de **constantes estruturais** da álgebra A em relação à base $\mathcal{B}$.

Uma álgebra genética é uma álgebra (possivelmente não associativa) usada para modelar a herança genética. Estas álgebras frequentemente têm uma base que corresponde às gametas geneticamente diferentes e as constantes estruturais da álgebra codificam as probabilidades de produzir descendência de vários tipos. As leis da herança são codificadas como propriedades algébricas da álgebra.

A definição mais geral de uma álgebra que poderia ter significado genético é a de uma *álgebra com realização genética*.

Definição 1 *Uma **álgebra com realização genética** é uma álgebra A sobre $\mathbb{R}$ que tem uma base $\{e_1, ..., e_n\}$ e uma tabela de multiplicação*

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} \Upsilon_{ijk} e_k,$$

*de modo que as constantes estruturais satisfazem $0 \leq \Upsilon_{ijk} \leq 1$ e $\sum_{k=1}^{n} \Upsilon_{ijk} = 1$, para todo $i, j, k = 1, ..., n$. Uma tal base é chamada de **base natural** para A.*

Um elemento $x \in A$ representa uma população se sua expressão como combinação linear dos elementos da base

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$$

satisfaz $0 \leq \alpha_i \leq 1$, para todo $i = 1, ..., n$ e $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Neste caso, os coeficientes α_i's representam a percentagem da população x que carrega o alelo e_i.

O ramo da genética com o qual estamos preocupados é chamado de genética de populações, ou seja, o estudo de como as populações evoluem através das gerações. Para um dado sistema de acasalamento, o objetivo final da genética de populações é determinar a distribuição de tipos genéticos na n-ésima geração filial, com base nos tipos genéticos presentes na população original, bem como determinar a distribuição de equilíbrio, se houver.

Matematicamente, as álgebras que surgem na genética são estruturalmente interessantes: em geral são álgebras comutativas, porém não são associativas. No entanto, elas não são necessariamente álgebras de Lie, de Jordan ou alternativas.

Muitas das propriedades algébricas dessas estruturas têm significado genético. Neste trabalho apresentaremos a interação entre a estrutura puramente matemática e as propriedades genéticas correspondentes. Por exemplo, noções algébricas como nilpotência e solubilidade podem ser interpretadas biologicamente como o fato de alguns dos gametas originais serem extintos após um certo número de gerações. Outro exemplo nesse sentido são os elementos idempotentes de uma álgebra os quais podem ser interpretados como uma população que alcançou o equilíbrio genético após uma geração de cruzamentos aleatórios.

Além disso discutiremos como nosso conhecimento da estrutura algébrica se aplica a situações genéticas reais. Para isso consideraremos dois sistemas diferentes de herança genética:

1. **Autofertilização**: estudaremos do ponto de vista da matemática o que acontece com uma população após repetidas autofertilizações.

2. **Herança ligada ao sexo**: Examinaremos como o modelo algébrico básico deve ser alterado para compensar a falta de simetria no sistema de herança genética ligada ao sexo.

Referências:

[1] ETHERINGTON, I. M. H. **Genetic algebras**. Proc. Roy. Soc. Edinburgh: pg 242–258, 1939.

[2] REED, Mary Lynn. **Algebraic structure of genetic inheritance**. Bulletin of the American Mathematical Society. pg 107-130, 1997.

[3] SCHAFER, R. D. **Structure of Genetics Algebras**. American Journal of Mathmatics. pg 121-135, 1949.

[4] SCHAFER, R. D. **An Introduction on to Nonassociative Algebra**. Stillwater, Oklahoma. 1961.

[5] WÖRZ-BUSECROS, Angelika. **Algebras in Genetics**. Springer-Verlag: Berlin, 1980.

Classificando álgebras de convolução de posets finitos

Andrey Modtkoski Friedlaender
Licenciatura em Matemática - UFPR
andreymod@gmail.com

Prof. Eduardo Outeiral Correa Hoefel (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
hoefel@ufpr.br

Palavras-chave: álgebras de convolução, categorias, posets.

Resumo:

Dado um conjunto finito C no qual está definida uma relação de ordem parcial "$\preceq$", podemos construir uma categoria $\mathcal{C}$, que chamaremos de *poset* sobre C, da seguinte maneira:

- os objetos de $\mathcal{C}$ são todos os elementos de C;
- os morfismos de $\mathcal{C}$ são obtidos através da relação de ordem de C, isto é, se para $a, b \in C$ ocorre $a \preceq b$, então há uma única flecha $a \xrightarrow{f} b$ em $\mathcal{C}$.

Fixado um anel comutativo R, vamos estudar as propriedades do conjunto de funções $R\langle\mathcal{C}\rangle = \{F;\ F : \mathcal{C} \to R\}$. Este é um R-módulo livre e podemos definir em $R\langle\mathcal{C}\rangle$ uma estrutura de R-álgebra através da operação de *convolução de funções*: dadas $f, g \in R\langle\mathcal{C}\rangle$ e k uma flecha em $\mathcal{C}$, a convolucão $f * g$ é definida por

$$(f * g)(k) = \sum_{i \circ j = k} f(i)g(j).$$

A R-álgebra $R\langle\mathcal{C}\rangle$ é chamada de *álgebra de convolução sobre* $\mathcal{C}$. Nosso objetivo é obter uma classificação das álgebras $R\langle\mathcal{C}\rangle$, buscando responder à seguinte questão: dada uma R-álgebra $\mathcal{A}$, podemos determinar se $\mathcal{A}$ é isomorfa à álgebra de convolução de uma categoria finita $\mathcal{C}$?

No caso em que as categorias $\mathcal{C}$ são posets, veremos que é possível estabelecer isomorfismos entre $R\langle\mathcal{C}\rangle$ e álgebras de matrizes triangulares superiores. Serão apresentados exemplos de tais isomorfismos para posets lineares e não-lineares e a partir destes exemplos obteremos o seguinte teorema de classificação:

Teorema: Fixe R um anel comutativo. Seja $\mathcal{A}$ uma árvore finita com elementos maximais $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Então $R\langle\mathcal{A}\rangle$ é isomorfa a uma subálgebra de $\prod_{i=1}^{s} M_{n_i \times n_i}(R)$, onde $M_{n_i \times n_i}(R)$ é a álgebra de matrizes $n_i \times n_i$ com entradas em R, para cada $i = 1, 2, \ldots, s$.

Referências:

[1] MAC LANE, S. **Categories for the working mathematician**. New York: Springer Science & Business Media, 2013.

[2] ROTMAN, J. J. **Advanced modern algebra**. 2 ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.

As Simetrias do Átomo de Hidrogênio

Douglas Alves Gonzaga
Bacharelado em Matemática Aplicada - UEPG
douglasagonzaga@hotmail.com

Prof. Marcos Calçada (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
mcalcada@uepg.br

Palavras-chave: simetrias, grupos, representações, átomo de hidrogênio.

Resumo:

Matemáticos costumam estudar simetrias de um objeto usando o conceito de grupos. E um dos exemplos mais fundamentais é o átomo de hidrogênio: um núcleo composto por um único próton e um elétron movendo-se em uma esfera ao seu redor. Esse modelo tem claramente algumas simetrias, como as rotações na esfera,que caracterizamos pelo grupo $SO(3)$. De fato, dois observadores à mesma distância do átomo de hidrogênio constatam os mesmos dados observáveis (uma simetria radial). Se os rotacionarmos ao redor da esfera em que se encontrar, não serão notadas diferenças nas medições.

Além disso, aplicando conceitos de Teoria de Representações, podemos usar resultados de Álgebra Linear para tirar conclusões físicas fundamentais. Uma representação de um grupo G é um homomorfismo entre G e o grupo de transformações lineares inversíveis de um espaço vetorial V, denotado por $GL(V)$.

Neste modelo, os estados de energia de uma partícula são descritos por elementos do espaço vetorial $L^2(\mathbb{R}^3)$ de classes de equivalência de funções de valor complexo quadrado-integráveis em $\mathbb{R}^3$. Assim, estudando as representações do grupo de simetrias do átomo de hidrogênio neste espaço podemos determinar os estados básicos do sistema, podendo assim fazer predições concretas sobre o mesmo.

Ao determinar os estados de energia do átomo de hidrogênio, podemos compreender melhor seus espectros e orbitais. E, com uma generalização metódica, é possível fazer o mesmo para átomos de qualquer elemento químico, bem como entender suas relações e propriedades fundamentais, e com isso gerar a tão conhecida tabela periódica.

Referências:

[1]SINGER, S. F. **Linearity, Symmetry and Prediction in the Hydrogen Atom.** New York: 1st ed., Springer, 2005.
[2]FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman Lectures on Physics, Vol. III: The New Millenium Edition: Quantum Mechanics.** Basic Books, 2015.
[3]PINTER, C. C. **A Book of Abstract Algebra.** New York: 2nd ed., Dover, 2010.

Resolução BGG para álgebras de Lie semisimples

João Antonio Francisconi Lubanco Thomé *
Bacharelado em Matemática - UFPR
jolubanco@gmail.com

Prof. Dr. Matheus Batagini Brito (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
mbrito@ufpr.br

Palavras-chave: Álgebras de Lie, Resolução, Módulos de Verma.

Resumo

A primeira parte do trabalho consiste em compreender a estrutura da categoria $\mathcal{O}$ de certos módulos de peso para álgebras de Lie semissimples sobre o corpo dos números complexos. Em seguida realizar a construção dos módulos de Verma e utilizar de sua estrutura relativamente simples para estudar as fórmulas de caractéres dos módulos irredutíveis de dimensão finita. Finalmente, junto com mais algumas ferramentas homológicas, provaremos a existência de uma resolução dos módulos irredutíves de dimensão finita em termos de certos módulos de Verma (projetivos) indexados pelos elementos do grupo de Weyl de mesmo tipo da álgebra de Lie associada.

Para enunciar o resultado principal, fixaremos o mínimo possível da notação. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita sobre o corpo dos complexos. Fixe $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ e uma base $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ para o sistema de raízes associado $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ que denotaremos por Φ, e $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ o conjunto correspondente de pesos fundamentais, com $n = \dim \mathfrak{h}$. Lembre que as classes de equivalência das representações irredutíveis de $\mathfrak{g}$ estão em bijeção com o conjunto $\Lambda^+ = \mathbb{Z}^+\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}^+\omega_n$ e para cada $\lambda \in \Lambda^+$ denotamos por $L(\lambda)$ um representante desta classe.

Mais um pouco de notação, dado um sistema de raízes Φ, definimos o **Grupo de Weyl** W associado, como o grupo finito formado pelas reflexões associados as raízes $\alpha \in \Phi$. Tal grupo tem a propriedade de permutar as raízes de uma álgebra de Lie. Denotaremos por $M(\lambda)$ o **Módulo de Verma** de peso máximo λ, além disso o módulo de dimensão finita $L(\lambda)$ é o único quociente simples de $M(\lambda)$. Portanto, temos o resultado principal:

*Bolsista do programa PET-Matemática.

Teorema 1 *Fixado $\lambda \in \Lambda^+$, a sequência*

$$O \to M(w_0 \cdot \lambda) = C_m \xrightarrow{\delta_m} C_{m-1} \xrightarrow{\delta_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\delta_2} C_1 \xrightarrow{\delta_1} C_0 = M(\lambda) \xrightarrow{\epsilon} L(\lambda) \to 0 \tag{1}$$

é exata, com $m = l(w_0) = |\Phi^+|$ e $\epsilon : M(\lambda) \to L(\lambda)$ é o epimorfismo canônico. O k-ésimo termo é definido como

$$C_k := \bigoplus_{w \in W^{(k)}} M(w \cdot \lambda), \text{ onde } W^{(k)} := \{w \in W | l(w) = k\}.$$

Qualquer resolução da forma (1) é chamada de **Resolução BGG** de $L(\lambda)$.

Referências

[1] HUMPHREYS, James. **Representation of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category** $\mathcal{O}$. American Mathematical Society, 1991.

[2] HUMPHREYS, James. **Introduction to Lie Algebras and Representation Theory**. 3^a impressão, 1980.

[3] CARTER, Roger. **Lie Algebras of Finite and Affine Type**. Cambridge University Press, 2005.

[4] ROTMANN, Joseph. **An Introduction to Homological Algebra**. 2nd. ed New York: Springer.

Sophie Germain e o Último Teorema de Fermat

Laiane Crysti Sgoda
Licenciatura em Matemática - UFPR
laianesgoda@gmail.com

Prof. Dr. José Carlos Cifuentes (orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
jccifa@gmail.com

Em comemoração aos 25 anos da prova do Último
Teorema de Fermat por Andrew Wiles (1994).

Palavras-chave:Teoria de Números, Números Primos de Germain, Último Teorema de Fermat.

Resumo:

Marie-Sophie Germain (1776-1831) nasceu e morreu em Paris, foi uma matemática autodidata e é reconhecida principalmente por seu trabalho na Teoria de Números, sendo sua contribuição mais relevante à formulação e demonstração do chamado 'Primeiro caso do Último Teorema de Fermat'. Ela teve também contribuições importantes na Física-Matemática com seu estudo das vibrações de placas elásticas inaugurando a moderna Teoria da Elasticidade. O interesse de Sophie Germain pela Matemática começou quando ela tinha apenas 13 anos, motivada pela leitura do livro "História da Matemática" de Montucla encontrado na biblioteca de seu pai. Esse livro é considerado o primeiro dedicado à história dessa ciência. Por ser mulher ela não teve uma educação formal em Matemática e Ciências pelo que precisou adotar uma identidade masculina fazendo-se chamar de Monsieur Antoine-August Le Blanc para conseguir continuar seus estudos, mas sempre à distância. Após um tempo, foi finalmente orientada e reconhecida como uma grande matemática, primeiro por Lagrange (1736-1813), de quem aprendeu Análise Matemática, e posteriormente por Gauss (1777-1855), cujas obras guiaram seus estudos na Teoria de Números.

O Último Teorema de Fermat

Pierre de Fermat (1601-1665) foi um jurista francês que se dedicou à Matemática de forma autodidata, sendo considerado, na atualidade, como "o príncipe dos amadores" especialmente no campo da Aritmética, inaugurando com seus métodos o que seria a moderna Teoria de Números. Fermat, baseando-se na obra "Aritmética" de Diofanto que continha mais de cem problemas propostos, viu-se estimulado a formular outros como desafios e, dentre eles, formulou a seguinte conjectura:

- A equação $x^n + y^n = z^n$ para $n \geq 3$ não tem solução em números inteiros, isto é, em $\mathbb{Z}$, para $x, y, z \neq 0$.

Uma hipótese natural que não significa nenhuma restrição para a conjectura é que $mdc(x, y, z) = 1$, isto é, podemos supor x, y e z primos entre si. Uma tal terna chama-se 'sistema primitivo de soluções'. O próprio Fermat demonstrou essa conjectura para o caso $n = 4$.

Outros matemáticos posteriormente demonstraram os casos particulares de $n = 3$ (Euler em 1770), $n = 5$ (Legendre em 1825), $n = 7$ (Lamé em 1839), etc. Também, devemos reparar que solucionando os casos em que $n = 4$ e $n = p$, um número primo ímpar, teremos a solução para todos os valores de n.

Contribuições de Germain para o Último Teorema de Fermat

Sophie Germain foi a primeira matemática na história a formular e demonstrar um caso geral para a conjectura de Fermat chamado de 'Primeiro Caso do Último Teorema de Fermat'. Para isso, ela introduziu os chamados posteriormente de 'primos de Germain':

- Um número primo ímpar p é dito primo de Germain se $2p + 1$ também é primo.

São primos de Germain menores do que 100 os seguintes: $p = 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53,$ 83 e 89, porém não são primos de Germain $p = 7, 13, 17, 19, 31, 37$, dentre outros.

Atualmente sabemos que há 190 primos de Germain no intervalo $[1, 10^4]$. Um fato Interessante é que até hoje não se sabe se existem infinitos primos de Germain (um problema em aberto), embora existam muitos conhecidos. Nesses termos, Sophie Germain demonstrou, em 1823, o seguinte teorema:

- Se p é um primo de Germain, então o Primeiro Caso do Último Teorema de Fermat é satisfeito para a potência p,

sendo o 1º caso o seguinte:

- A equação $x^p + y^p = z^p$ não tem solução primitiva em números inteiros para x, y, z quando $p \nmid xyz$.

Observa-se que o fato $p \nmid xyz$ equivale a termos $p \nmid x$, $p \nmid y$ e $p \nmid z$ que, utilizando a congruência módulo p introduzida por Gauss, equivale a termos $[x]_p \neq 0$, $[y]_p \neq 0$ e $[z]_p \neq 0$ onde os colchetes denotam a classe de equivalência correspondente módulo p. Assim, o teorema de Germain pode ser reformulado da seguinte maneira:

- A equação $x^n + y^n = z^n$ para $n = p$, um primo de Germain, não tem solução primitiva em $\mathbb{Z}_p$, para $x, y, z \neq 0$ módulo p.

Referências:

[1] MILIES, C.P; COELHO, S.P. **Números: Uma introdução a matemática.** São Paulo: Edusp, 2013.

[2] RIBENBOIM,P. **13 Lectures on Fermat's Last Theorem**. New York: Springer, 1979.

[3] SINGH,S. **O Último Teorema e Fermat**. Rio de Janeiro: Ed. Record, 1998.

[4] SINGH,S. **Introdução a Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: IMPA, 1975.

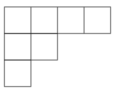
Tableaux de Young e o estudo de Funções Simétricas

Leonardo Gonçalves Fischer
Licenciatura e Bacharelado em Matemática - UFPR
leo21fischer@gmail.com

Prof. Matheus Batagini Brito (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
mbrito@ufpr.br

Palavras-chave: Diagramas de Young, Polinômios Simétricos, Polinômios de Schur.

Resumo:
Os Tableaux de Young são objetos combinatórios que apresentam notáveis propriedades de simetria, e por vezes figuram na teoria de representação de grupos simétricos e lineares gerais. Um diagrama de Young consiste de coleções de caixas justificadas à esquerda, com número decrescente de caixas por linha, tipicamente associadas a partições de inteiros positivos. Assim, por exemplo, à partição $\lambda = (4, 2, 1)$ associamos o diagrama



Esses diagramas podem contar ainda com um preenchimento com números inteiros positivos. Se tais números são dispostos em ordem não-decrescente a cada linha, da esquerda para a direita, e crescente de cima para baixo, dizemos que temos um Tableau de Young **semistandard**. E.g. :

1	1	2	4
2	3		
4			

Dizemos que um tableau é **standard** se ele é semistandard e todos os inteiros de 1 a n ocorrem uma única vez, em que n é o total de caixas. E.g. :

1	3	4	6
2	5		
7			

Um dos resultados mais importantes quanto às propriedades de tais tableaux é a chamada correspondência de Robinson-Schensted, que estabelece uma bijeção entre

pares de tableaux standard e permutações. Tal resultado seria posteriormente generalizado por Knuth para uma correspondência bijetiva entre pares de tableaux semistandard e palavras, em uma bijeção conhecida como correspondência de Robinson-Schensted-Knuth, ou simplesmente correspondência RSK.

A cada tableau *T* a partir de um diagrama de Young λ , podemos associar um monômio x^T, dado pelo produto das variáveis x_i, com cada variável *i* elevada a seu número de ocorrências em *T*. Assim, ao exemplo semistandard acima associamos o monômio $x_1^2x_2^2x_3x_4^2$. De modo geral, definimos:

$$x^T = \prod_{i=1}^{m}(x_i)^{\text{número de ocorrências de } i \text{ em } T}$$

Por sua vez, a cada diagrama λ, com entradas de 1 a *m* associamos um polinômio, chamado **polinômio de Schur** dado por:

$$s_\lambda(x_1, ..., x_m) = \sum x^T$$

em que somamos todos os tableaux semistandard com entradas de 1 a *m*.

Neste trabalho, mostraremos, por meio de Tableaux, que os polinômios de Schur, assim construídos, são simétricos, e estudaremos algumas de suas propriedades. Entre elas, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 1 *O conjunto* $\{s_\lambda(x) : \lambda$ *é partição de n com no máximo m linhas*$\}$ *define uma base sobre* $\mathbb{Z}$ *dos polinômios simétricos homogêneos de grau n em m variáveis.*

Referências

FULTON, W. *Young Tableaux With Applications to Representation Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997.

YONG, A. What is a young tableau. *Notices of the AMS*, v. 54, n. 2, p. 240–241, 2007.

Retas projetivas com peso na Teoria de Representações de álgebras

Luiz Henrique Lara dos Santos *
Bacharelado em Matemática - UFPR
luiz.lara1@outlook.com

Prof. Edson Ribeiro Alvares (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
rolo@ufpr.br

Palavras-chave: álgebras canônicas, retas projetivas com peso, feixes coerentes.

Resumo:

A teoria de representações de álgebras tem como objetivo descrever uma álgebra através da sua categoria de módulos. Muitas técnicas foram desenvolvidas com este fim, sendo aplicadas para certas classes específicas de álgebras. Neste trabalho estaremos interessados na relação entre álgebras canônicas e as retas projetivas com peso, explorada em [1].

As retas projetivas com peso são variedades algébricas que podem ser vistas como uma generalização da reta projetiva "clássica" $\mathbb{P}^1$ e são definidas a partir de uma sequência de pesos $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$, onde cada $p_i \geq 1$ é um inteiro e uma sequencia de pontos $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{P}^1$. Sobre estas retas, definimos um feixe estrutural $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$, o que nos permite estudar a categoria $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$ de feixes coerentes sobre o espaço anelado $(\mathbb{X}, \mathcal{O}_{\mathbb{X}})$. Existe um objeto $\mathcal{T}$ desta categoria, chamado de *feixe tilting*, tal que a categoria $\operatorname{mod}(\operatorname{End}(\mathcal{T}))$ dos módulos finitamente gerados sobre a álgebra de endomorfismos de $\mathcal{T}$ é derivadamente equivalente à categoria $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$.

As álgebras da forma $\Lambda = \operatorname{End}(\mathcal{T})$, onde $\mathcal{T}$ é um feixe tilting sobre uma reta projetiva com peso, são chamadas de álgebras canônicas e já haviam sido introduzidas em [2] como álgebras da caminhos com relações associadas a quivers da forma

*Bolsista Programa de Iniciação Científica - PIBIC

$$\begin{tikzcd}
& \vec{x}_0 \arrow[r, "X_0"] & 2\vec{x}_0 \arrow[r, "X_0"] & \cdots \arrow[r, "X_0"] & (p_0-1)\vec{x}_0 \arrow[dr, "X_0"] & \\
0 \arrow[ur, "X_0"] \arrow[r, "X_1"] \arrow[ddr, "X_n"] & \vec{x}_0 \arrow[r, "X_1"] & 2\vec{x}_0 \arrow[r, "X_1"] & \cdots \arrow[r, "X_1"] & (p_1-1)\vec{x}_0 \arrow[r, "X_1"] & \vec{c} \\
& \vdots & \vdots & & \vdots & \\
& \vec{x}_0 \arrow[r, "X_n"] & 2\vec{x}_0 \arrow[r, "X_n"] & \cdots \arrow[r, "X_n"] & (p_n-1)\vec{x}_0 \arrow[uur, "X_n"'] &
\end{tikzcd}$$

com as relações $X_i^{p_i} = X_0^{p_0} - \lambda_i X_1^{p_1}$, para $i = 2, 3 \ldots, n$ (onde os λ_i são como os usados para definir as retas projetivas com peso).

Em razão da equivalência citada acima, o problema de classificação de módulos sobre álgebras canônicas está intimamente ligado à classificação de feixes coerentes sobre retas projetivas com peso.

Vamos apresentar a construção das retas projetivas com peso como variedades algébricas, a categoria de feixes coerentes sobre as mesmas, bem como apresentar os feixes tilting citamos acima, além de apresentar exemplos de como usar a equivalência entre módulos sobre álgebras canônicas e feixes coerentes sobre as retas projetivas com peso.

Referências

[1] GEIGLE W., Lenzing H.*A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite dimensional algebras*. (1987) In: Greuel GM., Trautmann G. (eds) **Singularities, Representation of Algebras, and Vector Bundles**. Lecture Notes in Mathematics, vol 1273. Springer, Berlin, Heidelberg.

[2] RINGEL C. M. **Tame algebras and integral quadratic forms**, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1984. Lecture Notes in Mathematics 1099.

[3] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents* **Ann. of Math.** , 61 (1955) pp. 197–278.

[4] PERRIN D. **Algebraic Geomtetry - An introduction**. Göttingen: Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen, 2000.

[5] HARTSHORNE R. **Algebraic Geometry**.New York: Springer; 1977.

[6] LAM T.Y. **Lectures on Modules and Rings.** New York: Springer; 1942.

[7] ROTMAN J. **An Introduction to Homological Algebra**, , 2 ed. : Springer; 2000.

Álgebras de caminhos de quivers sem relações: uma classificação via formas quadráticas

Marina Sayuri Vieira *
Bacharelado em Matemática - UFPR
marinasayuri16@gmail.com

Prof. Tanise Carnieri Pierin (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
tanise@ufpr.br

Palavras-chave: Formas quadráticas, Quivers, Álgebra.

Resumo:

Uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado pode ser classificada em: de tipo de representação finita, quando, a menos de isomorfismos, há apenas um número finito de módulos indecomponíveis definidos sobre ela, ou de tipo de representação infinita, caso estejam definidos sobre ela um número infinito de módulos indecomponíveis, a menos de isomorfismos. De acordo com o teorema de Gabriel, toda álgebra básica, conexa, associativa e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado é isomorfa a um quociente de uma álgebra de caminhos. Tendo esse resultado em vista, a fim de classificar as álgebras que são isomorfas a álgebras de caminhos de quivers sem relações, estudaremos a forma quadrática de um quiver. Pode-se verificar que, quando finitos, os números de raízes positivas da forma quadrática q_Q de um quiver Q (sem relações) e de módulos indecomponíveis definidos sobre a álgebra de caminhos de Q coincidem. Além disso, mostra-se que o número de raízes positivas de q_Q é finito se, e somente se, q_Q é fracamente positiva, ou seja, $q_Q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}^n$ positivo, de forma a reduzir a classificação desejada sobre a álgebra de caminhos de um quiver Q a uma caracterização de sua forma quadrática associada. Finalmente, verifica-se que esta propriedade para q_Q é obtida se, e somente se, ao desconsiderarmos as orientações das flechas de Q, o grafo obtido é Dynkin. Mais ainda, quando este for o caso, apresentaremos uma técnica para obter a lista completa dos módulos indecomponíveis definidos sobre a álgebra de caminhos de Q.

Referências:

*Bolsista PET-Matemática

[1] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski. **Elements of the Representation Theory of Associative Algebras**. Volume 1. London Mathematical Society, Student Texts, 65. Cambridge University Press.

Lei de Grupo em uma Cúbica Planar

Matheus Moraes Santos *
Licenciatura em Matemática - UFPR
matheus4554moraes@gmail.com

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
marcelomsa@ufpr.br

Palavras-chave: Curvas algébricas, Grupos algébricos, Geometria algébrica.

Resumo:

Dado um corpo K definimos uma curva algébrica afim como o conjunto das raízes de um polinômio $f(X,Y) \in K[X,Y]$. Sob a ótica da geometria algébrica estas curvas são tratadas no plano projetivo $\mathbb{P}^2_K$, isto é

$$\mathbb{P}^2_K \ = (K^3 \backslash \{0\})/\sim,\ (X,Y,Z) \sim (\lambda X, \lambda Y, \lambda Z),\ \lambda \in K \backslash \{0\}$$

onde para todo $(x,y,z) \in K^3$ diferente da origem, seu representante de classe em $\mathbb{P}^2_K$ é denotado por $(x:y:z)$. De modo similar podemos definir os espaços projetivos de dimensão $n \in \mathbb{N}$, em especial a reta projetiva $\mathbb{P}^1_K$. Note que podemos identificar K^2 com $\mathbb{P}^2_K$ de uma maneira natural pela função injetora $(x,y) \mapsto (x:y:1)$, isto significa que $\mathbb{P}^2_K$ contém uma cópia de K^2.

Em $\mathbb{P}^2_K$ definimos uma curva algébrica (projetiva) como o conjunto das raízes de uma forma, isto é, um polinômio homogêneo, $F(X,Y,Z) \in K[X,Y,Z]$. Agora dada uma curva afim $\gamma = \{(x,y) \in K^2 \mid f(x,y) = 0\}$ podemos, a partir de uma mudança de variáveis em f, levar γ projetivamente em $\Gamma = \{(x:y:z) \in \mathbb{P}^2_K \mid F(x,y,z) = 0\}$, com $F(X,Y,Z) \in K[X,Y,Z]$ forma. Esta passagem é feita por via da aplicação multiplicativa

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & K[X,Y] & \longrightarrow & K[X,Y,Z] \\ & f(X,Y) & \longmapsto & Z^d f\left(\dfrac{X}{Z}, \dfrac{Y}{Z}\right) \end{array}$$

onde d é o grau de f e $F(X,Y,Z) = Z^d f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$. Analogamente pode-se retornar a γ pelo homomorfismo de anéis

$$\begin{array}{rccc} \vartheta: & K[X,Y,Z] & \longrightarrow & K[X,Y] \\ & F(X,Y,Z) & \longmapsto & F(X,Y,1) \end{array}$$

Veja também que Γ está bem definida em $\mathbb{P}^2_K$ pois $F(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = \lambda^d F(X,Y,Z)$, assim independe da escolha do representante de classe $(X:Y:Z) \in \mathbb{P}^2_K$.

*Voluntário do Programa de Iniciação Científica (PIBIC)

O estudo destes elementos permite explorar, a partir de uma intuição geométrica, relações algébricas tais como existência e unicidade de curvas que passam por n pontos dados, cardinalidade da interseção e divisibilidade entre duas curvas, entre outros.

Abaixo discutimos alguns resultados relevantes para o trabalho apresentado, indicando ideias principais das demonstrações.

Definição 1. *Seja K corpo, $F(X,Y) \in K[X,Y]$ uma forma não nula de grau d e considere o polinômio $f(X) \in K[X]$ associado a $F(X,Y)$, dado por $F(X,1)$. Definimos a **multiplicidade** de uma raiz de F em $\mathbb{P}^1_K$ como sendo:*
(i) A multiplicidade de f em $\alpha \in K$ correspondente de $\mathbb{P}^1_K$; ou
(ii) $d -$ deg f se $(1:0)$ é a raiz.

Proposição 1. *Seja $F(X,Y)$ uma forma não nula de grau d em $K[X,Y]$. Então F tem no máximo d raízes em $\mathbb{P}^1_K$. Em particular se K é algebricamente fechado F tem exatamente d raízes (contando as multiplicidades).*

Ideia da demonstração. Seja m_∞ a multiplicidade de $(1:0)$ em F e f o polinômio associado a F. Então, por definição deg $f = d - m_\infty$. Agora basta notar que a soma do número de raízes de f (contando as multiplicidades) e m_∞, ou seja, o número de zeros de F, é menor ou igual que d.

Teorema 1 (Bézout para retas e cônicas)**.** *Seja $L \subset \mathbb{P}^2_K$ uma reta (respectivamente $C \subset \mathbb{P}^2_K$ uma cônica não degenerada) e $D \subset \mathbb{P}^2_K$ a curva definida por $D = \{(x:y:z) \in \mathbb{P}^2_K \mid G_d(x,y,z) = 0\}$ onde G_d é uma forma de grau d em $K[X,Y,Z]$. Assuma que $L \not\subset D$ (respectivamente $C \not\subset D$), então*
(i) $\#\{L \cap D\} \leq d$
(ii) $\#\{C \cap D\} \leq 2d$

Ideia da demonstração. Em (i) considere a parametrização $(a(U,V), b(U,V), c(U,V))$ de L com a, b, c formas lineares. Agora o número de interseções é dado pelas soluções de $F(U,V) = G_d(a(U,V), b(U,V), c(U,V)) = 0$ e como F tem grau d, pela proposição anterior tem no máximo d raízes. (ii) é análogo.

O resultado que buscamos demonstrar (Teorema 2) é referente a caracterização de uma estrutura algébrica de grupo abeliano em uma curva descrita por uma forma cúbica em $K[X,Y,Z]$. Recordando que um grupo abeliano é um conjunto munido de uma operação associativa e comutativa, possui elemento neutro e todo elemento, inverso. A motivação para o estudo desta relação é compreender, a um nível elementar, os conceitos de não-singularidade, espaço tangente e morfismos de variedades algébricas.

A Definição 1, Proposição 1 e o Teorema 1 são importantes para a discussão sobre interseção de retas e cúbicas, definir suas multiplicidades e condições necessárias para existir uma lei de grupo em uma cúbica, por exemplo a hipótese (a) da construção (página 3).

Os próximos resultados são usados na prova da associatividade, que aqui é tratada para pontos "suficientemente" genéricos. A ideia para demonstrar esta propriedade é criar duas cúbicas associadas a construção geométrica e mostrar que satisfazem o Corolário 1.

Definição 2. *$S_d = \{$formas de grau d em $(X,Y,Z)\}$. Dados $P_1, ..., P_n \in \mathbb{P}^2_K$ podemos definir o conjunto das formas que passam por por estes pontos como $S_d(P_1, \ldots, P_n) = \{F \in S_d \mid F(P_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n\} \subset S_d$.*

Proposição 2. *Sejam K um corpo infinito e $P_1, \dots, P_8 \in \mathbb{P}^2_K$ pontos distintos. Suponha que não há 4 dos pontos $P_1, \dots, P_8$ colineares e nem 7 destes pontos em uma cônica não degenerada, então*

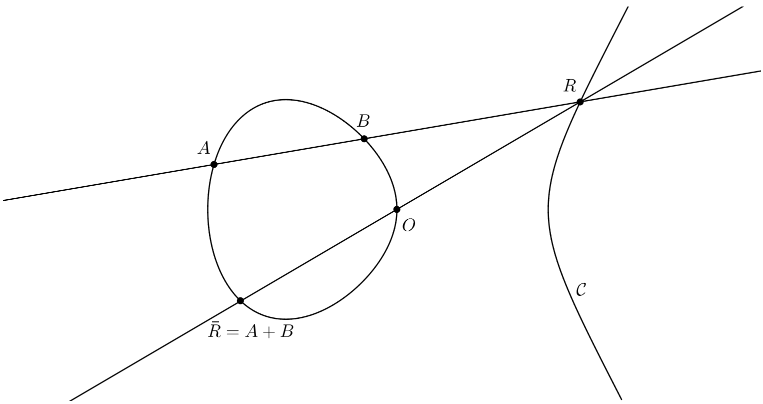
$$\mathbf{dim}\, S_3(P_1, \dots, P_8) = 2$$

Corolário 1. *Sejam C_1, C_2 duas curvas cúbicas cuja interseção consiste em 9 pontos distintos, $C_1 \cap C_2 = \{P_1, \dots, P_9\}$. Então uma cúbica D passando por $P_1, \dots, P_8$ também passa por P_9.*

Ideia da demonstração. Primeiramente verificamos que as condições da proposição 2 são satisfeitas, então $\mathbf{dim}\, S_3(P_1, \dots, P_8) = 2$. Logo se F_1, F_2 são as equações de C_1, C_2, formam uma base de $S_3(P_1, \dots, P_8)$ e então qualquer outra curva D com equação $G \in S_3(P_1, \dots, P_8)$ é da forma $G = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$. Portanto como F_1 e F_2 se anulam em P_9, também G se anula.

Iniciamos com $K \subset \mathbb{C}$ um subcorpo dos complexos. Considere uma forma cúbica $F \in K[X, Y, Z]$ e defina $\mathcal{C} = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2_K \mid F(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{P}^2_K$ uma curva não vazia, satisfazendo:
(a) F é irredutível ($\mathcal{C}$ não contém uma reta ou uma cônica);
(b) $\forall\ P \in \mathcal{C},\ \exists!\ L \subset \mathbb{P}^2_K$ reta, tal que P é uma raiz múltipla de $F|L$ (geometricamente $\mathcal{C}$ é não-singular, ou seja, todos os pontos de $\mathcal{C}$ tem multiplicidade 1, e a reta L é a reta tangente em P, denotada por $T_P\mathcal{C}$).

A operação de soma definida em $\mathcal{C}$ segue da seguinte construção:
(i) Fixe um ponto O qualquer em $\mathcal{C}$;
(ii) Para $A \in \mathcal{C}$ tome $\overline{A} = 3^\circ$ ponto de interseção de $\mathcal{C}$ com a reta OA;
(iii) Para $A, B \in \mathcal{C}$, tome $R = 3^\circ$ ponto de interseção de AB com $\mathcal{C}$ e defina $A + B = \overline{R}$.



Note que o 3° ponto de interseção $\overline{R}$ está bem definido, pois dadas duas raízes de F e L a reta que passa por elas, $F|L$ se fatora como o produto de três termos lineares, logo o último ponto existe e tem coordenadas em K.

Teorema 2. *A construção acima define uma lei de grupo abeliano em $\mathcal{C}$, com O como elemento neutro.*

Referências:

[1] REID, Miles. **Undergraduate Algebraic Geometry**. Cambridge University Press, 2013; updated Tex version by the author: 2013.

O Teorema de Gabriel

Priscilla Pereira de Souza *
Licenciatura em Matemática - UFPR
priscilla.souza98@gmail.com

Prof. Dr. Fernando Araujo Borges (Orientador)
Centro de Estudos do Mar - UFPR
fernando.borges@ufpr.br

Palavras-chave: quivers, representações, formas quadráticas.

Resumo:

Um dos objetivos da Teoria de Representações de *Quivers* é classificar todas as representações de um dado quiver Q a menos de um isomorfismo e classificar todos os morfismos entre elas. Diz-se que um *quiver* Q é de tipo de representação finita quando o número de classes de isomorfismo das reprentações indecomponíveis de Q for finita. Um fato surpreendente é que essa classificação, conhecida como “Teorema de Gabriel”, depende apenas do grafo subjacente ao *quiver* Q e não da orientação particular das suas flechas. Os diagramas do tipo Dinkyn $\mathbb{A}$, $\mathbb{D}$ e $\mathbb{E}$ possuem um papel fundamental quando se está interessado em fazer tal classificação e além disso aparecem em diversas áreas da matemática na classificação de objetos do tipo finito, por exemplo, na classificação de Álgebras de Lie, Sistemas de Raízes, Grupos de Coxeter e Álgebras *Cluster*.

Teorema de Gabriel. Um *quiver* conexo Q é do tipo de representação finita se, e somente se, o grafo subjacente ao quiver Q é do tipo Dynkin $\mathbb{A}$, $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{E}$.

Neste trabalho apresenta-se uma relação do Teorema de Gabriel com a classificação de formas quadráticas positivas definidas, com coeficientes inteiros, associadas a grafos. Uma outra abordagem desse resultado pode ser desenvolvida na linguagem de módulos usando a Teoria Tilting, como visto em [2, VII.5].

*Bolsista do Programa PET-Matemática

Diagramas Dinkyn $\mathbb{A}$, $\mathbb{D}$ e $\mathbb{E}$:

$\mathbb{A}_n$:
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & n-1 \arrow[r, dash] & n \end{tikzcd}$$

$\mathbb{D}_n$:
$$\begin{tikzcd} & & & & & n-1 \\ 1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & n-2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & & & & & n \end{tikzcd}$$

$\mathbb{E}_6$:
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 4 \arrow[r, dash] & 5 \\ & & 6 & & \end{tikzcd}$$

$\mathbb{E}_7$:
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 4 \arrow[r, dash] & 5 \arrow[r, dash] & 6 \\ & & 7 & & & \end{tikzcd}$$

$\mathbb{E}_8$:
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 4 \arrow[r, dash] & 5 \arrow[r, dash] & 6 \arrow[r, dash] & 7 \\ & & 8 & & & & \end{tikzcd}$$

Referências:

[1] SCHIFLLER,R. **Quiver Representations**. New York City: Springer, 2014.

[2] ASSEM, I.; SIMSON, D.; SKOWRONSKI, A. **Elements of the Representation Theory of Associative Algebras**. Techniques of Representation Theory. New York: Cambridge University Press, 2006.

Sequências de Auslander-Reiten: uma abordagem funtorial

Vitor Emanuel Gulisz
Bacharelado em Matemática - UFPR
vitorgulisz@gmail.com

Professor Edson Ribeiro Alvares (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
rolo@ufpr.br

Palavras-chave: sequências de Auslander-Reiten, sequências quase-cindidas, Teoria de Representações, abordagem funtorial.

Resumo:

O conceito de sequência de Auslander-Reiten (também conhecido como sequência quase-cindida), desenvolvido por Maurice Auslander e Idun Reiten em [5], é fundamental para o estudo da Teoria de Representações de Álgebras de Artin. Em poucas palavras, sequências de Auslander-Reiten são sequências exatas curtas que não cindem, e possuem algumas propriedades particulares. Este conceito também aparece em outras áreas da Matemática, como na Geometria Algébrica. Por exemplo, em [4] é provado que singularidades isoladas existem se, e somente se, existem certas sequências de Auslander-Reiten.

Assim, é de grande importância saber quando estas sequências existem. Em [5] foi provado que se Λ é uma álgebra artiniana e C é um Λ-módulo finitamente gerado, indecomponível e não-projetivo, então existe uma sequência de Auslander-Reiten em $mod\,\Lambda$ (categoria dos Λ-módulos finitamente gerados) que termina em C. Além disso, esta sequência é única, a menos de isomorfismo.

Em [3] Auslander apresentou uma abordagem funtorial para a Teoria de Representações e assim exibiu uma outra demonstração para o fato enunciado acima (por simplicidade, foi assumido que Λ é uma k-álgebra de dimensão finita). Em suma, neste texto são estudadas as conexões entre a categoria $mod\,\Lambda$ e a categoria $((mod\,\Lambda)^{op}, Ab)$ dos funtores contravariantes aditivos de $mod\,\Lambda$ em Ab (categoria dos grupos abelianos). Assim, é possível traduzir informações de $mod\,\Lambda$ para $((mod\,\Lambda)^{op}, Ab)$, e vice-versa, para obter resultados significativos em $mod\,\Lambda$.

O objetivo deste trabalho é apresentar os métodos utilizados por Auslander em [3] e indicar a demonstração do teorema de existência de sequências de Auslander-Reiten, enunciado acima, para álgebras de dimensão finita.

Referências:

[1] ASSEM, I.: **Algèbres et modules. Cours et exercices**. Les Presses de l'Université d'Ottawa, 1997.

[2] ASSEM, I.; SIMSON, D.; SKOWROŃSKI, A. **Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, volume 1**. Cambridge University Press, 2006.

[3] AUSLANDER, M. A functorial approach to representation theory. In: AUSLANDER, M.; LLUIS E.: **Representations of Algebras. Lecture Notes in Mathematics**, v. 944. Berlin: Springer, 1982. p. 105-179.

[4] AUSLANDER, M. Isolated singularities and existence of almost split sequences. In: DLAB, V.; GABRIEL, P.; MICHLER, G.: **Representation Theory II Groups and Orders**. Berlin: Springer-Verlag, 1986. p. 194-242.

[5] AUSLANDER, M.; REITEN, I. Representation Theory of Artin Algebras III Almost Split Sequences. **Communications in Algebra**, v. 3, n. 3, p. 239-294. 1975.

[6] PLATZECK, M.I. Introduction to the Representation Theory of Finite-Dimensional Algebras: The Functorial Approach. In: ASSEM I.; TREPODE S.: **Homological Methods, Representation Theory, and Cluster Algebras. CRM Short Courses**. Springer, 2018. p. 1-20.

[7] ROTMAN, J.J. **An Introduction to Homological Algebra**. New York: Springer-Verlag, 2009.

Análise Matemática e Equações Diferenciais

Banca Avaliadora:

Prof. Alexandre Kirilov (DMAT/UFPR)
Prof. Higidio Oquendo (DMAT/UFPR)
Prof. Paulo Weinhardt (DMAT/UFPR)
Prof. Raul Prado Raya (DMAT/UFPR)
Prof. Roberto Pettres (DMAT/UFPR)
André Vianna Filho (PPGM/UFPR)
Guilherme Tyszka (PPGM/UFPR)
Juliano Damião (PPGM/UFPR)
Wagner Moraes (PPGM/UFPR)

Um Limitante do Número de Pontos Periódicos Atratores de Funções Racionais

André Pedroso Kowacs
Bacharelado em Matemática - UFPR
andrekowacs@gmail.com

Profa. Elizabeth Wagner Karas (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
ewkaras@ufpr.br

Resumo: Um mapa racional complexo é definido pela iteração de uma função racional no plano complexo. Os pontos periódicos de um tal mapa classificam-se em atratores, repulsores e indiferentes, sendo que o número total desses pontos é infinito. Neste trabalho é estabelecido o limitante $2d-2$ para o número de ciclos periódicos atratores e o limitante $4d-4$ para o número de ciclos indiferentes de uma função racional de grau d maior ou igual a 2 definida no plano complexo. Como consequência da existência desses limitantes, é possível mostrar que o número de pontos periódicos repulsores é infinito. Esse resultado é essencial para a caracterização dos conjuntos de Julia, de grande beleza plástica, definidos como o fecho do conjunto dos pontos periódicos repulsores. Na apresentação oral pretendemos discutir os conceitos básicos da iteração de funções racionais e uma ideia da demonstração da obtenção do limitante do número de pontos periódicos atratores de uma forma bastante geométrica. A demonstração consiste, essencialmente, em associar cada ciclo periódico atrator a um ponto crítico do mapa racional, e usar a finitude destes para garantir a finitude dos atratores. Os detalhes podem ser encontrados em [1].

Palavras-chave: Pontos Periódicos, Sistemas Dinâmicos, Funções Racionais.

Referências

[1] KOWACS, A. **Introduction to Julia Sets of Rational Functions**. Monografia de Iniciação Científica, UFPR. Disponível em `https://docs.ufpr.br/~ewkaras/ic/AndreKowacs2018.pdf` Acesso em 03/10/2018.

[2] KARAS, E. W. ***Iteração de Transformações Racionais Aplicada ao Método de Newton no Plano Complexo***. 1994. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade de São Paulo, Brazil, 1994.

[3] SERRA, C. P.; KARAS, E. W. ***Fractais gerados por Sistemas Dinâmicos Complexos***. Curitiba, PR Brazil: Editora Universitária Champagnat, 1997.

[4] FALCONER, K. ***Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications***. England: John Wiley & Sons, 1990.

[5] ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, P. ***Real Analysis***. Taiwan: China Machine Press, 2010.

[6] KALANTARI, B. ***Polynomial Root-Finding and Polynomiography***. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2009.

[7] MILNOR, J. ***Dynamics in one complex variable***. Princeton, New Jersey, United Kingdom: Princeton University Press, 2006.

[8] BAK, J.; NEWMAN, D. J. ***Complex Analysis***. New York, NY, USA: Springer, 1997.

Estabilidade segundo Liapunov

Bianca Elena Wiltuschnig *
Bachareldo em Matemática - UFPR
bianca.elena.w@gmail.com

Prof. Dr. Hudson do Nascimento Lima (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
hudsonlima@ufpr.br

Palavras-chave: Equações Diferenciais, Ponto de Equilíbrio, Estabilidade de Liapunov.

Resumo:

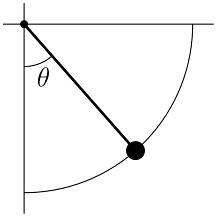
O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento de soluções de equações diferenciais ordinárias sem de fato resolvê-las, com foco no Teorema de Liapunov para estabilidade. Equações diferenciais podem modelar diversas situações ao nosso redor, e, sabendo suas soluções, somos capazes de prever o desenrolar dessas situações no decorrer do tempo. Todavia, determinar soluções explicitamente pode ser uma missão impossível na maioria dos casos. Assim sendo, conseguimos uma boa noção do comportamento dessas soluções através do estudo de pontos de equilíbrio e estabilidade desses sistemas.

Um ponto x_0 é de equilíbrio se, dado um campo $f : E \to \mathbb{R}^n$, o sistema fica em repouso nesse ponto: $\phi(t, x_0) = x_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ou seja, um ponto de equilíbrio do campo é um ponto fixo do fluxo do campo. O ponto de equilíbrio x_0 é estável se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que

$$\forall t > 0 \quad \text{e} \quad x \in E, \quad |x - x_0| \leq r \quad \Rightarrow \quad |\phi(t, x) - x_0| \leq \varepsilon.$$

Podemos ter uma boa noção do significado desses termos pelo exemplo do pêndulo simples. Um pêndulo é composto por uma haste rígida com comprimento l (de massa desprezível) fixa em um ponto, que chamaremos de origem, e uma partícula de massa m no outro extremo.

*Bolsista do Programa PET-Matemática.



Esse sistema pode ser determinado pela equação diferencial (escolhendo um sistema de unidades adequado):

$$\theta'' + k\,\theta' + g\,\mathrm{sen}(\theta) = 0.$$

No espaço de fase obtemos

$$\begin{cases} \theta' = \omega \\ \omega' = -g\,\mathrm{sen}(\theta) - k\omega, \end{cases}$$

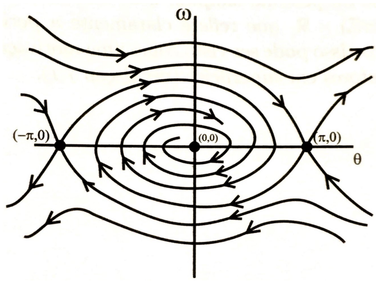
onde g representa a gravidade e $k \geq 0$ é o coeficiente de atrito.

A posição do pêndulo no extremo inferior ($\theta = 0$) é um ponto de equilíbrio estável desse sistema, pois o pêndulo permanece nessa posição se for apenas abandonado nela. A estabilidade segue pois após qualquer pequena perturbação, o pêndulo ficará oscilando, com amplitude θ cada vez menor, até retornar a essa posição e permanecer nela.

A posição do pêndulo no extremo superior ($\theta = \pm\pi$) é um ponto de equilíbrio instável, pois o pêndulo permanece nessa posição se for apenas abandonado nela. A instabilidade segue pois após qualquer pequena perturbação, o pêndulo começará a oscilar, com amplitude θ cada vez menor, até parar na posição extrema inferior ($\theta = 0$).

Qualquer posição intermediária fará o pêndulo oscilar e tender à posição extrema inferior ($\theta = 0$).

Podemos ver o comportamento desse exemplo através de seu retrato de fase, que representa as curvas que são solução do sistema (figura ao lado).



Todavia, nem sempre temos uma situação real como base intuitiva para determinar os pontos de equilíbrio e estabilidade de um sistema dado por equações diferenciais. Em alguns casos é possível concluir estabilidade de pontos de equilíbrio com auxílio de um tipo especial de função, chamada de função de Liapunov.

Definição: Uma função contínua V é dita de Liapunov se, dado x_0 um ponto de equilíbrio de f, V tem um mínimo estrito absoluto em x_0 e V é monótona e não-crescente ao longo de qualquer trajetória $\phi(t,x)$ de f, enquanto essa trajetória estiver no domínio de V.

Com essa definição, chegamos ao teorema que caracteriza esse trabalho:

Teorema de Liapunov: Seja x_0 um ponto de equilíbrio de um campo de vetores $f : E \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se existe uma função de Liapunov de f em x_0, então x_0 é um ponto de equilíbrio estável de f.

Fornecendo assim uma ferramenta que pode ser utilizada em casos práticos para determinar estabilidade, como no caso do pêndulo.

Referências:

DOERING, C. I., LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

LA SALLE, J., LEFSCHETZ, S. **Stability by Liapunov's Direct Method with Applications**. New York: Academic Press Inc., 1961.

Introdução ao estudo de equações diferenciais parciais elípticas: espaços de Lebesgue e de Sobolev

Bruno Pilatti Oleiro *
Bacharelado em Matemática - UFPR
brunopilattioleiro@gmail.com

Prof. Jurandir Ceccon (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
ceccon@ufpr.br

Palavras-chave: Método variacional, Espaço de Lebesgue, Espaço de Sobolev.

Resumo:

Para se estudar equações diferenciais parciais elípticas, existem inúmeras técnicas. Nosso objetivo será usar o *método variacional* que se trata de uma ferramenta desenvolvida na década de 70 e que pode ser usada na obtenção de solução para uma grande variedade de problemas elípticos. Este método é desenvolvido em espaços de Sobolev $W^{1,p}$ que são subconjuntos dos espaços de Lebesgue L^p. Neste trabalho temos como objetivo dar os primeiros passos para o estudo das equações diferenciais com as técnicas modernas, sem no entando resolvê-las neste momento.

Considerando E um conjunto mensurável e $1 \leq p < \infty$, defina o conjunto

$$L^p(E) = \{f : E \to \mathbb{R}\,;\, \int_E |f|^p dx < \infty \text{ com } f \text{ função mensurável}\},$$

ou seja, a coleção das funções mensuráveis f tais que $|f|^p$ é integrável sobre E. O conjunto $L^p(E)$ é um espaço vetorial real e

$$||f||_{L^p} = \left(\int_E |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em $L^p(E)$.

Uma característica importante desse espaço é que ele é *completo* com respeito à norma $||\cdot||_{L^p}$, ou seja, dada uma sequência de funções $\{f_n\}$ em $L^p(E)$ com

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_E |f_n - f_m|^p = 0,$$

*Bolsista do Programa PET-Matemática

existe uma função $f \in L^p(E)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|^p = 0.$$

Outra propriedade importante desse espaço é que ele é *reflexivo*, isto é, $J(L^p(E)) = = L^p(E)''$, sendo J a injeção canônica de $L^p(E)$ em $L^p(E)''$ e $L^p(E)''$ é o espaço bidual de $L^p(E)$. Estas duas propriedades do espaço $L^p(E)$ são fundamentais para a construção do método variacional.

Um conceito básico, mas fundamental para modelarmos uma EDP elíptica nos espaços de Sobolev, é a noção de derivada fraca. A partir de agora iremos considerar $p = 2$ e um intervalo $E = [a, b]$. Dizemos que $u \in L^2([a, b])$ tem derivada fraca se existe $g \in L^2([a, b])$ tal que

$$\int_a^b u\varphi' = -\int_a^b g\varphi, \ \forall \varphi \in C_c^1[a, b],$$

onde $C_c^1[a, b]$ é o conjunto das funções com primeira derivada contínua e com suporte compacto. Uma consequência desta definição é que, se u for diferenciável (no sentido usual), então a derivada da u será a derivada fraca. De fato, como $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, por integração por partes, obtemos que u possui derivada fraca que coincide com a sua derivada usual, pois

$$\int_a^b u\varphi' = u\varphi|_a^b - \int_a^b u'\varphi = -\int_a^b u'\varphi.$$

É fácil ver que a derivada fraca, quando existe, é única (no sentido q.t.p.). Um exemplo de função que não possui derivada mas possui derivada fraca é a função $u : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ com $u(x) = \dfrac{1}{2}(|x| + x)$, e sua derivada fraca é a função u' com

$$u'(x) = \begin{cases} 0 & se \quad -1 < x < 0 \\ 1 & se \quad \ \ 0 < x < 1 \end{cases} .$$

O Espaço de Sobolev é definido por

$$W^{1,2}([a, b]) = \{u \in L^2([a, b])\ ;\ \exists g \in L^p([a, b]) \text{ tal que } \int_a^b u\varphi' = -\int_a^b g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1([a, b])\}.$$

Na definição de Espaço de Sobolev, a função φ é chamada de função teste. O espaço $W_0^{1,2}([a, b])$ é definido pelo fecho do conjunto $C_c^1([a, b])$ em $W^{1,2}([a, b])$. Considerando o espaço $W^{1,2}([a, b])$, podemos definir uma versão fraca para problemas elípticos da forma

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em} \quad [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} , \tag{1}$$

com $f \in C([a, b])$. Em tal versão, u deve satisfazer a equação integral

$$\int_a^b (u'\varphi' + u\varphi) = \int_a^b f\varphi, \tag{2}$$

que é obtida multiplicando ambos os membros da equação diferencial dada em (1) por $\varphi \in C_c^1([a, b])$ e, logo em seguida integrando o resultado de a a b. Uma função $u \in C^1([a, b])$ que satisfaça a equação (2) é dita solução fraca.

Nosso objetivo futuro será verificar que (2) tem solução fraca em $W_0^{1,2}([a, b])$, e os passos para conseguirmos isto são:

i. Definirmos os funcionais $I, G : W^{1,2}([a,b]) \to \mathbb{R}$ definidos por $I(u) = \int_a^b (u'^2 + u^2)$ e $G(u) = \int_a^b uf$. Provaremos que estes funcionais estão bem definidos e são diferenciáveis no sentido de Gateaux.

ii. Definindo a variedade $\mathcal{H} = \{u \in W_0^{1,2}([a,b])\ ;\ G(u) = 1\}$, iremos mostrar o funcional I admite mínimo em $\mathcal{H}$, ou seja,

$$\exists\, u_0 \in \mathcal{H} \text{ tal que } \inf_{u \in \mathcal{H}} I(u) = I(u_0).$$

iii. Desde que I admite mínimo em $\mathcal{H}$, temos pelo método dos Multiplicadores de Lagrange que existem $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u_0 \neq 0$ tais que $I'(u_0) = \lambda G'(u_0)$, o que equivale a

$$\int_a^b (u_0'\varphi' + u_0\varphi) = \lambda \int_a^b f\varphi \Leftrightarrow \int_a^b (v_0'\varphi' + v_0\varphi) = \int_a^b f\varphi, \tag{3}$$

com $v_0 = \dfrac{u_0}{\lambda}$. Neste ponto teremos provado que o problema (1) possui solução fraca.

iv. Usando a última igualdade em (3) e a teoria de regularidade podemos mostrar que $v_0 \in C^2([a,b])$ e por integração por partes obtemos

$$\int_a^b (-v_0''\varphi + v_0\varphi) = \int_a^b f\varphi \Rightarrow \int_a^b (-v_0'' + v_0)\varphi = \int_a^b f\varphi \quad \forall\, \varphi.$$

Finalmente, por técnicas de análise funcional, provaremos que $-v_0'' + v_0 = f$. Isto mostra que o problema (1) possui solução no sentido clássico, isto é, se (1) tem solução fraca então (1) terá solução clássica.

Referências:
[1] ROYDEN, H.L.; FITZPATRICK, P.M. **Real analysis**. 4th ed. Boston, USA : Prentice Hall, 2010.
[2] BREZIS, H. **Analyse fonctionnelle**: théorie et applications. Paris : Dunod, 1999.

Weierstrass e a aproximação de funções contínuas

Christian Junior Mainardes
Licenciatura em Matemática – UEPG
mainardeschristian@gmail.com
Prof. Marciano Pereira (Orientador)
Departamento de Matemática – UEPG
marciano@uepg.br

Palavras-chave: Weierstrass, aproximação de funções, polinômios.

Resumo:

Os polinômios são funções bastante simples e formam uma classe bem comportada dentre as funções contínuas. Entretanto, o conjunto das funções contínuas definidas num intervalo não é constituído apenas por polinômios. Esse trabalho teve como objetivo demonstrar o teorema da aproximação de Weierstrass, que garante que toda função contínua $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ pode ser aproximada uniformemente por uma sequência de polinômios. Foram estudadas três diferentes demonstrações desse teorema, uma utilizando os polinômios de Bernstein, outra usando funções poligonais e a última via convoluções (ou média ponderada). Além disso, foram trabalhadas algumas aplicações desse teorema, como o caso envolvendo o lançamento de uma moeda, chamada interpretação probabilística [3], o problema dos momentos de funções contínuas e da determinação da separabilidade de espaços de funções.

Introdução

O teorema da Aproximação de Weierstrass foi demonstrado inicialmente por Karl Weierstrass, em 1885, e ao longo do tempo foram surgindo várias outras demonstrações para esse teorema, usando métodos diferentes.

A prova feita por Henri Lebesgue em 1897 é uma das mais citadas na literatura, ela se baseia em que toda função contínua em um intervalo compacto pode ser uniformemente aproximada por poligonais, e estas poligonais são limite uniforme de polinômios.

A demonstração do teorema da aproximação de Weierstrass feita por E. Landau utiliza a técnica de regularizar uma função tomando a média ponderada dos valores que ela assume na vizinhança dos pontos de seu domínio. Essa média ponderada é o que chamamos de convolução de uma função com um núcleo conveniente.

Outra prova que também é facilmente encontrada é a que utiliza os chamados polinômios de Bernstein.

Este teorema possui várias aplicações e neste trabalho será feita a aplicação sobre o problema dos momentos de uma função contínua.

1 Requisitos Necessários

Antes de enunciarmos o resultado principal do trabalho, apresentamos alguns conceitos importantes.

Uma função é dita uniformemente contínua em um conjunto X quando, para todo $\mathcal{E} > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x, y \in X, |y - x| < \delta$ implicam $|f(y) - f(x)| < \mathcal{E}$.

Toda função contínua em um intervalo compacto, ou seja, limitado e fechado, é uniformemente contínua.

Convergência uniforme; Uma sequência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f: X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\mathcal{E} > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de $\mathcal{E}$) tal que se $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \mathcal{E}$ seja qual for $x \in X$.

2 Teorema da Aproximação de Weierstrass (TAW)

Toda função $f \in C[a,b]$ pode ser aproximada uniformemente por polinômios de $P[a,b]$. Em outras palavras, dados uma função f contínua em $[a,b]$ e $\mathcal{E} > 0$, existe uma sequência de polinômios p_n tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow |f(x) - p_n(x)| < \mathcal{E}, \forall\, x \in [a,b].$$

3 Diferentes provas do TAW

Apresentamos agora os roteiros e as ideias, omitindo os detalhes técnicos, das três diferentes provas que foram estudadas nesse trabalho.

3.1 Prova segundo Lebesgue: A demonstração de Lebesgue [4, 6] segue o seguinte roteiro: primeiro aproximamos a função contínua por poligonais; depois aproximamos a poligonal por polinômios; em seguida usamos a desigualdade triangular para obter o resultado, que toda função contínua num compacto pode ser uniformemente aproximada por uma sequência de polinômios.

3.2 Prova segunda Landau: A demonstração de Landau [4] tem como roteiro o seguinte: primeiro, consideramos uma função φ real, contínua e positiva, que se anula fora do intervalo $[-\delta, \delta]$, e definimos a *convolução* de f com φ, para todo $x \in \mathbb{R}$, por

$$(f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\varphi(t)dt = \int_{-\delta}^{+\delta} f(x+t)\varphi(t)dt.$$

Segundo, mostramos que φ converge uniformemente a zero, para $|x| \geq \delta$, em que $0 < \delta < 1$. Por fim, definimos

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\varphi(t)dt,$$

e então mostramos que p_n são polinômios e convergem uniformemente para f.

3.3 Prova com os polinômios de Bernstein: A demonstração usando os polinômios de Bernstein [1] segue das seguintes ideias: primeiro definimos os polinômios de Bernstein associados a uma função f,

$$B_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k};$$

depois calculamos os polinômios de Bernstein associados as funções $f_1(x) = x$ $f_2(x) = x^2$; por fim, usando o fato que f é uniformemente contínua e limitada, mostramos que os polinômios de Bernstein de f convergem uniformemente para f.

4 Aplicação

Uma aplicação simples do Teorema da Aproximação de Weierstrass é para o problema de momentos de uma função contínua [2, 5], para isso definimos:
Definição: Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para cada $n \in \mathbb{N}$ define-se o *enésimo momento de* f por:

$$M_n(f) = \int_a^b x^n f(x) dx$$

O TAW é utilizado para mostrar que se os momentos de duas funções são iguais para qualquer $n \in \mathbb{N}$, então as funções são iguais.

Conclusões:

Com o trabalho obteve-se grandes conquistas, como aumento do conhecimento matemático, melhora na exposição de ideias e desempenho no curso. Em relação ao tema da pesquisa, percebemos o quão importante é o Teorema da Aproximação de Weierstrass, pois este historicamente foi provado de diversas formas, por vários matemáticos importantes, o qual teve generalizações e várias aplicações.

Agradecimentos:

À Fundação Araucária, pela bolsa e pela oportunidade de estudar uma matemática mais avançada.

Referências:

[1] AMORIM, V. G. **Aproximação de Funções Contínuas por Polinômios**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal do ABC, Santo André, 2013.
[2] CAROTHERS, N. L. **Real Analysis**. London: Cambridge University Press, 2000.
[3] KULLER, R. G. Coin Tossing, Probability, and the Weierstrass Approximation Theorem. **Mathematics Magazine**, v. 37, n. 4, p. 262-265, 1964.
[4] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
[5] LOPES, W. A. **O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações**. 2009.Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2009.
[6]TEIXEIRA, V. O. **O Teorema de Aproximação de Weierstrass**. Disponível em: http://ptdocz.com/doc/1451636/ Acesso em: 23 nov. 2018

Colisão da Terra com um Cometa: Uma Aplicação dos Cálculos 1 e 2.

Danielly Araujo Pereira dos Santos *
Licenciatura em Matemática - UFPR
daniellyaps97@gmail.com

Dra. Paula Rogeria Lima Couto (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
paulacouto@ufpr.br

Palavras-chave: órbitas elípticas, interseção, cálculo.

Resumo: Este trabalho versa sobre a execução de um projeto de aplicação do Cálculo no estudo de órbitas de corpos celestes proposto em [1]. Mais especificamente, trata-se de decidir se um cometa desconhecido, que está vindo na direção da Terra irá colidir com a mesma, conhecendo-se a posição atual da Terra e do cometa, bem como alguns parâmetros orbitais dos mesmos.

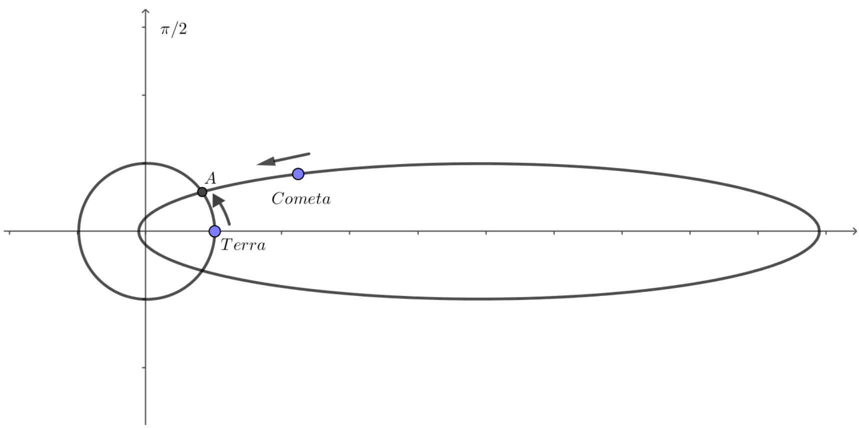


Figura 1: Configuração inicial Terra e Cometa

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET Matemática)

Para realizar tal tarefa, parte-se da configuração inicial das órbitas elípticas da Terra e do cometa (Figura [1]) e ainda de seus parâmetros orbitais: excentricidade, semi-eixo maior e período. A excentricidade e de uma elipse pode ser vista como uma medida de seu achatamento - quando e tende a 0, as elipses tornam-se cada mais circulares, e quando e tende a 1, elas tornam-se cada vez mais achatadas. A Figura [1] mostra uma órbita aparentemente circular para a Terra em torno do Sol, entretanto esta órbita é elíptica, com o Sol sendo um dos focos. A excentricidade da Terra é $0,017$ enquanto que a excentricidade do cometa em questão é $0,98$.

O nosso objetivo será determinar: (a) as equações polares das órbitas elipticas; (b) as coordenadas polares da interseção A; (c) o tempo que a Terra levará para atingir essa interseção; (d) onde o cometa estará quando a Terra atingir a interseção; (e) o quão distante o cometa estará da Terra quando ela estiver em A.

Para compreender e realizar todas as etapas mencionadas, foi feita a dedução da equação polar da elipse, em termos da sua excentricidade, um estudo e dedução da segunda lei de Kepler, uma revisão de técnicas de integração para integrandos que envolvem razões com funções trigonométricas, técnicas numéricas para o cálculo de raízes de equações não lineares, cálculos de distâncias entre outros. Desta forma, este trabalho apresentará a conexão de vários tópicos abordados nas disciplinas de Cálculo 1, 2 e Numérico, num cenário físico possível de se ocorrer e mostra a importância de todos os assuntos explicitados.

Referências

[1] STEWART, J. **Cálculo: Volumes I e II.** Tradução de: MORETTI, A. C.; MARTINS, A. C. G. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007. Título original: Calculus.

Uma aplicação do Teorema de Hahn-Banach na Teoria de Aproximações

Gabriel Alves de Lima *
Licenciatura em Matemática - UFPR
gabalvesdelima@gmail.com

Prof. Dr. Cleber de Medeira (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
clebermedeira@ufpr.br

Palavras-chave: Teorema de Hahn-Banach, Lema de Zorn, Teorema de Müntz.

Resumo:
Um dos teoremas mais importantes da Análise Funcional é o Teorema de Hahn-Banach que, a partir de condições suficientes, garante que um funcional linear definido em um subespaço de um espaço vetorial seja estendido para o espaço todo. Existem diferentes versões desse teorema e diversas aplicações. Nesse trabalho estudamos a versão analítica do Teorema de Hanh-Banach e apresentamos uma aplicação na Teoria de Aproximações.

Vamos enunciar de forma precisa o teorema principal do trabalho. Para isso precisamos da seguinte definição: dado um espaço vetorial real X, um funcional p definido em X é chamado de *funcional sublinear* quando satisfaz:

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para todo x, y em X e
2. $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, para todo $\alpha \geq 0$ em $\mathbb{R}$ e $x \in X$.

Teorema de Hahn-Banach: Seja X um espaço vetorial real e p um funcional sublinear em X, além disso considere f um funcional linear definido em um subespaço vetorial $Z \subset X$, o qual satisfaz

$$f(x) \leq p(x),\ \forall x \in Z.$$

Então f possui uma extensão linear $\overline{f}$ de Z para X satisfazendo:

$$\overline{f}(x) \leq p(x), \forall x \in X,$$

ou seja, $\overline{f}$ é um funcional linear em X, também é majorado por p e $\overline{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in Z$.

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial: PET-Matemática

A ideia central da demonstração do teorema é o uso do Lema de Zorn. Consideramos o conjunto E de todas as extensões lineares g, do funcional linear f, que satisfazem $g(x) \leq p(x)$ e notamos que é possível definir uma relação de ordem em tal conjunto, ou seja, diremos que $h \leq g$ se, e somente se, g é extensão de h. Em seguida obtemos as condições para aplicar o Lema de Zorn, ou seja, provamos que cada conjunto completamente ordenado dentro de E possui elemento limitante, garantindo um elemento maximal $\overline{f}$ no conjunto E, em seguida, provamos que o domínio de $\overline{f}$ é todo o espaço X.

Neste trabalho exibimos uma aplicação do Teorema de Hahn-Banach na Teoria de Aproximações, mais precisamente o Teorema de Müntz, enunciado abaixo:

Teorema de Müntz: Se $\{\lambda_n\}$ é uma sequência de números reais positivos com $\sum \lambda_n^{-1} = \infty$, então o conjunto das combinações lineares das funções t^{λ_n} é denso no espaço de funções contínuas $C[0,1]$, com a norma do supremo.

Referências:

BORWEIN, P.; ERDÉLYI, T. Polynomials and Polynomial Inequalities. **Springer-Verlag**, New York, p. 171-205, 1995.

KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. New Jersey: John Wiley & Sons, 1989.

MÜNTZ, Ch. H., Über den Approximationssatz von Weierstrass. **H. A. Schwarz's Festschrift**, Berlin, p. 303–312, 1914.

OLIVEIRA, C. **Introdução à Análise Funcional**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides: IMPA, 2010.

O Teorema de Monsky

Guilherme Israel Vedana*

Licenciatura em Matemática – UTFPR

gvedana@alunos.utfpr.edu.br

Dr. João Biesdorf (Orientador)

Departamento de Matemática – UTFPR

jbiesdorf@utfpr.edu.br

Dr. Ivan Italo Gonzales Gargate (Coorientador)

Departamento de Matemática – UTFPR

ivangargate@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Lema de Sperner. Valoração 2-ádica. Números 2-ádicos.

Resumo:

O objetivo principal deste trabalho é a demonstração do Teorema de Monsky, que fornece uma bela aplicação do corpo dos números 2-ádicos e de sua valoração na resolução de um problema de Geometria Plana. Esse teorema afirma que se dividirmos um quadrado em triângulos de mesma área, então o número de triângulos é necessariamente par. Para tanto serão necessários alguns resultados da Topologia Combinatória e da Teoria dos Números onde faremos uso dos números 2-ádicos.

Introdução

Consideremos a seguinte situação: queremos dividir um quadrado em n triângulos de mesma área. Se n for par, então podemos dividir os lados horizontais do quadrado em $\frac{n}{2}$ segmentos de mesmo comprimento e em seguida traçar a diagonal em cada um dos $\frac{n}{2}$ retângulos. Mas e se n for ímpar? É possível fazer essa divisão? Em 1965 Fred Richman, não conseguindo obter uma solução para o problema, apresentou-o na *American Mathematical Monthly*. Apesar de parecer um problema simples de Geometria Plana, durante 5 anos ninguém conseguiu resolvê-lo ou encontrar uma referência no qual ele era mencionado até que, em 1970, o matemático Paul Monsky em um *insight* genial apresentou a única solução que se tem conhecimento até os dias atuais. Nesse trabalho apresentaremos a solução descoberta por Monsky.

O Teorema de Monsky

Com o objetivo de demonstrar o Teorema de Monsky construiremos uma pequena teoria. Para tanto faremos algumas considerações iniciais: seja P um

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado – PICME

polígono no plano e seja T uma triangulação de P. Em seguida colorimos cada vértice de T com uma das três cores: vermelho, azul ou verde. Nessa triangulação, uma aresta é chamada $especial$ se suas extremidades possuem as cores vermelho e azul e um triângulo é chamado $completo$ se os seus três vértices estão coloridos um de cada cor.

Lema de Sperner: Seja P um polígono no plano, T uma triangulação de P cujos vértices estão coloridos com as três cores acima. Em relação à T, seja m o número de triângulos completos e n o número de arestas especiais no bordo de P. Então $m \equiv n(mod 2)$. (Ver Figura 1 abaixo.)

O resultado acima é um lema poderoso que pode ser utilizado para uma demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer sem apelar para a Homologia. Nesse trabalho, porém, nos restringiremos apenas ao Teorema de Monsky.

A próxima ferramenta envolve a Teoria dos Números, mais especificamente o conceito de valoração. Inicialmente, sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais, definimos uma função $|\cdot|_2$ pondo $\left|\frac{p}{q}\right|_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, onde $\frac{p}{q} = 2^n \frac{a}{b}$, com a, b ímpares, $\frac{p}{q} \neq 0$ e $|0|_2 = 0$, a qual é denominada valoração 2-ádica, que é uma norma não-arquimediana. Pelo Teorema de Chevalley (ver [5]), é possível completar o corpo $\mathbb{Q}$ em relação à norma 2-ádica, onde obtemos o corpo completo normado $\mathbb{Q}_2$ dos números 2-ádicos. O mesmo teorema, em particular, permite a extensão da função $|\cdot|_2$ à toda a reta real $\mathbb{R}$, de modo a satisfazer as mesmas propriedades que em $\mathbb{Q}$, que é o fato que precisaremos.

Utilizando os conceitos definidos acima, podemos particionar o plano em três conjuntos disjuntos $S_1 = \{(x, y); |x|_2 < 1, |y|_2 < 1\}$, $S_2 = \{(x, y); |x|_2 \geq 1, |x|_2 \geq |y|_2\}$ e $S_3 = \{(x, y); |y|_2 \geq 1, |y|_2 > |x|_2\}$ e em seguida colorimos de vermelho os pontos de S_1, de azul os pontos de S_2 e de verde os pontos de S_3. Sobre esses fatos serão enunciados alguns lemas, quais sejam os principais:

Lema 1: Qualquer reta no plano $\mathbb{R}^2$ contém pontos de no máximo duas cores. (Ver Figura 2 abaixo.)

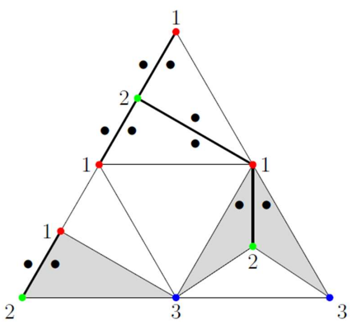


Figura 1. Fonte: [6].

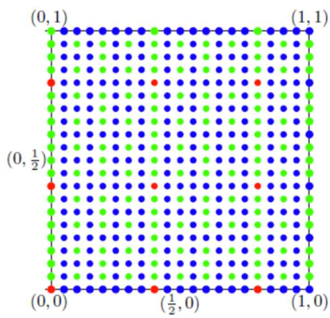


Figura 2. Fonte: [3].

Lema 2: Se um triângulo em $\mathbb{R}^2$ é completo, então sua área satisfaz $|área|_2 > 1$.

Esse lema conclui a teoria necessária para a demonstração do Teorema de Monsky.

Teorema de Monsky: Se um quadrado é dividido em triângulos de mesma área, então o número de triângulos é necessariamente par.

A demonstração deste teorema pode ser esboçada da seguinte maneira: primeiro supomos, sem perda de generalidade, que o nosso quadrado possui vértices $(0,0), (1,0), (1,1)$ e $(0,1)$ e que está dividido em n triângulos de mesma área $1/n$. Em seguida triangulamos o quadrado e consideramos os vértices da triangulação coloridos com as três cores seguindo a regra acima. Os lemas 1 e de Sperner nos garantem a existência de um triângulo completo nessa triangulação, cuja área, pelo Lema 2, satisfaz $\left|\frac{1}{n}\right|_2 > 1$ donde se obtém $|n|_2 < 1$ e portanto n é par.

Conclusão

Este trabalho demonstra como a resolução de um problema aparentemente simples de Geometria pode relacionar ideias e conceitos complexos pertinentes a várias áreas distintas da Matemática, o que corrobora com a tese de que essas áreas estão concatenadas de maneira profunda e elegante. Além do mais, o Teorema de Monsky exemplifica situações que podem ocorrer na pesquisa matemática cuja resolução necessita de uma ampla variedade de objetos matemáticos, justificando a necessidade do pesquisador não limitar-se apenas ao estudo de sua área de pesquisa, mas explorar constantemente os demais campos da Matemática.

Referências:

[1] AIGNER, M. ZIEGLER, G. M. **Proofs from THE BOOK.** 5th. ed. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2014

[2] CEPID CeMEAI. **Íntegra: Seminário de Coisas Legais – números p-ádicos e Teorema de Monsky.** 2015. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=TO-SMI9tccU. Acesso em 12/08/2019.

[3] CONNOLLY, O. F. **One Square and an Odd Number of Triangles.** Disponível em: https://www.maths.tcd.ie/~vdots/teaching/files/MA341C-1819/341CR6-2.pdf. Acesso em 28/08/2019.

[4] KATOK, S. **p-adic Analysis Compared with Real.** 1st. ed. American Mathematical Society – Student Mathematical Library, vol. 27, 2000.

[5] MORAGUES, A. F. **What is... Monsky's Theorem?** Disponível em: https://math.osu.edu/sites/math.osu.edu/files/ferre_MonskyThm_2016.pdf. Acesso em 12/08/2019.

[6] XU, M. **Sperner's Lemma.** Disponível em: https://math.berkeley.edu/~moorxu/misc/equiareal.pdf. Acesso em 12/08/2019.

Modelagem Matemática das Equações de Euler

Gustavo Henrique Silva Sarturi
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
gustavo.sarturi@ufpr.br

Prof. Dr. Roberto Ribeiro
Departamento de Matemática - UFPR

De maneira intuitiva, um fluido é qualquer substância que tem a propriedade de adquirir a forma do recipiente que o contém. De forma rigorosa podemos caracterizar os fluidos como substâncias que possuem baixa resistência às deformações que preservam volume, por exemplo, água, petróleo e gás. Uma característica física relevante dos fluidos é a viscosidade, a qual pode ser interpretada como uma medida da fricção entre suas partículas. Informalmente podemos dizer que a viscosidade mede o quão "grudento" é o fluido. Todo fluido possui uma certa viscosidade, porém em determinados problemas reais é possível modelar o comportamento do fluido sob a hipótese que este possui viscosidade zero – neste caso dizemos que o fluido é ideal.

O objetivo deste trabalho é apresentar a modelagem matemática das equações de Euler, às quais governam a dinâmica de um fluido ideal. As equações de Euler consistem de um sistema de equações diferenciais parciais não linear e são apresentadas abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{c} \rho\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla(\rho\vec{u}) = -\nabla P + \rho\vec{b} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0 \end{array} \right.$$

onde ρ é a densidade, P é a pressão, $\vec{u}$ o vetor velocidade, t o tempo e $\vec{b}$ uma força externa por unidade de massa, por exemplo, a gravidade. Fisicamente essas equações referem-se a conservação da quantidade de momento e conservação de massa, respectivamente.

As equações de Euler apareceram pela primeira vez num artigo publicado por Leonard Euler em 1757 intitulado "Principes géneraux du mouvement des fluides" (Princípios Gerais dos momentos de fluidos). A modelagem matemática das equações de Euler podem ser feita por meio de duas formulações (ou metodologia), a saber, via formulação Euleriana ou Lagrangeana.

Na formulação Euleriana, fixamos uma região no domínio do fluido e medimos as grandezas do escoamento (densidade, pressão e velocidade) para todo instante de tempo nesta região. Já na formulação Lagrangeana, Definimos uma região material, isto é, um conjunto de partículas que serão seguidas no decorrer do tempo. Aconteça o que acontecer estaremos sempre acompanhando esse conjunto de partículas.

Neste estudo foi-se estabelecido estudar norteando-se pela Formulação Euleriana, e, a razão para isso deve-se ao fato desta ser mais simples, pois as ferramentas principais necessárias para sua compreensão são os teoremas clássicos de cálculo vetorial (tais como Teorema de Stokes e Divergência) vistos nos cursos de cálculo.

Deste modo, fixada uma região W de interesse, deduziremos às equações de Euler baseados em dois princípios físicos:

- Conservação de massa: A massa não é criada e nem destruída;
- Conservação da quantidade de momento: A taxa de variação de momento de uma porção do fluido é igual a força resultante nele.

A massa de porção de fluido que ocupa a região W no instante t é dada por:

$$m(W,t) = \int_W \rho(\vec{x},t)\; dV,$$

onde $\rho(\vec{x},t)$ é a densidade do fluido e dV o elemento de volume no plano ou no espaço. Como nesta formulação, a região de domínio W é fixa, não se altera com o tempo, então a taxa de variação de massa em W é

$$\frac{d}{dt}m(W,t) = \int_W \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x},t)\; dV.$$

Por outro lado, seja ∂W a fronteira de W, a massa de fluido que passa através de ∂W por unidade de tempo é determinada pela integral abaixo

$$\int_{\partial W} (\rho\vec{u}) \cdot \vec{n}\; dA,$$

onde dA é a unidade de área, $\vec{u}$ é o campo velocidade e $\vec{n}$ é o vetor normal unitário apontando para fora. Essa interpretação física da integral pode ser obtida facilmente fazendo os estudos das unidades.

Note que:

- Se a massa dentro de W está aumentando, então

$$\frac{d}{dt}m(W,t) \geq 0 \quad e \quad \int_{\partial W} (\rho\vec{u}) \cdot \vec{n}\; dA \leq 0.$$

- Analogamente, se a massa dentro de W está diminuindo, então

$$\frac{d}{dt}m(W,t) \leq 0 \quad e \quad \int_{\partial W} (\rho\vec{u}) \cdot \vec{n}\; dA \geq 0.$$

O Princípio de Conservação da massa afirma que o crescimento de massa dentro de W é igual a taxa na qual a massa está atravessando a fronteira na direção interior de W, disto, obtemos a equação

$$\int_W \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = -\int_{\rho W} (\rho\vec{u}) \cdot \vec{n}\; dS,$$

que é a forma intergral do princípio de conservação de massa. A sua forma diferencial é encontrada utilizando-se do Teorema da Divergência e, após alguns cálculos chega-se a conclusão que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0.$$

Esta é a forma diferencial do princípio de conservação de massa, também conhecida como equação da continuidade.

Às equações que preservam a quantidade de momento são deduzidas seguindo princípios da 2° Lei de Newton.

A quantidade de momento relaciona a massa de um corpo com a sua velocidade, e é dada por $\vec{Q} = m\vec{v}$, onde m é a massa e $\vec{v}$ é a velocidade. Daí, é fácil ver que $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_R$.

Considerando o mesmo domíno fixo W, a força total exercida sobre o fluido dentro de W através da fronteira ∂W é dada por

$$\vec{F}_S = -\int_{\partial W} p(\vec{x},t)\vec{n}\, dA$$

onde P é a pressão exercida pelo fluido. Como $\vec{n}$ aponta pra fora, essa é a razão pela qual a equação acima é negativa. Tomando um vetor $\vec{e}$ unitário apontando para uma direção fixa qualquer, ao calcular $\vec{e}\cdot\vec{F}_S$ e aplicando o Teorema da Divergência, obtemos o seguinte resultado

$$-\int_W \nabla P\, dV$$

que de fato, verificando as unidades, é a força. Tomando $\vec{b}(\vec{x},t)$ uma força externa por unidade de massa agindo sobre o fluido, temos

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \int_W \rho(\vec{x},t)\; b(\vec{x},t)\; dV,$$

um exemplo frequente de força $\vec{b}$ é a gravidade por unidade de massa. Sendo assim, a força resultando agindo sobre W é dada por

$$\vec{F}_R = -\int_W \nabla\cdot P\; dV + \int_W \rho\vec{b}\; dV.$$

Consequentemente, a força resultante por unidade de volume é igual a $-\nabla p + \rho\vec{b}$. Porém, pela 2° Lei de Newton, $\vec{F} = m\;\vec{a}$, assim

$$\vec{F}_R = \int_W \rho\frac{D\vec{u}}{Dt}\; dV.$$

Juntando as relações de igualdade e expandindo a derivada material, obtemos que

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla(\rho\vec{u}) = -\nabla\cdot P + \rho\vec{b},$$

esta é a forma diferencial da conservação do momento. O porquê desta equação ser uma conservação do momento fica mais claro quando vemos a sua forma integral.

Os detalhes das deduções é o tema central deste trabalho. A técnica abortada permitiu abordar o tema de modo a torná-lo mais compreensível possível para estudantes de graduação de Matemática e áreas afins.

Referências

[1] NACHBIN, André. **Aspectos de Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Impa, 2001. 110 p.

[2] NACHBIN, André. **Notas de aula do curso de Dinâmica dos Fluidos**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Impa, 2001. 110 p.

Fractais, números complexos e aplicações.

Isabelle Natalia Rodrigues
Técnico em Petróleo e Gás integrado ao Ensino Médio – UFPR
isabellenataliarodrigues@gmail.com

Profª. Janaina Schoeffel (Orientadora)
Setor de Educação Profissional e Tecnológica – UFPR
janainaschoeffel@ufpr.br

Palavras-chave: fractais, números complexos, aplicações.

Resumo:

Fractais são figuras em que as partes são semelhantes ao todo e possuem alto grau de detalhamento. Eles são gerados através de processos matemáticos, na maioria das vezes com o auxílio da computação gráfica. Os fractais podem se relacionar com diversas áreas e encontram inúmeras aplicações práticas.

O objetivo deste trabalho é estudar os fractais gerados por números complexos, em particular, *os conjuntos de Mandelbrot e Julia,* bem como possíveis aplicações dos mesmos na área da saúde. Para realizar este estudo foi necessário iniciar com o aprendizado da trigonometria e dos números complexos [2], para na sequência estudar os conceitos específicos do tema, com base em [5], entre eles, a definição de fractal, sistema dinâmico, órbita, fronteira, pontos fixos, pontos periódicos e outras noções topológicas.

Ao realizar o estudo dos números complexos, surgiu uma questão: "o que acontece com o gráfico de $z^n = k$ quando $n \to \infty$?". Para responder esta questão, foi feito um estudo, utilizando o programa computacional Geogebra, resultando em um pequeno artigo.

Em seguida, estudou-se o sistema dinâmico da função complexa $f(z)=z^2$, onde foram analisadas as órbitas confinadas (pontos dão origem ao conjunto de

confinamento K) e as órbitas fugitivas (pontos dão origem a bacia de atração do infinito B).

O conjunto de Julia é a fronteira da bacia de atração do infinito B com a bacia de confinamento K. Os conjuntos de Julia das funções quadráticas $f(z)=z^2+c$ são antológicos, cuja forma e a complexidade dependem apenas do número complexo $c=p+qi$ (p e q reais). Para escolher este c, utiliza-se o conjunto de Mandelbrot como um “catálogo de formas”. Os pontos que estão no interior do Mandelbrot dão origem a curvas simples. Já os pontos muito próximos da fronteira do conjunto dão origem a figuras mais complexas e bonitas. Os pontos situados no exterior do conjunto de Mandelbrot originam conjuntos de Julia desconexos. Após os estudos teóricos foram realizadas implementações computacionais, a partir da qual foi obtida a representação gráfica dos fractais estudados, utilizando-se o código obtido em [3].

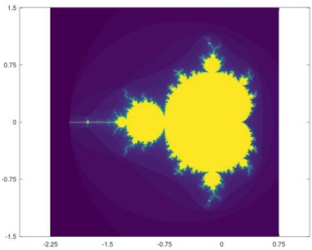


Figura 1 *Conjunto de Mandelbrot*

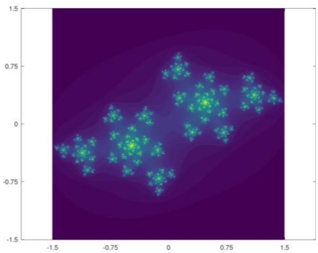


Figura 2 *Conjunto de Julia* com parâmetro c= -0,622612888723 +0,54938674713372*i

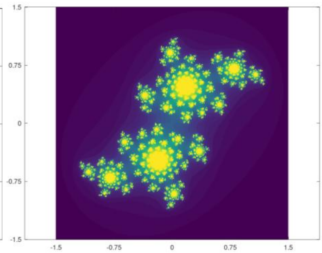


Figura 3 *Conjunto de Julia* com parâmetro c= 0,0314354654 +0,656466874396547*i

Na sequência, pesquisou-se sobre a aplicação dos fractais nas áreas de biologia e medicina, em particular para o estudo do câncer [1]. Mesmo equações simples podem levar à formação de estruturas complexas, como por exemplo o *conjunto de Mandelbrot*, que sempre parece voltar a sua forma original, com muitas repetições de padrões em diferentes níveis de ampliação. A complexidade inerente a esses conjuntos muitas vezes é semelhante a estruturas biológicas. Averiguou-se que o fractal chamado atrator de *Lorenz* pode ser um modelo adequado para o sistema imune quando não afetado pelo câncer, uma vez que ambos se baseiam em “atratores estranhos”. O sistema de *Lorenz*, apesar de envolver uma matemática mais avançada, apresenta comportamento caótico análogo aos fractais estudados previamente. Por isso, o *atrator de Lorenz* foi estudado e implementado computacionalmente [4].

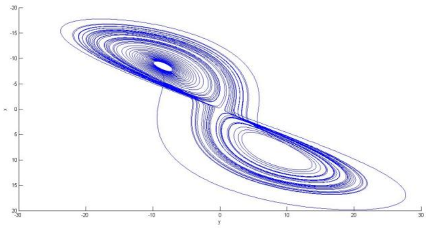


Figura4 *Atrator de Lorenz* visto dos eixos ‘x’ e ‘y’

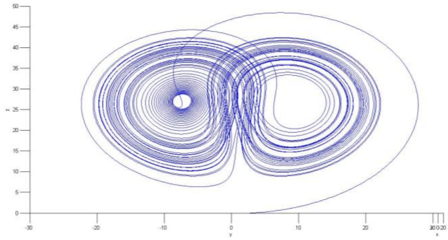


Figura 5 *Atrator de Lorenz* visto dos eixos ‘y’ e ‘z’

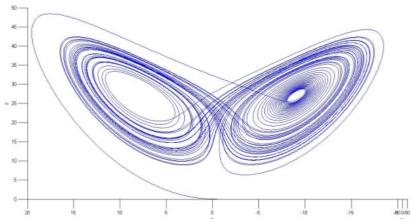


Figura 6 *Atrator de Lorenz* visto dos eixos ‘z’ e ‘x’

Referências:

[1] DALGLEISH, A. The relevance of non-linear Mathematics (chaos theory) to the treatment of cancer, the role of immune response and pontential for vaccines.QJM: An International Journal of Medicine, v. 92, Issue 6, p. 347-359, June 1999.

[2] DANTE, L. R. Matemática: contexto & aplicações, volumes 2 e 3. 2ª edição. São Paulo: Ática, 2014.

[3] KOWACS, A. P. Introduction to Julia Sets of Rational Functions. 2018. Disponível em: <https://docs.ufpr.br/~ewkaras/ic/AndreKowacs2018.pdf> Acesso em: 21/03/2019.

[4] SCHOEFFEL, J. Sistemas dinâmicos discretos e contínuos: o modelo logístico discreto e o atrator de Lorenz. 2009. 79f. Monografia Graduação - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009

[5] SERRA, C. P. e KARAS E. W. Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos. Champagnat, Curitiba, 1997.

Aplicação do último teorema geométrico de Poincaré ao problema dos três corpos

João Vitor Costa Lovato
Bacharelado em Física - UFPR
joaovitorcl1000@gmail.com

Prof. Hudson do Nascimento Lima
Departamento de Matemática - UFPR
hudsonlima@ufpr.br

Palavras-chave: Três corpos, Ponto fixo, Órbitas periódicas, Continuação analítica, Mapa de Poincaré

Resumo:

O problema planar restrito dos três corpos é determinar os movimentos possíveis das massas m_1, m_2 e m_3 de três corpos J, S e P, em que é negligenciada a massa de P, de maneira que o centro de massa só dependa de J, S, e ainda $m_1 >> m_2$. Também é suposto que as órbitas de J e S são circulares em torno do CM, a rotação é a uma velocidade angular constante $\omega^2 = 1$ e a distância é normalizada $|J - S| = 1$ Por simplicidade, façamos $\mu := Gm_2$ e $G(m_1 + m_2) = 1$, de modo que se segue que a massa de J é $1 - \mu$ e de S é μ. Temos as equações de movimento traduzidas na integral de Jacobi:

$$C_J := -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x^2 + y^2) + 2\left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right), \tag{1}$$

em que as coordenadas estão relacionadas ao corpo P no sistema de referência em que os corpos S e J estão parados, o CM está na origem, e $r_{1,2}$ é a respectiva distância de P a J e S. Para grandes valores de C_J (energias baixas de P), a órbita está confinada em discos em torno de S ou, J (regiões de Hill).

Em virtude da dificuldade de trabalhar com a equação acima, Poincaré propôs partir de um caso particular integrável, e perturbá-lo levemente.

Construções em $\mu = 0$

[2] O caso integrável que partiremos é o de dois corpos, que é uma razoável aproximação para μ suficientemente pequeno, ou C_J suficientemente grande. Então, desprezemos a massa de S, isto é, $\mu = 0$. J está na origem do plano x, y, e S, em $(-1, 0)$. A equação (1) toma uma forma simples:

$$v^2 = r^2 + \frac{2}{r} - C_J, \tag{2}$$

em que $r^2 = x^2 + y^2$ é a posição de P no plano x, y e $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, a correspondente velocidade. Estas equações são diretamente integráveis, deste modo, P mover-se-á atraído por J de acordo com a segunda lei de Newton, e valem as leis de Kepler. Observando o comportamento de C_J a partir da equação (2), deduz-se um mínimo do sistema para $C_J = 3$. Restringir-nos-emos ao caso $C_J > 3$. Das equações, decorre a existência de dois círculos de raios $r' < 1$, $r'' > 1$, cujos possíveis vetores velocidades de P ao longo deles são nulos. P mover-se-á dentro do menor, ou fora do maior.

Podemos parametrizar qualquer estado de uma das órbitas elípticas rotativas discutidas anteriormente com três variáveis: a, o eixo semi-maior; θ, o ângulo entre o eixo principal e o eixo x; e φ, a anomalia média de P em sua órbita, medida a partir do eixo principal e na direção da órbita (isto é, φ aumenta em direções opostas para órbitas diretas e retrógradas). Segue das leis de Kepler que:

$$a(t) = a_0, \quad \theta(t) = \theta_0 - t, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + a_0^{-\frac{3}{2}} t. \tag{3}$$

Dado C_J e $\{a, \theta, \varphi\}$, obtemos um estado de movimento completo: a e C_J determinam a forma da elipse em que o planeta orbitará; θ determina a posição dela no quadro rodando x, y; φ a posição do planeta nesta órbita. Por conseguinte, para órbitas permitidas, deduz-se a restrição $a_1 \leq a \leq a_2$ (e o movimento é circular para estes extremos). θ e φ são periódicos. Assim, podemos ver a, θ, φ como coordenadas de um toro oco M, sendo o raio interno dado por a, o ângulo ao longo do eixo principal dado por φ e o ângulo ao longo do eixo menor dado por θ. No toro, as órbitas elípticas traçam espirais de raio constante. Isto gera um fluxo $\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, definido por:

$$\phi(p; t) = (a(t), \theta(t), \varphi(t)), \tag{4}$$

em que $p = (a_0, \theta_0, \varphi_0)$ [1]. Futuramente, interessar-nos-á a extensão $\mu > 0$, à vista disto, o fluxo dependerá desta, destarte, fixemos a notação $\phi(p; t; \mu) := \phi^t(p; \mu)$.

Definiremos, agora, o **mapa de primeiro retorno**. Considere um corte de M na seção transversal $\varphi = 0$ (correspondente a P no periápice). Denotemos esta por Σ, que é homeomorfa ao anel $]a_1, a_2[\, \times \mathbb{S}^1$. O mapa de primeiro retorno nesta seção Σ será uma função $T : \Sigma \longrightarrow \Sigma$, que toma um ponto $p \in \Sigma$, devolve-o através do fluxo ao primeiro retorno dele a Σ. E a definição é independente de μ. Visto que, para um ponto escolhido $p \in M$, $a(t) = a_0$, o mapa será uma rotação no círculo de raio a_0. Em razão da seção $\varphi = 0$ coincidir com $\varphi = 2\pi$, é possível obter a relação entre $p = (a_0, \theta, 0)$ e $q = (a', \theta', 0)$.

$$a' = a_0, \qquad \theta' = \theta - 2\pi a_0^{\frac{3}{2}}. \tag{5}$$

A periodicidade das órbitas de P é traduzida em encontrar pontos fixos de T. De um teorema clássico de dinâmica hiperbólica, concluí-se que as órbitas serão periódicas se a razão dos períodos de $\varphi(t)$ e $\theta(t)$ for racional. Como a varia continuamente entre $]a_1, a_2[$, o sistema, com um C_J fixo e $\mu = 0$, admite infinitas órbitas periódicas.

Uma interpretação geométrica da transformação T

[2] Suponha que a órbita de P não seja uma das circulares para um dado valor de C_J. No momento em que P estiver em um dos ápices, seu vetor velocidade será perpendicular à linha radial à origem. Se a anomalia média for $\varphi = 0$, P estará no periapice. Podemos desenhar uma série de círculos concêntricos em torno de J, e notar que, se P passar tangente a um desses círculos, é um ápice.

O caso $\varphi = 0$ nunca ocorrerá em $r > a_2$ (vetor radial da origem a P). Portanto, não há círculos fora de a_2. Por conseguinte, se P é tangente a um círculo dentro de a_1, ele está claramente no periapice, então desenhamos círculos em ambas as direções dentro de a_1. Finalmente, se P é tangente a um círculo com $r > a_1$ no periapice, então temos necessariamente P em uma órbita direta cujo apoapice está em $r > a_2$, enquanto se P alcança o apoapice em $a_1 < r < a_2$, então, deve ter uma órbita retrógrada e alcançar o periapice em $r < a_1$.

Desenhamos, portanto, apenas círculos orientados na direção direta entre a_1 e a_2. A qualquer momento que P move-se positivamente tangente a um desses círculos, estará no periapice e assim em Σ (e vice-versa). Na reparametrização de Σ T é novamente uma rotação, uma vez que sai P de um periapice para o próximo, ocorrido em raio idêntico. Finalmente, a imagem de T pode ser pensada como um anel se separarmos a coleção de círculos diretos e indiretos em folhas separadas, conectadas na origem.

Tendo as condições para o caso integrável, introduziremos pequenas perturbações com o aumento de μ. Argumentaremos, pela continuidade e analiticidade das equações de Hamilton em μ, que as órbitas circulares limitantes podem ser estendidas analiticamente. Pensando no anel de Birkhoff como muitos círculos limitantes para C_J variáveis (todos maiores do que o C_J definindo a_1 e a_2), tal extensão apenas dos círculos limitantes dar-nos-ia uma descrição de Σ para $\mu > 0$, embora a interpretação inicial seja perdida. Porém, T pode, inda, ser interpretado como os pontos em que o vetor velocidade do corpo P é tangente aos círculos deformados para uma fixa anomalia média, assim, T em um ponto, corresponderia à próxima tangência no mesmo círculo deformado.

Encontrando T no anel perturbado, provaremos e usaremos o último teorema geométrico de Poincaré para garantir que a transformação admita pontos fixos, e, consequentemente, teremos a previsão da existência de órbitas periódicas para $\mu > 0$ e suficientemente pequeno.

Referências

[1] SCHLOM CHRISTOPH. The poincaré map in the circular restricted problem of three-body problem. Janeiro 2014.

[2] BIRKHOFF GEORGE D. The restricted problem of three bodies. 39:34–334, Agosto 1914.

O Conjunto de Cantor: caracterização via base ternária e algumas de suas propriedades topológicas

Leonardo Wrobel *
Licenciatura em Matemática - UEPG
leowcavanis@gmail.com

Prof. Marcos Teixeira Alves (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
mtmarcos@gmail.com

Palavras-chave: Conjunto de Cantor, base ternária, propriedades topológicas.

Resumo: No presente trabalho, apresentamos o conjunto de Cantor. Inicialmente construímos esse conjunto com base nas retiradas sucessivas de terços médios do intervalo [0,1]. Estabelecidas algumas propriedades relativas à base ternária, discutimos uma caracterização dos elementos do conjunto de Cantor através dessa base. Finalmente são exploradas algumas propriedades topológicas desse conjunto.

Introdução

O conjunto de Cantor é definido no intervalo $I = [0,1]$, sendo construído da seguinte forma: primeiramente trisseccionamos o intervalo I nos pontos $\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{2}{3}$. Feito isso, eliminamos o terço médio aberto que corresponde ao intervalo: $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$. Denotamos por C_1 o conjunto de pontos que restaram, ou seja,

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Agora trisseccionamos estes dois intervalos nos pontos: $\dfrac{1}{9}$ e $\dfrac{2}{9}$; $\dfrac{7}{9}$ e $\dfrac{8}{9}$, e retiramos os terços médios abertos desses intervalos, obtendo o conjunto C_2:

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Na Figura 1 apresentamos os primeiros passos da construção do conjunto de Cantor:

*Bolsista PIBIC/Fundação Araucária.

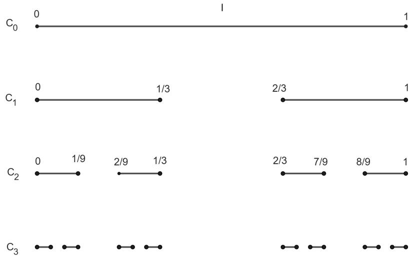


Figura 1: Primeiros passos da construção do conjunto de Cantor.

Observamos que após repetir esse processo indefinidamente, encontraremos uma sequência de conjuntos:

$$C_1, C_2, C_3, ..., C_n, ..., \text{ em que } I \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset ... \supset C_{n-1} \supset C_n \supset ...$$

e C_n é constituído dos intervalos de C_{n-1} excluíndo-se seus terços médios abertos.

Observamos que o número de intervalos retirados em C_n é dado pela expressão 2^n.

Agora definiremos o conjunto com base na construção acima

Definição: O *conjunto de Cantor* C é a interseção dos conjuntos C_n obtidos através da remoção sucessiva dos terços médios abertos no intervalo $I = [0, 1]$, ou seja,

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Outra caracterização do conjunto de Cantor, discutida em [2] e em [5], é apresentada abaixo:

Teorema. Os elementos do conjunto de Cantor possuem expansão ternária usando apenas os dígitos 0 ou 2, isto é,

$$C = \left\{ x \in [0, 1];\ x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}\ para\ i_n = 0\ ou\ i_n = 2 \right\}.$$

Considerações finais

No presente trabalho, além do estudo da representação dos elementos do conjunto de Cantor via base ternária, estabelecemos algumas propriedades topológicas desse intrigante conjunto, dentre elas o fato de C ser compacto, não enumerável e possuir interior vazio.

Referências:

[1] BARTLE, R. G. **Elementos de Análise Real**. Rio de Janeiro: Editora Campos, 1983.
[2] LIMA, E. L. **Análise Real - Volume 1.** Rio de Janeiro, IMPA, 2004.
[3] LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro, SBM, 2009.
[4] ROYDEN, H. L. **Real Analysis**. New York: Macmillan Publishing Co. Inc., 1968.
[5] RUDIN, W. **Princípios de Análise Matemática**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S/A, 1971.

Equações de Diferenças no Ensino Médio

Ana Cleo Motta, Lísia Nunes e Nicole Floriano *
Técnico em Petróleo e Gás integrado ao Ensino Médio - UFPR
anacleomatias@gmail.com e lisianunes2002@gmail.com e nilouise8.nlf@gmail.com

Prof. Janaina Schoeffel (Orientadora)
Setor de Educação Profissional e Tecnológica - UFPR
janainaschoeffel@ufpr.br

Palavras-chave: equações de diferenças, relações recursivas, ensino médio.

Resumo:
O trabalho com equações de diferenças no ensino médio é possível e muito rico. Dentro dessa temática podem ser revistos ou introduzidos diversos temas do currículo, bem como diversas aplicações da teoria em outras áreas, dando significado à matemática estudada na sala de aula e promovendo a insterdisciplinaridade.

Equações de diferenças são relações de recorrência entre valores de uma função com domínio discreto, e constituem uma ferramenta poderosa para representar diversos fenômenos. O estudo iniciou pelas equações de diferenças de primeira ordem, onde foram trabalhadas equações lineares.

As primeiras aplicações abordadas foram as progressões aritméticas, sequências de números reais cuja diferença entre termos consecutivos é constante, $a_n - a_{n-1} = r$, e as progressões geométricas, sequências de números reais cujo quociente de termos consecutivos é constante, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$. Ambas são casos particulares da seguinte equação de diferenças linear com coeficientes constantes:

$$y(n+1) = a \cdot y(n) + b, \quad y(n_0) = y_0, \tag{1}$$

cuja solução é dada por

$$y(n) = \begin{cases} a^{n-n_0} \cdot y_0 + b \cdot \left(\dfrac{a^{n-n_0} - 1}{a-1}\right), & \text{se } a \neq 1 \\ y_0 + b \cdot (n - n_0), & \text{se } a = 1 \end{cases},$$

conforme [2].

Na sequência foi analisado o jogo chamado Torre de Hanói, um exemplo que aparece em [1] e que consiste numa base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O problema consiste em passar todos os discos de um pino para

*Bolsistas IC-EM CNPq.

outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação. O número de discos pode variar sendo que o mais simples contém apenas três. A partir de testes e coleta de dados, construiu-se uma tabela relacionando a quantidade de discos com a quantidade mínima de movimentos para concluir o jogo, para até 7 discos:

Figura 1: Torre de Hanói.

n	$y(n)$
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127

Tabela 1: Quantidade mínima de movimentos $y(n)$ para n discos.

Também observou-se que o processo satisfaz a seguinte relação recursiva:

$$y(n+1) = 2 \cdot y(n) + 1, \quad y(1) = 1,$$

que é novamente um caso particular da equação (1). A partir da tabela e da teoria de sobre equações de diferenças, foi possível exprimir a quantidade mínima de movimentos necessária para passar qualquer número de discos para outro pino, sem depender da quantidade anterior, a saber,

$$y(n) = 2^n - 1.$$

Uma aplicação cotidiana e interessante das equações de diferenças de primeira ordem é a meia-vida. Meia-vida é o nome dado ao tempo necessário para que metade de uma certa substância se desintegre, sendo este variável de acordo com a substância em questão. Tal conceito aparece com frequência em bulas de remédios, caracterísitcas de substâncias radioativas, etc. De forma mais geral, pode-se abordar uma situação com taxa de decaimento $p \in (0,1)$ e aporte de uma quantidade fixa Q_0 a cada período:

$$Q(n+1) = Q(n) \cdot (1-p) + Q_0, \quad Q(0) = Q_0,$$

e decorre, novamente como caso particular de (1), que

$$Q(n) = Q_0 \cdot \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p}.$$

Outra aplicação das equações de diferenças de primeira ordem se dá na matemática financeira, mais especificamente na amortização. Amortização é um processo pelo qual um empréstimo é pago por uma sequência de pagamentos periódicos, sendo que em cada um desses pagamentos parte quita os juros aplicados e parte abate o capital em dívida. Denotando $P(n)$ o capital em dívida no tempo n, por r a taxa de juros e por $g(n)$ o n-ésimo pagamento, a resolução da equação de diferenças

$$P(n+1) = P(n) + rP(n) - g(n), \quad P(0) = P_0,$$

que se diferencia de (1) pelo termo independente não constante, fornece a seguinte fórmula geral para $P(n)$:

$$P(n) = (1+r)^n \cdot P_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{(n-k-1)} \cdot g(k).$$

Ou seja, tendo-se o valor de r, g e P_0 (capital inicial em dívida), é possível calcular o capital em dívida em qualquer tempo, sem depender do capital em dívida no tempo anterior. O gráfico abaixo permite uma melhor visualização do que acontece com $P(n)$ à medida que n aumenta:

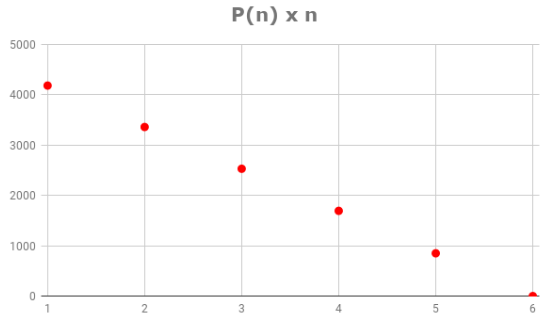


Figura 2: Os parâmetros utilizados foram $P_0 = R\$\ 5.000,00$, $r = 0,8\%$ e $g(n) = R\$\ 856,82$, valor para o qual a dívida se extingue em exatos 6 pagamentos.

Em seguida passou-se ao estudo das equações de segunda ordem, seguindo [3], no qual foram aplicados conceitos da teoria de matrizes e introduzidos conceitos de álgebra linear, como o cálculo de autovalores e autovetores. Essa teoria também se aplica em diversos contextos, como por exemplo a sequência de Fibonacci, propagação de plantas, jogos de azar, teoria da informação, etc. Essas situações serão estudadas e detalhadas nos meses finais do projeto.

Durante o projeto foi utilizada a linguagem LaTeX para construção dos textos, bem como outras tecnologias da informação que permitiram a confecção pelas próprias autoras de todas as imagens apresentadas, o que resultou em uma experiência bastante significativa.

Referências:

[1] CALADO, I. M. G. **Uma introdução às equações de diferenças**. 130 f. Dissertação (Mestrado em Matemática/Educação) – Universidade Portucalense, Porto, 2007.

[2] ELAYDI, S. **An introduction to difference equations**. 3rd ed. New York: Springer, 2005.

[3] LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária. 9ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

Integral de Lebesgue via método de Riesz e O Teorema de Lebesgue

Lucas Matheus Sandeski *
Licenciatura em Matemática - UEPG
lucassan1509@gmail.com.com

Prof. Marciano Pereira (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística -UEPG
marciano@uepg.br

Palavras-chave: Integral de Lebesgue, método de Riesz, Teorema de Lebesgue.

Resumo:
Este trabalho tem por objetivo introduzir a integral de Lebesgue, de grande importância na matemática, por meio do método de Riesz, além de apresentar o Teorema de Lebesgue. O método de Riesz para o ensino da integral de Lebesgue, é um modo mais simples de apresentar a integral de Lebesgue, por utilizar uma construção mais visual, partindo de funções escada, o que pode ser imaginado e exemplificado com facilidade, ao invés da teoria da medida adotada por Lebesgue, complicando sua interpretação. No método de Riez é definido o espaço S_0, composto pelas funções escada em (a, b) limitado. Usamos a área de retângulos para definir a integral em S_0. Em seguida definimos um espaço ainda mais geral que contenha S_0, e que seja possível estender a integral em S_0 para esse novo espaço, preservando propriedades importantes do espaço S_0 e de sua integral. Denotamos esse espaço por S_1, que será composto por funções que são limite, quase sempre, de sequências de funções escada (u_k) crescente e tal que $(\int u_k)$ tenha um majorante. Entretanto, S_1 ainda não é um espaço vetorial, então construímos um outro espaço a partir de S_1 que seja um espaço vetorial. Esse espaço coincidirá com o espaço das funções integráveis a Lebesgue em (a, b). Esse espaço será representado por L. Por fim só estendemos L de um intervalo limitado para um intervalo ilimitado.

Após a ideia por trás da construção da Integral de Lebesgue, por meio do método adotado por Riesz, são apresentados alguns resultados. Sendo eles:

Lema 1 *Seja (u_n) uma sequência crescente de funções de S_1 cuja sequência das integrais $(\int u_n)$ tem majorante. Então (u_n) converge quase sempre para uma função $u \in S_1$ e tem-se ainda que $\int u = \lim\limits_{n\to\infty} \int u_n$.*

O próximo resultado diz que se aplicarmos o mesmo processo de construção para sequências de L não obtemos um novo espaço de funções.

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME).

Teorema 1 ***(Beppo Levi)*** *Se (u_n) é uma sequência decrescente de funções de $L(a,b)$ cuja sucessão das integrais $(\int u_n)$ é limitada inferiormente, então (u_n) converge quase sempre para uma função u de $L(a,b)$ e $\int u = \lim\limits_{n\to\infty} \int u_n$.*

Por fim apresentamos o importante Teorema de Lebesgue, bem como uma aplicação do mesmo.

Teorema 2 ***(Lebesgue)*** *Seja (u_n) uma sequência de funções de $L(a,b)$, convergente quase sempre para a função u. Se existir uma função integrável u_0 tal que $|u_n| \leq u_0$ quase sempre para todo $n \in \mathbb{N}$, então u é integrável e tem-se*

$$\int u = \lim_{n\to\infty} \int u_n.$$

Exemplo 1 *Considere a função v definida em $(0,1)$ por $x(x) = \frac{1}{x}$. Usando o teorema de Lebesgue podemos afirmar que a função v não é integrável. Para ver isto, considere, para cada n a seguinte função definida em $(0,1)$:*

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & \textit{se} \quad x \leq \frac{1}{n} \\ n, & \textit{se} \quad 0 < x < \frac{1}{n} \end{cases},$$

Então, as funções u_n são integráveis e $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Além disso, $|u_n| \leq v, \forall n$. Se v fosse integrável deveríamos ter, pelo Teorema de Lebesgue, que $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 u_n = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Mas isto não é verdade uma vez que para todo n tem-se $\int\limits_0^1 u_n = 1$. Logo v não é integrável em $(0,1)$.

Referências:

[1] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E. A. **A Integral de Lebesgue**. 6. ed. Rio de Janeiro: IM - UFRJ, 2008.
[2] CIPOLATTI, R. **Cálculo Avançado**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2002.

Introdução à Equação de KdV

Lucas Nacif Giacomin *
Licenciatura em Matemática - UFPR
lnacif98@gmail.com

Prof. Roberto Ribeiro Santos Junior (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
robertoribeiro@ufpr.br

Palavras-chave: Ondas Viajantes, Ondas Solitárias, Equação de KdV.

Resumo:

Em 1834 o engenheiro John Scott Russell observou uma onda que viajava através de um canal estreito com velocidade constante sem mudar sua forma durante um longo período de tempo, a qual denominou Onda de Translação. Isto o motivou a conduzir experimentos a fim de investigar tal fenômeno, os quais chamaram a atenção de vários cientistas, entre eles Diederik J. Korteweg e Gustav de Vries, que, em 1895, derivaram a Equação Diferencial Parcial (EDP)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

onde $u(x,t)$ representa a amplitude da onda na posição x no instante t. Esta equação ficou conhecida como a Equação de KdV, a qual modela a onda descrita por Russell, hoje conhecida como Sóliton ou Onda Solitária.

O objetivo deste trabalho consiste em encontrar uma solução viajante para a equação de KdV. Para tal, apresentaremos alguns conceitos básicos da teoria de ondas aquáticas e em seguida deduziremos a solução.

Primeiramente, definimos Onda Viajante como uma onda que pode ser representada unidimensionalmente na forma

$$u(x,t) = f(x - ct),$$

onde c representa a velocidade de propagação da onda. Além disso, dizemos que esta onda é uma frente de onda se, para cada t fixado,

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = k_1 \text{ e } \lim_{x\to-\infty} u(x,t) = k_2.$$

Em particular, se $k_1 = k_2$ dizemos que u é um pulso (veja figura 1).

*Voluntário do Programa de Iniciação Científica

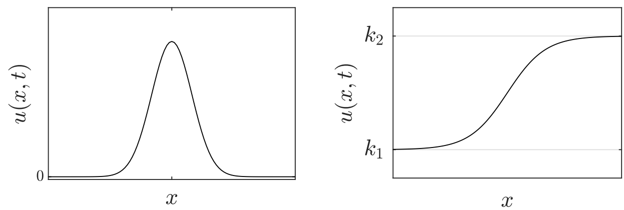


Figura 1: Exemplo de perfis de ondas viajantes: À esquerda um pulso; À direita uma frente de onda.

Buscando por uma onda solitária, supomos que a solução de (1) seja um pulso da forma $u(x,t) = f(x - ct)$ com $k_1 = k_2 = 0$ e $c > 0$. Desta forma, encontramos que f deve satisfazer as condições

$$z \to \pm\infty \Rightarrow f(z), f'(z) \text{ e } f''(z) \to 0,$$

a partir das quais obtemos que a função f deve satisfazer a equação diferencial

$$3(f')^2 = (3c - f)f^2.$$

Donde, sob a hipótese que $0 < f(z) < 3c$, encontramos que

$$f(z) = 3c \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}(\sqrt{c}z - d)\right),$$

para qualquer constante d. Por fim, como d é apenas uma translação horizontal, igualamos d a 0 e obtemos a solução clássica da equação de KdV

$$u(x,t) = 3c \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right).$$

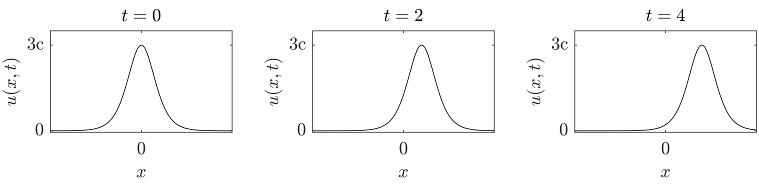


Figura 2: Perfil de $u(x,t)$ em relação ao eixo x ao longo do tempo.

A partir desta solução é fácil ver que há uma relação direta entre a amplitude da onda e sua velocidade, de modo que ondas com amplitudes maiores viajam mais rapidamente. Um exemplo para o perfil da solução de KdV é exibido na figura 2.

O estudo realizado consiste numa introdução à equação de KdV e teve como referência o livro de Roger Knobel [1]. Mais especificamente, a técnica e as ferramentas utilizadas nessa pesquisa foram apresentadas de modo que fossem acessíveis à alunos de graduação e áreas afins.

Referências

[1] KNOBEL, R. **An Introduction to the Mathematical Theory of Waves**. Providence, R.I.: American Mathematical Society, Institute for Advanced Study, 2000.

O Jogo da Vida de John Conway através de Sistema Dinâmico Discreto.

Nathaly Stefanovicz
Licenciatura em Matemática - UFPR
stefanovicz1998@gmail.com

Prof. Eduardo Hoefel
Departamento de Matemática - UFPR
eduardo.hoefel@gmail.com

Palavras-chave: Jogo da Vida, Sitemas Dinâmicos, Iterações.

Resumo:

O ”Jogo da Vida” de John Conway é um exemplo de autômato celular, desenvolvido em 1970 que baseia-se no crescimento caótico e padronizado desse conjunto de organismos biológicos. Ocorre em uma grade bidimensional que consiste em células ”vivas” e ”mortas” que reagem a um conjunto de regras com o passar das gerações (tempo). Apesar de ser chamado de ”jogo”, não se trata de um jogo comum, não possui jogadores, pode não ter um fim e depende exclusivamente de um estado inicial e o conjunto de regras aplicadas a cada iteração. Tais regras definem uma função e podemos iterpretá-la como um sistema, evoluindo em tempo inteiro, dado pelo número de iterações. No jogo, uma configuração inicial corresponde ao instante zero ($f^0(x) = x$) e no instante n; $f^n(x)$.

Sendo assim, temos um Sistema Dinâmico Discreto, onde o conjunto principal são as configurações dentro da grade bidimensional de tamanho escolhido. Através do Sistema, podemos observar suas propriedades e estudar a evolução de configurações específicas. Nesse trabalho iremos estudar Sistemas Dinâmicos explorando suas características, bem como, suas órbitas e a existência de atratores usando como exemplo o ”Jogo da Vida”.

Referências:

BARAVIERA, A.T.; BRANCO, F.M. Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão. Notas para minicurso do II Colóquio de Matemática da região Sul, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande so Sul, 2012.

LIMA, E.L. Curso de Análise, vol. 1 (11a edição), Projecto Euclides, IMPA, 2004.

JOGO DA VIDA DE JOHN CONWAY, disponível em: <https://playgameoflife.com/>. Acesso em: 9 set. 2019.

Séries de Fourier e o problema isoperimétrico

Matheus Daniel Galvão de Melo *
Licenciatura em Matemática - UFPR
matheusdgm@hotmail.com

Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR
fernando.avila@ufpr.br

Palavras-chave: Análise de Fourier, Série de Fourier, Problema isoperimétrico.

O problema isoperimétrico é um problema do Cálculo das Variações que consiste em encontrar qual é a curva que engloba a maior área dentre todas as curvas com um mesmo perímetro. Sua origem está relacionada à fundação de Cartago, por Elisa (também conhecida por Dido), irmã do rei Pigmalião de Tiro. Segundo a lenda, a ela foi dito que ganharia a terra que pudesse cercar com o couro de uma vaca; cortando o couro em tiras finas, ela cercou um grande terredo de forma circular, o qual teria sido o núcleo de sua inicial cidade.

Dido, intuitivamente teria escolhido o círculo para cobrir a área, pois o círculo é, de fato, a curva que engloba maior área dentre todas as curvas de igual perímetro. Esse problema é conhecido hoje como o problema isoperimétrico, ou problema de Dido, o qual mostraremos uma solução usando série de Fourier.

A resolução deste problema, consistirá, basicamente, na resolução do seguinte teorema:

Teorema (A desigualdade isoperimétrica):A área A englobada por qualquer curva simples plana fechada retificável C, de comprimentro L, satisfaz à desigualdade:

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, C for um círculo.

Referências:

FIGUEIREDO, D. G.. Análise de fourier e equações diferenciais parciais, 4ª ED, IMPA. Rio de Janeiro, 2009

*Bolsista do Programa PET-Matemática.

Resolução alternativa para o Problema Simétrico do Autovalor através do Círculo de Mohr

Raquel Ayumi Aita
Engenharia Civil - UFPR
rq.aita@gmail.com

Profa. Dra. Ana Gabriela Martínez (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
ag.anagabriela@gmail.com

Palavras-chave: problema do autovalor, resistência dos materiais, teoria da elasticidade.

Resumo:

Muitos problemas físicos usualmente realizam algum tipo de linearização do modelo afim de poder resolvê-lo de maneira mais simples. A validez dos resultados do novo modelo linearizado está sujeita a certas hipóteses que em geral possuem sentido físico. Naturalmente, as ferramentas da Álgebra Linear desempenham um papel fundamental na resolução destes problemas.

Dentro da Engenharia Civil, o estado de tensões mecânicas em um ponto de um material homogêneo, isotrópico e com deformação elástico-linear é dado pelo tensor de Cauchy:

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & \sigma_y \end{pmatrix}, \tag{1}$$

onde σ_i é a tensão normal atuante na direção i e τ é a tensão de cisalhamento atuante no plano $i \times j$. Usualmente, a matriz encontra-se escrita em relação a uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

A homogeneidade do material faz com que este rompa onde sofre a maior tensão normal. Como as entradas da diagonal representam tais valores, buscamos a direção no plano que maximize cada valor. Matematicamente, isto se traduz no Problema do Autovalor: fixado um operador linear σ sobre $\mathbb{R}^2$, busca-se um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, para qual exista um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ não nulo tal que $\sigma(v) = \lambda v$. Nos melhores exemplos, existe uma base de autovetores γ que permite reescrever a transformação linear em uma forma diagonal. Esta nova forma, equivalente à primeira, é mais limpa e fornece de forma imediata diversas informações de interesse.

Casos como o Tensor de Cauchy, descritos por uma matriz simétrica, são especiais no Problema do Autovalor. Um grande resultado, o Teorema Espectral em sua versão para operadores auto adjuntos, garante a existência de n autovetores dois a

dois ortogonais, que permite a diagonalização da matriz original através de uma matriz ortogonal P, composta pelos autovetores normalizados dispostos em coluna:

$$[\sigma]_\gamma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P^T[\sigma]P. \tag{2}$$

Esse resultado, de grande importância, aparece não apenas no estudo das tensões mecânicas. É conhecido que grande parte das leis físicas envolvem equilíbrio e conservação de energia, e de fato se traduz em simetria matricial.

Porém, na rotina da Engenharia, o problema não é resolvido utilizando a técnica clássica. Emprega-se um método alternativo, chamado Círculo de Mohr. Este método de resolução gráfica consiste no desenho de um círculo centrado em $\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ de diâmetro $\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$. Neste, é possível facilmente encontrar os autovalores e autovetores associados, como mostrado na Figura 1. O resultado é usualmente

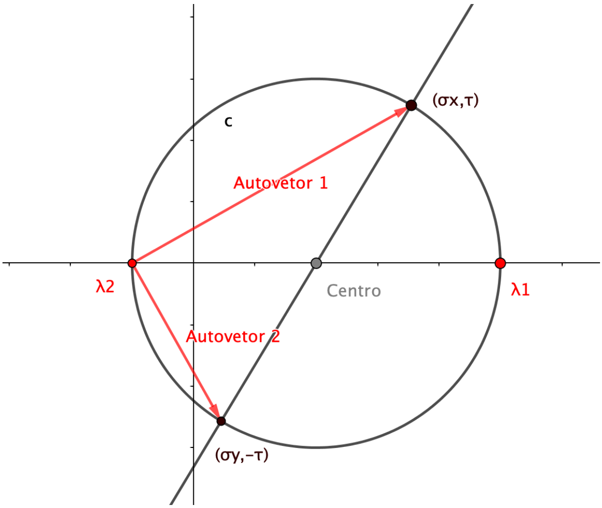


Figura 1: **Trocar figura**

demonstrado através de relações físicas envolvendo as tensões. Porém, é possível prová-lo para um operador auto adjunto qualquer em $\mathbb{R}^2$ apenas com conceitos iniciais de Álgebra Linear e Geometria Analítica. Logo, é possível resolver qualquer matriz simétrica de ordem 2 através do traçado do seu Círculo de Mohr.

Esta ferramenta é consagrada dentro da prática de engenharia devido a diversos parâmetros físicos que podem ser retirados deste espaço paramétrico. Na Mecânica dos Sólidos e na Engenharia Geotécnica, o método é utilizado devido à sua simplicidade e rapidez causada pela desnecessidade de qualquer cálculo. Além disso, é um artifício altamente difundido pelo seu apelo visual, pois é possível visualizar diretamente as direções principais.

A visão limpa de todos os estados da matriz de tensões, dada pela circunferência, é conveniente para o entendimento simplicado do comportamento do material e mesmo critérios de ruptura para diversos materiais (como solos, por exemplo) são enunciados a partir do círculo de Mohr.

Referências:

BEER, F. P., et al. **Mechanics of Materials**, 7th ed. New York: Mc Graw Hill, 2011.

CRAIG, R. F., KNAPPETT, J. A. **Mecânica dos Solos**, 8a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

O Problema de Dirichlet para a equação de Laplace

Vinicius Medeiros Prantl dos Santos *
Licenciatura em Matemática - UFPR
vinicius.medeiros0706@gmail.com

Prof. Jurandir Ceccon (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
ceccon@ufpr.br

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Equação de Laplace, Séries de Fourier.

Resumo:

O problema de Laplace com condição de Dirichlet representa um papel central no desenvolvimento das teorias elípticas. Inúmeros problemas em equações diferenciais parciais, tiveram como base a equação de Laplace para o desenvolvimento de ferramentas em teorias elípticas e problemas de evolução. Iremos considerar o *O Problema de Dirichlet para a Equação de Laplace* dado por

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \Omega \\ u = f, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

sendo Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função real. Nosso primeiro objetivo será encontrar uma solução para este problema. Para isso iremos considerar regiões especiais, isto é, iremos considerar o caso em que Ω é uma região retangular e também quando Ω for um disco.

Estas considerações serão importantes devido à técnica que iremos utilizar: método da separação de variáveis. Este método consiste em supor que a solução $u(x, y)$ pode ser escrita como produto de duas outras funções que dependem apenas de uma variável, isto é, $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Utilizaremos também a teoria das Séries de Fourier e o *Princípio de Máximo* para encontrar a solução e mostrar sua unicidade.

O Problema de Dirichlet no retângulo

Consideraremos inicialmente (1) no caso em que Ω é interior de um retângulo $(0, a) \times (0, b)$ e $f \in C(\partial\Omega)$ se anula para $y = 0, y = b$ e $x = 0$. Com estas considerações problema (1) em Ω fica descrito por

*Bolsista do Programa PET-Matemática

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{em } \Omega \\ u(x,0) = 0 = u(x,b), & x \in [0,a] \\ u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = f(y), & y \in [0,b]. \end{cases} \tag{2}$$

Aplicando o método da separação de variáveis e utilizando as condições de contorno em (2) obtemos as seguintes EDO's de segunda ordem,

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \\ X''(x) - \lambda X(x) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Usando as soluções destas EDO's, as condições de contorno do retângulo Ω dadas em (2) e o *Princípio da Superposição de Soluções* verificamos que uma candidata à solução de (2) será da forma

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \operatorname{senh}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right). \tag{4}$$

onde D_k é uma constante. Pela condição de contorno $u(a,y) = f(y)$, chegamos que

$$u(a,y) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \operatorname{senh}\left(\frac{k\pi a}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{b}\right) = f(y), \quad y \in [0,b]. \tag{5}$$

A série em (5) é conhecida como Série de Fourier em senos. Assim, para que a candidata (4) seja realmente solução do problema (2), precisamos apresentar condições necessárias para a convergência uniforme da série de Fourier em (5).

O Problema de Dirichlet no disco

Um outro caso é o problema de Dirichlet é quando a região é o interior de um disco unitário dado por $\Omega' = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 1\}$. A diferença desse caso para o caso anterior é que não podemos aplicar diretamente o método de separação de variáveis, visto que é necessário que o domínio da função u possa ser escrito como um produto cartesiano. Para atender a esse requisito, transformamos as coordenadas x e y em coordenadas polares, isto é, fazemos $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ onde $r \in [0.1)$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Assim, conseguimos chegar no seguinte problema

$$\begin{cases} v \in C^2([0,1) \times \mathbb{R}) \cap C([0,1] \times \mathbb{R}), \\ v(r, \theta + 2\pi) = v(r,\theta) \;\; r \in [0,1], \;\; \theta \in \mathbb{R}, \\ r^2 v_{rr} + r v_r - v_{\theta\theta} = 0 \;\; r \in [0,1), \;\; \theta \in \mathbb{R} \\ v(1,\theta) = g(\theta). \end{cases} \tag{6}$$

onde $v(r\theta) = u(x,y)$ e $g(\theta) = f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Chegamos então em algo semelhante ao caso anterior, onde aplicando o método de separação de variáveis, podemos reescrever a função v como $v(r\theta) = \phi(r)\psi(\theta)$. Analogamente, conseguimos encontrar um sistema de EDO's cuja justaposição das soluções resulta em

$$v(r,\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta} r^{|x|}. \tag{7}$$

Utilizando a condição de fronteira $v(1,\theta) = g(\theta)$ chegamos em

$$v(1,\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta} = g(\theta). \tag{8}$$

Assim, tomando uma g que satisfaça as condições da convergência uniforme da série de Fourier em (8), conseguimos reescrever (7).Ainda, utilizando a expressão do coeficiente de Fourier c_k em (8) e algumas propriedades da convergência uniforme de séries. Obtemos

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)P_r(\theta - t)dt = (g * P)(\theta), \tag{9}$$

onde

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikt} r^{|k|} \tag{10}$$

é o *núcleo de Poisson* do disco unitário. Utilizando as propriedades da função $v(r,\theta)$ e do núcleo de Poisson é possível mostrar que de fato (7) é solução de do problema (6).

Referências:

[1] IÓRIO, V. **EDP Um Curso de Graduação**. 2.ed Rio de Janeiro, 2005.

[2] FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**.4. ed Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.

[3] BOYCE, W. E; DIPRIMA R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8 ed São Paulo, LTC, 2005.

Análise Numérica

Banca Avaliadora:

Profa. Ailin Ruiz Zarate de Fábregas (DMAT/UFPR)
Prof. Roberto Ribeiro Santos Junior (DMAT/UFPR)
Willian Lesinhovski (PPGM/UFPR)

Decomposição QR para resolver problemas de Quadrados Mínimos

Dyckson Ternoski *, Marina Sayuri Vieira †, Monique Baptista Fragozo ‡ e Otávio Dittrich Moreira §
Bacharelado em Matemática - UFPR
dycksonternoski@hotmail.com , marinasayuri16@gmail.com , mbaptistafragozo@gmail.com e otaviodittrich@gmail.com

Prof. Dr. Abel Soares Siqueira (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
abelsiqueira@ufpr.br

Palavras-chave: Quadrados Mínimos, Matrizes, Decomposição QR

Resumo:

Tendo pontos $(t_i, y_i), i = 1, \dots, n$, obtidos em uma certa coleta de dados, buscamos uma função linear $p(t) = a_0 + a_1 t$ tal que $p(t_i) = y_i$. Na prática, porém, esses pontos não serão colineares, tornando-se impossível encontrar a função $p(t)$ que passe por todos eles. Então, em vez disso, buscamos a reta que melhor aproxime esses pontos, ou seja, a reta que minimize o erro $|y_i - p(t_i)|$ para todo $i = 1, \dots, n$. Isso é equivalente a minimizar a soma dos quadrados dos resíduos e, por esse motivo, nosso problema é chamado de *Problema de Quadrados Mínimos*.

De forma genérica, considerando o sistema $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^n$, se $n > m$, temos um sistema com mais equações do que incógnitas que pode não ter solução. Nesse caso, podemos utilizar dos Quadrados Mínimos para encontrar uma solução aproximada. Basta encontrar o mínimo:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$$

No entanto, resolver tal problema envolve calcular inversa de matrizes, o que é computacionalmente custoso. Assim, podemos utilizar de uma ferramenta para nos ajudar: a *Decomposição QR*! Ela consiste em decompor a matriz A em um produto de outras duas matrizes Q e R, ortogonal e triangular superior respectivamente.

Essa decomposição pode ser encontrada de diversos modos, entre eles estão rotações de Givens e o processo de Gram-Schmidt.

*Bolsista do Programa PICJR (AL)
†Bolsista do Programa PET-Matemática
‡Bolsista do Programa PET-Matemática
§Aluno do Programa PICME

Em nosso trabalho, utilizamos a linguagem de programação Julia para implementar a resolução do Problema de Quadrados Mínimos por meio da decomposição QR, para mostrar como essa tal ”ferramenta” nos ajuda. A decomposição foi feita pelos dois métodos citados acima, os quais serão analisados, comparando o tempo e memória gastos por cada um.

Referências:

[1] WATKINS, D. S. **Fundamentals of Matrix Computations**: 2. Ed. New York: Wiley-Interscience, 2002.

[2] ARAUJO, T. **Álgebra Linear**: Teoria e Aplicações 1. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[3] STRANG, G. **Introduction to Linear Algebra**: 4. Ed. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 2009.

Método de Simpson Adaptativo Para Integrais Duplas

Jaqueline de Souza Ortiz
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
jaqueortiz13@gmail.com

Prof. Abel Soares Siqueira
Departamento de Matemática - UFPR
abelsiqueira@ufpr.br

Palavras-chave: Integração Numérica, Método de Simpson, Integral Adaptativa.

Resumo:

Existem várias razões para utilizar a integração numérica. A principal delas é que a função pode não ter uma primitiva explícita, ou até impossível de calcular, como por exemplo $f(x) = e^{-x^2}$. Neste trabalho apresentaremos o Método de Simpson Adaptativo para integração dupla, a partir da modificação direta do método em uma variável.

Como motivação para o Método Adaptativo, veremos primeiramente o Método de Simpson Repetido em uma variável, que consiste em dividir um intervalo de integração $[a, b]$ em n subintervalos para obter uma melhor aproximação. Dado n par, define-se a Regra de Simpson Repetida com seu termo de erro, como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1,3,...}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,..}^{n-2} f(x_i) + f(b)\right] - \frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\mu), \quad (1)$$

onde $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih, \forall i = 0, ..., n$, e μ é algum número no intervalo (a, b).

As técnicas utilizadas para a aproximação em uma variável podem ser diretamente modificadas para a aproximação de integrais da forma

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy,$$

fazendo aproximações iteradas. Mas como as fórmulas repetidas consideram o intervalo de integração dividido em nós igualmente espaçados, se quisermos integrar uma região com pequena ou grande variação de função, pode não ser o mais apropriado. O erro na aproximação deve ser igualmente distribuído, então é necessário um tamanho de malha menor em regiões de grande variação.

Uma técnica eficiente para esse tipo de problema deve prever a quantidade de variações e adaptar o tamanho da malha. O método de Simpson Adaptativo usa uma

estimativa do erro obtido ao calcular integrais pela Fórmula de Simpson dada em (1) com 3 e 5 pontos.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= S(a,b) - \frac{(b-a)}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\mu_1)\\ &= S\left(a,\frac{b-a}{2}\right) + S\left(\frac{b-a}{2},b\right) - \frac{(b-a)}{180}\left(\frac{b-a}{4}\right)^4 f^{(4)}(\mu_2).\end{aligned}$$

Se $f^{(4)}(\mu_1) \approx f^{(4)}(\mu_2)$, e a diferença $|S(a,b) - S(a,\frac{b-a}{2}) + S(\frac{b-a}{2},b)| < 15\epsilon$, então $S(a,\frac{b-a}{2}) + S(\frac{b-a}{2},b)$ tem um erro menor que ϵ. Se o erro é maior que o aceitável, o intervalo é subdividido em dois e a aproximação é calculada novamente.

Visto que o método adaptativo consegue boas aproximações quando aplicado a funções de uma variável, faremos a extensão para integrais duplas, a fim de obter aproximações melhores que as fornecidas pelas fórmulas repetidas. A fórmula de Simpson em duas variáveis é dada por

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_c^d f(x,y) \approx S(a,b,c,d) := \frac{kh}{9}\Bigg[& f(a,c) + 4f\left(\frac{a+b}{2},c\right) + f(b,c) + 4f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)\\ &+ 16f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) + 4f\left(b,\frac{c+d}{2}\right) + f(a,d) + 4f\left(\frac{a+b}{2},d\right) + f(b,d)\Bigg].\end{aligned}$$

Com S definida acima, definimos o Algoritmo recursivo 1.

Algorithm 1 Simpson Adaptivo em 2 variáveis

procedure SIMPADAP(f, a, b, c, d, ϵ)
  Calcule $I = S(a,b,c,d)$
  Calcule $\overline{x} = \frac{a+b}{2}$ e $\overline{y} = \frac{c+d}{2}$
  Calcule $I_{11} = S(a,\overline{x},c,\overline{y})$, $I_{12} = S(a,\overline{x},\overline{y},d)$ $I_{21} = S(\overline{x},b,c,\overline{y})$, $I_{22} = S(\overline{x},b,\overline{y},d)$
  if $|I_{11} + I_{12} + I_{21} + I_{22} - I| < 15\epsilon$ **then**
    Retorne $I_{11} + I_{12} + I_{21} + I_{22}$
  else
    Retorne SIMPADAP($f, a, \overline{x}, c, \overline{y}, \epsilon/4$) +
      SIMPADAP($f, a, \overline{x}, \overline{y}, d, \epsilon/4$) +
      SIMPADAP($f, \overline{x}, b, c, \overline{y}, \epsilon/4$) +
      SIMPADAP($f, \overline{x}, b, \overline{y}, d, \epsilon/4$)

Iremos comparar o Método de Simpson com Simpson Adaptativo olhando para o número de avaliações de função e a precisão obtida, fazendo o gráfico da precisão desejada pelo número de avaliações necessárias para chegar nessa precisão.

Referências:

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise Numérica*, São Paulo: Cengage Learning, **2013**.

Estudo do Erro do Método LU e Refinamento Iterativo

Letícia do Rocio Oliveira
Bacharelado em Matemática Industrial- UFPR
leticia.rocio5@gmail.com

Prof. Dr. Abel Soares Siqueira (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
abel.s.siqueira@gmail.com

Palavras-chave: Decomposição LU, Refinamento Iterativo, Sistemas Lineares.

Resumo:

A fatoração LU com pivoteamento parcial consiste em transformar uma matriz A com linhas permutadas de acordo com alguma regra, em um produto de matrizes LU, onde L é uma matriz *Triangular Inferior* com a diagonal unitária e U é uma matriz *Triangular Superior*. A permutação da matriz A pode ser descrita definindo uma matriz P pela permutação das linhas da matriz identidade usando as permutações que seriam feitas em A. O resultado é a relação $PA = LU$.

Dado o sistema linear $Ax = b$, multiplicamos por P ao lado esquerdo das duas equações, obtendo

$$PA = Pb.$$

Agora, usando a fatoração LU de A, temos

$$LUx = Pb.$$

Fazendo $y = Ux$, a solução do sistema linear é obtida resolvendo os dois sistemas triangulares

$$\begin{cases} Ly &= Pb, \\ Ux &= y. \end{cases}$$

A resolução de sistemas triangulares é consideravelmente barata, e uma vantagem de fazer uma fatoração matricial é sua reutilização em múltiplos sistemas lineares.

Uma maneira de conseguir uma solução de alta precisão é fazer a fatoração LU em uma precisão computacional menor e utilizar a estratégia de *Refinamento iterativo*. Esta estratégia consiste de calcular o vetor resíduo $r = b - Ax$ com aritmética de ponto flutuante de precisão estendida e resolver o sistema $A\Delta = r$ usando a fatoração LU já calculada. O valor $x + \Delta$ será uma solução melhor para o sistema original, mesmo usando uma fatoração em precisão mais baixa. A estratégia é repetida até que o resíduo fique suficientemente pequeno. Algoritmo 1 descreve o método.

Algorithm 1 Refinamento iterativo

Dado uma tolerância $\epsilon > 0$;
Encontre uma aproximação x para $Ax = b$;
Calcule o resíduo $r = b - Ax$;
while $\|r\| \geq \epsilon$ **do**
    Calcule Δ, solução de $A\Delta = r$;
    Atualize $x \leftarrow x + \Delta$;
    Calcule o resíduo $r = b - Ax$.
end while

Mostraremos a implementação dessa estratégia em Julia e sua comparação com a estratégia mais simples de calcular a fatoração e a solução diretamente na precisão desejada.

Referências:

BURDEN, R. L. e FAIRES, J. D. **Análise Numérica**, São Paulo: Cengage Learning, 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO (UFOP). José Álvaro Tadeu Ferreira. **Notas de aulas Cálculo Numérico** em: <http://www.decom.ufop.br/bcc760/material_de_apoio/notas_de_aulas/notas_sistemas.pdf> Acesso: 08 nov. 2018.

RUGGIERO, M. A. G. e ROCHA LOPES, V. L. **Cálculo Numérico**: Aspectos Teóricos e Computacionais, Rio de Janeiro: Makron Books, 1996.

Método de Euler para Equações Rígidas

Monique Baptista Fragozo *
Bacharelado em Matemática - UFPR
mbaptistafragozo@gmail.com

Prof. Dr. Elias Alfredo Gudiño Rojas (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
egudino@ufpr.br

Palavras-chave: Equações Rígidas, Métodos numéricos, Método de Euler.

Resumo:

Equações rígidas são equações diferenciais cujo comportamento não é bem descrito por métodos explícitos. Tome, por exemplo, o PVI:

$$\begin{cases} u'(t) = -\lambda u(t) + f'(t) + \lambda f(t) \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Seja $t_n,\ n = 0, \ldots, N$ uma partição uniforme do intervalo $[0, T]$ tal que $h = t_{n+1} - t_n$, para todo n, é o passo. Temos também que $h = \dfrac{T - t_0}{N}$, onde N é o número de pontos.

Considerando u_n a aproximação de $u(t_n)$ calculada utilizando o Método de Euler Explícito, obtemos a seguinte equação do método:

$$u_{n+1} = (h\lambda - 1)(f(t_n) - u_n) + f(t_n) + hf'(t_n)$$

Integrando a equação do PVI no intervalo (t_n, t_{n+1}), obtemos por meio do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$u(t_{n+1}) = (u(t_n) - f(t_n))e^{-\lambda h} + f(t_{n+1}) \tag{1}$$

Note que $f(t_n) + hf'(t_n)$ é uma aproximação de primeira ordem de $f(t_{n+1})$. Para que a solução numérica aproxime adequadamente a solução analítica (1), é preciso que o termo $(h\lambda - 1)$ aproxime o comportamento de $e^{-\lambda h}$, assim, devemos ter $(h\lambda - 1) < 1$ e, portanto

$$h < \frac{2}{\lambda}.$$

Perceba que se tivermos um $\lambda >> 0$, precisaremos de um h muito pequeno e, consequentemente, precisaremos de um número N de pontos muito grande, o que é computacionalmente custoso.

*Bolsista do Programa PET-Matemática

Como desejamos uma restrição não tão severa sobre h, uma alternativa, então, é usar métodos implícitos. Se utilizarmos o Método de Euler Implícito no mesmo PVI, a solução numérica aproxima o comportamento da solução analítica sem nehuma restrição sobre h, e, portanto, não serão necessários tantos pontos quanto no caso explícito.

Por que isso acontece? Isso vale para todo equação rígida? Neste trabalho, serão analisados exemplos numéricos para comparar os métodos de Euler explícito e implícito para esse tipo de equação. Os métodos foram implementados na linguagem Julia.

Referências:

[1] QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. **Numerical Mathematics**, Springer, 2007.

[2] ISERLES, A. **A first Course in the Numerical Analysis of Differential Equations**, Cambridge University Press, 1996.

Aceleração da Convergência da Série de Fourier através de Enriquecimento Polinomial

Raquel Ayumi Aita
Engenharia Civil - UFPR
rq.aita@gmail.com

Prof. Dr. Marcos Arndt (Orientador)
Departamento de Construção Civil - UFPR
arndt.marcos@gmail.com

Palavras-chave: séries de Fourier, convergência ótima, série enriquecida.

Resumo:

O problema da vibração mecânica está intimamente associado às funções trigonométricas seno e cosseno. Propostas de função para descrição da oscilação de elementos naturalmente giram em torno da Série de Fourier. O estudo de suas frequências e amplitude tem grande significado físico e são de interesse na Engenharia.

Em geral, a análise de uma estrutura é discretizada em um número finito de pontos que posteriormente são compatibilizados através de condições de contorno do problema. O Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno, por exemplo, são abordagens consagradas para esta modelagem. Assim, almeja-se uma rápida convergência para as funções que compõe a base de solução, bem como a sua estabilidade, especialmente nas extremidades do intervalo estudado.

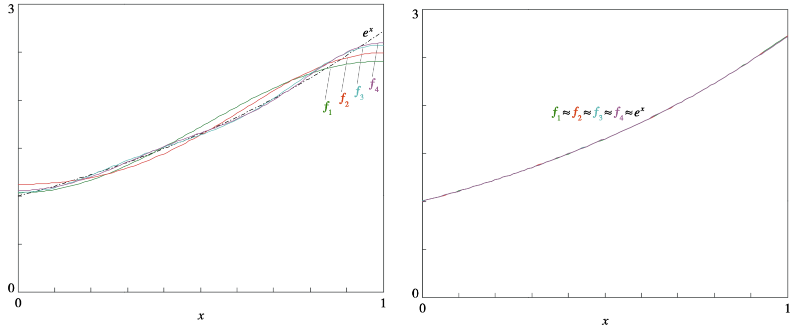
Sabe-se que a convergência da expansão de Fourier de $f(x)$ é prejudicada no entorno de pontos de descontinuidade da função. Um dos problemas de convergência que acontece nesta situação é o fenômeno de Gibbs. Quando contínua em I, é possível escolher entre sua extensão par ou ímpar, sendo a primeira composta apenas por cossenos e necessariamente contínua em $x = 0$.

É possível garantir uma maior melhoria em sua taxa de convergência quando compatibiliza-se $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(L)$, para $k = 0, 1, \ldots, m-1$, com m sendo a classe de continuidade da função. Porém, estas condições de contorno são quase sempre fisicamente irreais. Adota-se então um artifício matemático, chamado de enriquecimento da função. Procura-se uma função auxiliar $\phi(x)$, tal que:

$$f^{(k)}(0) - \phi^{(k)}(0) = f^{(k)}(L) - \phi^{(k)}(L) = 0, \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots, m-1$$

onde $\phi(x)$ também é uma função contínua de classe m, pois agora a série de Fourier em questão é a expansão da função $(f - \phi)(x)$.

Aplicando-se o enriquecimento polinomial de segunda ordem ($\phi(x)$ como um polinômio de quarto grau) à função $f(x) = e^x$, obtém-se as aproximações mostradas na Figura 1. O erro da aproximação decresce monotonicamente, sendo registrado 5% de erro relativo para a expansão convencional de um termo, contra 0,002% de erro quando enriquecida. Além disso, a função $\phi(x)$ pode ser recursivamente construída, o que representa um grande ponto positivo em termos de implementação.



(a) Sem enriquecimento (b) Com enriquecimento

Figura 1: Expansão de $f(x) = e^x$ - Retirado de MONTEIRO (2017)

Espera-se que a incorporação deste artifício matemático nos métodos de análise estrutural melhore a sua taxa de convergência, permitindo resultados mais precisos e confiáveis com um menor número de iterações, através da compatibilização dos valores de contorno.

Referências:

MONTEIRO, F. A. C. **Construção sistemática de conjuntos de funções hierárquicas C^m segundo a teoria da série de Fourier**. 2017. 113f. Tese de Doutorado em Infraestrutura Aeroportuária - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**, 4a ed. Pearson, 2008.

Introdução às Técnicas de Regularização em Problemas Inversos Discretos

Stephanie Caroline de Souza Pereira *
Bacharelado em Matemática Industrial- UFPR
stephaniec.desouza@gmail.com

Profa. Ana Gabriela Martínez (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
agm@ufpr.br

Palavras-chave: Técnicas de Regularização, Álgebra linear numérica, Problemas mal-postos

Resumo:

Os Problemas Inversos aparecem em diversas áreas do conhecimento e de forma geral, consistem em determinar as causas que produzem certos efeitos observados. Umas das principais características destes problemas é que eles não satisfazem pelo menos algum dos três postulados de Hadamard para problemas bem postos, isto significa que nos problemas inversos pode ocorrer que não exista solução, que no caso de existir esta não seja única ou bem que a solução não dependa continuamente dos dados do problema. A estabilidade é necessária para garantir que pequenas variações nos dados resultam em pequenas mudanças na solução, portanto a perda da estabilidade introduz sérias dificuldades na hora de resolver numericamente um problema inverso.

Uma das estrategias mais usadas para mitigar os problemas que resultam da perda da estabilidade na solução dos Problemas Inversos, é um conjunto de técnicas matemáticas que recebe o nome de *Métodos de Regularização*. A ideia central destes métodos consiste em aproximar a solução do problema inverso mal-posto, por uma sequência de problemas bem-postos aproximados.

Formalmente, o problema inverso consiste em determinar os parâmetros x a partir dos dados observados y, relacionados através do modelo descrito pelo operador $\mathcal{A}$, isto é: $\mathcal{A}x = y$. Quando o operador $\mathcal{A}$ é linear, o problema inverso é dito linear. A maior parte das técnicas de regularização consiste em construir uma familia de operadores dependentes de um parâmetro de regularização $\mathcal{R}_\lambda$, tal que no limite quando o parâmetro λ tende a zero, estes aproximem à inversa do operador $\mathcal{A}$, quando esta inversa existir, ou à pseudo-inversa de $\mathcal{A}$. A escolha do parâmetro de regularização λ é crucial neste tipo de métodos, já que ele estabelece um equilíbrio entre a fidelidade

*Bolsista do Programa Meninas na Matemática: Procuram-se Arletes. Iniciação Científica - UFPR/CNPq

da solução aos dados observados e a estabilidade. Entre os métodos mais destacados na literatura para a determinação de λ encontram-se o princício da discrepância de Morozov, a validação cruzada generalizada e o método da curva L.

Neste trabalho se apresentam algumas das técnicas de regularização mais usadas para resolver problemas inversos discretos e lineares, entre elas a regularização de Tikhonov, a regularização dos valores singulares amortecida e a regularização da valores singulares truncada ou TSVD. Esta última técnica é de uso estendido em processamento de imagens digitais. Em particular, será aplicado o método de regularização da TSVD no problema da compressão de imagens.

Referências:

BAZAN, F.S.; BORGES, L. Métodos para problemas inversos de grande porte. Notas em Matemática Aplicada, Sbmac, Curitiba, v. 39,2009.

HANSEN, P. C. Discrete Inverse Problems: Insight and Algorithms Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA. 2010.

POOLE, D. Álgebra linear: uma introdução moderna. Cengage Learning BR, 2da edição. 2016.

WATKINS,D. S. Fundamentals matrix computations. New Jersey: John Wiley Sons, 2da edição. 2002.

Educação Matemática

Banca Avaliadora:

Prof. Elenilton Vieira Godoy (DMAT/UFPR)
Profa. Elisângela de Campos (DMAT/UFPR)
Profa. Leônia Gabardo Negrelli (DAMAT/UTFPR)
Profa. Maria Lucia Panossian (DAMAT/UTFPR)
Profa. Maria Tereza Carneiro Soares (DEPLAE/UFPR)
Profa. Priscila Kabbaz Alves da Costa (DTPEN/UFPR)
Profa. Tânia Bruns Zimer (DTPEN/UFPR)
Prof. Willian Valverde (DMAT/UFPR)
Alessandra Hendi dos Santos (PPGECM/UFPR)
Bruno Teilor (PPGECM/UFPR)
Deinise Caroline Gomes da Silva (PPGECM/UFPR)
Deise Leandra Fontana (IFPR/PPGECM/UFPR)
Edicleia Xavier da Costa (PPGECM/UFPR)
Enderson Guimarães (PPGE/PUC-PR)
Fernanda Hillman (PPGE/UFPR)
Jennifer de Souza (PPGECM/UFPR)
Laura Leal Moreira (PPGECM/UFPR)
Luciana Zaidan (PPGECM/UFPR)
Luciane de Fátima Chyczy (PPGECM/UFPR)
Neumar Albertoni (PPGFCET/UTFPR)
Rafael Moreira (PPGECM/UFPR)
Renata Balbino (PPGECM/UFPR)
Stephanie Basso (PPGFCET/UTFPR)

PROGEOPINHO
Projeto de Geometria do Professor Pinho

Alésio Costa Júnior, Amanda Lopes do Espirito Santo, Getulio Pinto da Rosa, Inácio José Azambuja de Ávila, Lívia Tudela Del Mastre
Licenciatura em Matemática – UFSC
alesiocosta@hotmail.com, amandaesanto2008@hotmail.com, getuliopinto87@gmail.com, inacioavila@gmail.com, liviatdmastre@gmail.com

Monica Maria Funk Drechsler, Vinícius Scussel Accordi
Bacharelado em Matemática – UFSC
monicadrechsler@hotmail.com, vinicius.scussel.accordi@gmail.com

Profº. Jose Luiz Rosas Pinho (Orientador)
Departamento de Matemática – UFSC
pinho@pet.mtm.ufsc.br

Palavras-chave: Geometria, investigação, criatividade.

Resumo:

O ProGeoPinho teve sua primeira faísca nas aulas de Geometria Quantitativa, disciplina essa apresentada no início do curso de Matemática da UFSC ministradas pelo professor José Luiz Rosas Pinho. Nestas aulas, professor trazia problemas de geometria como atividades avaliativas, não necessariamente ligadas ao conteúdo, mas sempre ligadas ao problema inicial. Essas atividades traziam reflexões para a sala de aula. O professor utilizava em suas aulas o software GeoGebra, uma excelente ferramenta para investigações de problemas geométricos, facilitando para que os alunos visualizassem detalhes que muitas vezes eram imperceptíveis na lousa. Tantas foram as discussões em aula, que no primeiro semestre de 2019, o professor Pinho, junto com alguns alunos iniciaram o ProGeoPinho. Tal projeto se baseia em encontros semanais na sala do PET – Matemática – UFSC, nos quais o grupo de alunos, juntamente com o professor, buscam soluções para problemas geométricos e durante o processo geram novos problemas, contribuindo para a formação acadêmica do grupo e para a pesquisa que o professor vem fazendo para sua tese de doutorado, que visa estudar como funciona a criatividade na resolução e criação de problemas geométricos.
Ao longo do primeiro semestre de 2019 o grupo se concentrou no seguinte problema:
Dadas três circunferências tangentes duas a duas, construir um triângulo de forma que seus lados tangenciam duas das circunferências simultaneamente, e reciprocamente, dado um triângulo qualquer construir três circunferências tangentes entre si, duas a duas, de forma que cada uma delas seja tangente a dois dos lados do triângulo.

O grupo dividiu o problema em três casos, o caso equilátero, o isósceles e o escaleno, facilitando a abordagem e compreensão, permitindo assim que chegássemos a uma solução para um triângulo qualquer.

Atualmente o grupo está trabalhando no seguinte problema:

Dado um triângulo qualquer inscrever um triângulo equilátero de forma que cada vértice deste triângulo equilátero esteja sobre um lado do triângulo qualquer. Encontrar os casos de áreas máximas e mínimos do triângulo equilátero.

Foram encontradas algumas propriedades interessantes e continuamos tentando descobrir e provar mais coisas, aprofundando e questionando os "rastros" que o problema vem evidenciando ao longo dos nossos estudos.

Assim o projeto, como uma ferramenta de pesquisa para a tese do professor, tem como objetivo estabelecer processos que permitam promover e desenvolver a criatividade dos estudantes do ensino superior, não somente na resolução de problemas, mas também, na formulação/invenção/criação de problemas em geometria. Segundo Kilpatrick (1987) "a experiência de descobrir e criar seus próprios problemas deveria ser parte da educação de todo estudante".

Dados os conquistados avanços até o momento, o projeto continuará com enfoque nos seguintes temas: descobrir como o problema das três circunferências inscritas em um triângulo, pode ser reelaborado para 3 dimensões, os participantes acreditam que a separação em casos (equilátero, isósceles e escaleno) no espaço segue uma correlação com o caso do plano; desenvolver mais problemas de construção em geometria plana. Na parte de organização pretendemos que o projeto continue ao longo dos anos com novos alunos e novos integrantes, contribuindo no estudo e aprendizado da geometria plana na graduação.

Referências:

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, vol. 5, 1993, p. 37-65.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R.; FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 2, p. 10-34, 2013b.

KILPATRICK, J. **Problem formulating: Where do good problems come from?** In A. H. Schoenfeld (Ed.). Cognitive science and mathematics education, Hillsdale, NJ: 1987. p. 123-147

Jogos Matemáticos: Expectativa X Realidade

Alfred James Dias Albon[1], Leonardo Antonio Borgo[1], Keith Gabriella Flenik Morais[1] e Elisângela Aksenen Zarpelon[2]
Licenciatura em Matemática – UTFPR-CT e
Colégio Estadual Jayme Canet - SEED/PR
borgo@alunos.utfpr.edu.br, alfred_james_dias@outlook.com, keithgabriella@hotmail.com, elisangela.aksenen@gmail.com

Edna Sakon Banin e Luciana Schreiner de Oliveira (Orientadoras)
Departamento Acadêmico de Matemática – UTFPR-CT
ednas@utfpr.edu.br e *lu_zan1@hotmail.com*

Palavras-chave: Jogos Matemáticos, Ensino de Frações, Operações com Números Inteiros.

Resumo:

Como parte integrante das atividades do programa de bolsas Residência Pedagógica, estudantes residentes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba (UTFPR-CT) realizaram regências sobre os conteúdos de operações com números naturais, inteiros e racionais com turmas de sétimos anos, uma vez que nas datas de aplicações dos planos de aula eram os conteúdos que estavam sendo ensinados, de maneira que os jogos iriam ajudar na consolidação dos mesmos. Neste sentido, este relato realizado pela metodologia de estudo de caso (LÜDKE & ANDRÉ, 2013) aborda algumas aulas aplicadas no Colégio Estadual Jayme Canet, localizado no bairro Xaxim, Curitiba/PR em três encontros com as turmas de sétimos anos A e B durante o início de 2019.

Os encontros seguiram o mesmo roteiro para ambas turmas: uma aula destinada para revisar os conteúdos pela metodologia aula expositiva dialogada (NUNES, 2012) e, outra, com aplicação de um jogo matemático (MUNIZ, 2010). A aplicação de jogos surgiu como fator atrativo de aprofundamento e autonomia dos estudantes, uma vez que apresentavam dificuldade em focar nas aulas.

Nunes (2012) define a aula expositiva dialogada aquela em que existe a participação ativa dos estudantes, situando-os e considerando seus conhecimentos prévios. Em outras palavras, foram feitos alguns exercícios no quadro sobre operações com números naturais, inteiros ou racionais que foram resolvidos com a participação dos estudantes. Além disso, inclui-se também uma forma de avaliação, como uma atividade complementar que, neste caso, foram os jogos matemáticos.

Conforme as concepções de Muniz (2010), são necessários cinco elementos para serem considerados jogos matemáticos: “base simbólica, regras, jogadores, um investimento/risco e uma incerteza inicial quanto aos resultados.” (MUNIZ, 2010, p. 42). Brenelli (1996) apoia-se nas teorias piagetianas para justificar a metodologias

---

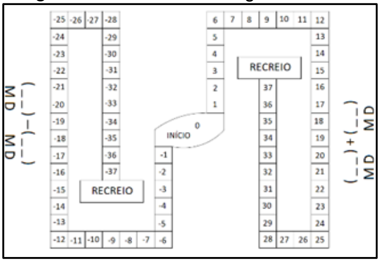
[1] Bolsistas do programa Residência Pedagógica.
[2] Professora preceptora Residência Pedagógica.

de jogos matemáticos: elas oportunizam que os estudantes apresentem lacunas (ausência de um conhecimento específico) ou cometam erros. Conforme Piaget (apud BRENELLI, 1996), estas lacunas ou erros causam um “desequilíbrio” nas estruturas de pensamento das crianças, ou seja, precisam ser feitas novas estruturas de pensamento para assimilar as novas informações recebidas. Assim, elas precisam se “equilibrar” com os conhecimentos prévios, fazendo as crianças passarem por superações cognitivas.

Figura 1 - Aplicação do “Jogo do Recreio”

Fonte: Os próprios autores.

Figura 2 - Tabuleiro do “Jogo do Recreio”



Fonte: Os próprios autores.

Figura 3 - Crianças jogando “Dominó de Frações”.

Fonte: Os próprios autores.

Figura 4 - Crianças jogando “Corrida de Frações”.

Fonte: Os próprios autores.

O primeiro encontro aconteceu no dia 13 de março com a aplicação do “Jogo do Recreio” (Figuras 1 e 2). A primeira aula iniciou-se com exemplos de aplicações e expressões numéricas naturais e inteiras. A maioria dos alunos chegou no resultado esperado, porém de modos diferentes: alguns resolveram da esquerda para a direita e outros por agrupamentos de números positivos e negativos. Por fim, compreenderam que chegariam ao mesmo resultado. A segunda aula, seguiu-se com a aplicação do jogo, que abordava soma e subtração com os números inteiros. De uma forma geral, ambas as turmas apresentaram dificuldade em entender a ordem das operações do tabuleiro. De forma particular, os alunos da turma A -onde se encontram um estudante autista (que não quis participar e ficou na sala de recursos), um cadeirante e uma aluna com atraso cognitivo- conseguiram entender a regra de sinais. Por outro lado, na turma B, os alunos desrespeitaram as regras: somaram os dados e as moedas sem considerar em qual casa do tabuleiro estavam.

O segundo encontro aconteceu no dia 24 de abril com a aplicação do jogo “Dominó de Frações” (DOMINÓ, 2015, adaptado) (Figura 3) que abordava equivalência de números decimais, frações e porcentagens. Na primeira aula, em ambas as turmas, os estudantes participaram ativamente: sanaram dúvidas sobre simplificação, soma e subtração de frações. Os exercícios de revisão foram as próprias expressões que estavam nas peças de dominó para que pudessem jogar com mais facilidade e rapidez. Na segunda aula, aplicou-se o jogo de modo que, novamente, a turma B não atendeu às expectativas: trapacearam com os colegas, amassaram e danificaram o material. Por outro lado, a turma A realizou a atividade com êxito: respeitaram as regras e criaram juntos estratégias para alcançar a vitória. Fez-se necessário um comentário feito pela professora para a turma B sobre honestidade vinculando os pais, ou seja, como eles (os estudantes) se sentiriam se os pais deles fossem extorquidos.

No dia 08 de maio aconteceu o terceiro encontro, com a aplicação do jogo “Corrida de Frações” que abordava as concepções das partes de uma fração: numerador e denominador; disponível no Laboratório de Ensino de Matemática da UTFPR-CT. Na primeira aula, em ambas as turmas, percebeu-se que os estudantes estavam cansados de operações com frações, mas como alguns ainda apresentavam dificuldade, fez-se necessário frisar esse assunto novamente.

Devido ao comportamento desrespeitoso apresentado anteriormente pela turma 7º ano B, ela foi alertada de que se não cumprisse as regras e zelasse o material, ficaria sujeita a não ter mais essas oportunidades até o fim do semestre. Enquanto na turma A os estudantes demonstraram respeito com os residentes, na turma B apresentaram desrespeito: causaram tumulto e perderam peças de tabuleiro. Sejam por motivos de desinteresse ou competitividade, a turma B ficou privada de jogar novamente até o fim do semestre, conforme o aviso previamente dito.

Portanto, o primeiro jogo foi considerado o mais difícil pela confusão com as regras e operações; acredita-se que seria mais eficaz com crianças mais velhas. No segundo jogo foi mais fácil perceber a aprendizagem dos estudantes, já que conseguiam identificar as equivalências de cor. Além disso, foi o jogo que apresentou mais interesse por parte dos alunos, pois queriam continuar a jogar mesmo após o encerramento. Por fim, o terceiro jogo apresentou-se o menos interessante para as turmas, já que foi o que causou mais tumulto. Percebe-se que a aplicação de jogos matemáticos nessas duas turmas se mostrou eficiente tanto na turma A, onde os alunos aprenderam não só a matemática em si, mas também a competir com honestidade, quanto na turma B, na qual os alunos, infelizmente, não souberam aproveitar a oportunidade que lhes foi concedida. Deste modo, concluiu-se que para este tipo de aula, o(a) professor(a) deve pensar além do planejamento, mas também o comportamento da turma perante uma aula diferenciada (no caso, com jogos).

Referências:

BRENELLI, Rosely Palermo. **O jogo como espaço para pensar: a construção de noções lógicas e aritméticas.** 9. ed. Campinas, SP: Papirus, 1996.

DOMINÓ DE fração e porcentagem - Jogos matemáticos. Professor 970, 2015. Disponível em: <http://professor970.blogspot.com/2015/08/domino-de-fracao-e-porcentagem-jogos.html> Acesso em: 24 abr. 2019.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação: Abordagens Qualitativas.** 2. ed. Rio de Janeiro: E. P. U., 2013.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

NUNES, Teresa. **A Aula expositiva dialogada.** Pós-graduando, 2012. Disponível em: <https://posgraduando.com/as-diferencas-entre-aulas-expositivas-e-aulas-dialogadas/> Acesso em 17 ago. 2019.

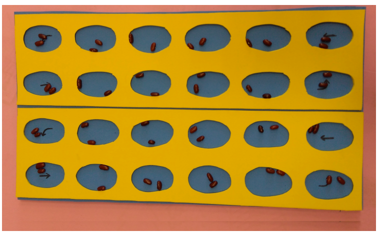
Matemati*cATIVA* 2019
Matemática Divertida

Amanda C. Foetsch, Bruno M. Schwartsburd, Laís G. B. Maciel e Moroni M. B. Bora *
Estudantes de Bacharelado e Licenciatura em Matemática - UFPR
amandafoetsch@gmail.com, bruno-m.s@hotmail.com, laisgbm@gmail.com e moronibora@gmail.com

Profa. Ximena Mujica (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
xmujica@ufpr.br

Palavras-chave: educação, interdisciplinaridade, jogos, códigos, criptografia, estatística.

Resumo:
O projeto de extensão **Matemati***cATIVA* tem o objetivo de levar a matemática às escolas de ensinos fundamental e médio para despertar a curiosidade dos estudantes. Mostrar que a Matemática vai muito além daquilo que é visto na escola. Neste terceiro ano de atuação, estamos desenvolvendo as seguintes atividades: xadrez africano ou Ntxuva (variante dos jogos Mancala), escrever/transmitir mensagens cifradas e decifrá-las, estimativa de população de peixes.



Ao lado temos um tabuleiro de xadrez africano construído em EVA, cujas peças são feijões. Na África subsaariana, o tabuleiro costuma ser de pedra ou argila, e as peças do jogo costumam ser sementes. E onde está a matemática? Segundo Santos e Caetano [5] *Por parte da Matemática, esse jogo pode contribuir para desenvolver o raciocínio lógico, concentração, esforço intelectual, contagem, operações básicas e jogadas calculadas.*

O propósito deste projeto é apresentar a matemática numa forma divertida, a fim de desmistificá-la, torná-la atraente para o estudante. Isso vai ao encontro do que diz Lorenzato: *Se for verdadeiro que "ninguém ama o que não conhece", ..., se a eles não foi dado a conhecer a matemática, como podem vir a admirára-la? ([2] pg 34).* Ainda que a fundamentação matemática não seja trabalhada de forma explícita,

*Bolsistas/Monitores do **Matemati***cATIVA* as atividades escolhidas demandam sempre alguma forma de raciocínio matemático. Esperamos que isso “quebre o gelo” naqueles estudantes até então resistentes ao estudo da matemática, e que aos já simpáticos à causa, aumente mais o gosto pela coisa.

As atividades são apresentadas ao público, com um mínimo de explicações, e deixamos que eles se debrucem sobre as atividades por conta própria. Considerando a resolução de problemas, seguimos as orientações de Polya([4], pg. 1) *auxiliando nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho*. Nossos monitores ficam atentos para prestar auxílio, mas sempre na ideia de estimular a descoberta. Evitamos dar as respostas aos problemas já de cara - disso a internet está cheia! Junto a estas miniexposições, há sempre um palestrante. Convidamos docentes e estudantes de pós-graduação para apresentar uma palestra sobre tema ligado à matemática, em linguagem acessível a nosso público alvo. Esse tema não tem que estar ligado às atividades acima e visa mostrar aos estudantes como a matemática é ampla e versátil. Para suprir este relato faremos visitas a três escolas de ensinos fundamental e médio e uma oficina no 17° ENEC - Encontro de Extensão e Cultura da UFPR.

Neste trabalho apresentaremos como se dá o desenrolar das atividades mencionadas acima. Quais despertam interesse por parte dos alunos das escolas e participantes da oficina. Se há atividades que atraem mais pessoas de determinada idade. Quando não há interesse, procuramos observar a que se deve isso: se o tipo de material utilizado pode ser mais atraente, se o tema é adequado ao público, se a apresentação do tema precisa ser alterado, entre outros.

Além dos monitores permanentes, para as visitas às escolas e oficina, chamamos mais estudantes para que possamos atender o grande público que há nas escolas - costumamos atender de 30 a 50 alunos em cada exposição. Esses monitores de apoio, recebem um treinamento sobre as atividades que desenvolvemos, antes de cada visita a uma escola. Assim, também vamos observar o ponto de vista de nossos monitores, os permanentes e os de apoio, através de questionários. Pretendemos descobrir de que forma esta experiência contribui em sua formação, seja como estudante de licenciatura, quanto de bacharelado.

Por um lado a ideia inicial deste projeto foi levar a Matemática de forma leve e divertida aos estudantes nas escolas, mas como efeito colateral temos tido o enriquecimento da formação de nossos estudantes. Enquanto futuros professores, seja nos ensinos fundamental e médio ou superior, a busca de atividades matemáticas com uso de materiais concretos e temas diversos daqueles trabalhados na escola, somados à interação e observação de estudantes fora do ambiente tradicional escolar, irão despertar um conhecimento externo à graduação tradicional.

Assim, nossos estudantes já vão ganhando experiência na confecção de novos materiais, e como relacioná-los aos diversos conteúdos matemáticos, fato que é mencionado por Mendes ([3] pg 26)*... pois o material faz parte do processo cognitivo, mas não se encerra em si.* Em ([6], pg. 207) Teixeira e Apresentação salienta que *é fundamental estudar a dinâmica do jogo, prever as possíveis dúvidas que podem ocorrer no decorrer das atividades, e planejar as estratégias que irão compor as ações dos jogadores, desde as instruções até a finalização.* Antes de apresentar os jogos aos estudantes nas escolas, nos preocupamos em conhecê-los bem, o que é feito em nossas reuniões semanais.

Referências

[1] Couto, P. R. L. (Coord.) **Projeto de Extensão MatematicATIVA** Curitiba: UFPR - Projeto de Extensão, início em 2017,

https://sites.google.com/view/matematicativaufpr

[2] LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**, Campinas: 2ª ed. rev., Autores Associados, 2009.

[3] MENDES, I. A. **Matemática e Investigação em Sala de Aula**, São Paulo: 2ª ed. rev. e aum., Ed. Livraria da Física, 2009.

[4] POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas: novo aspecto do método matemático**, ed. Interciência, Rio de Janeiro, 1995.

[5] SANTOS, E. C. e CAETANO, S. **Jogo Mancala de Guiné Bissau em Diálogo com a etnomatemática: um dos caminhos para decolonialidade do saber**, ed. PUCC/Minas, Revista Matemática e Ciência: Construção , Conhecimento e Criatividade, vol. 2, No 1., pg. 39-57 ,Jun/2019 .

[6] TEIXEIRA, R. R. P.; APRESENTAO, K. R. S. **Jogos em sala de aula e seus benefcios para a aprendizagem da matemtica**. Revista Linhas, Florianpolis, v. 15, n. 28, p. 302-323, jan./jun. 2014.

Ensino e prática da Matemática através de atividade lúdica

Andréia Aparecida Machado[1]
Licenciatura em Matemática – UFSC
andreia.am.23@hotmail.com

Prof. Edmilson Rampazzo Klen (Orientador)
Departamento de Expressão Gráfica – UFSC
edmilson.rk@ufsc.br

Palavras-chave: Educação Matemática; Atividade Lúdica, Idoso.

Resumo:

A proposta do projeto originou-se de uma parceria entre o PET Conexões de Saberes Comunidades Populares da UFSC, e o Núcleo de Estudos da Terceira Idade (NETI), da mesma Universidade, ambos do campus Florianópolis. O projeto embasa-se numa configuração dinâmica e ativa de fazer matemática: através de jogos, tendo em vista que o público-alvo são os idosos, público frequentador do NETI, de diferentes escolaridades. Grando (2000, p. 28) aponta que *"para o adolescente ou adulto, onde a cooperação e interação no grupo social são fontes de aprendizagem, as atividades com jogos de regras representam situações bastante motivadoras e de real desafio".*

Grando (1995, p. 60) também ressalta que o jogo "*apresenta-se como uma atividade dinâmica e de prazer, desencadeada por um movimento próprio, desafiando e motivando os jogadores à ação*". A escolha da metodologia também se deu para que fosse possível "*a toda e qualquer pessoa uma apropriação mais significativa e compreensível sobre as Matemáticas utilizadas nas diferentes instâncias da vida humana" (*D'AMBROSIO; LOPES; 2014, p. 13).

A proposta tem como foco também a ginástica cerebral, a fim de evitar doenças como Alzheimer, sempre fazendo com que o idoso seja protagonista do trabalho desenvolvido, corroborando igualmente para uma troca de experiências sociais, considerando-se uma preocupação em ofertar um espaço de trocas de vivências.

Outro objetivo é retomar conceitos matemáticos aprendidos há anos atrás, que muitas vezes são esquecidos. Independente da profissão que desempenhou ao longo da vida, busca-se trazer um ensinamento que possa desenvolver as diferentes matemáticas existentes além das que conhecemos, bem como fazer compreender que a matemática pode estar aonde nós quisermos que ela esteja, basta deixá-la tomar o seu lugar. Conjuntamente, visa proporcionar um melhor entendimento de operações básicas/avançadas da matemática, de forma lúdica, tornando oportuno assim, um aprendizado através do entretenimento, possibilitando atuação de forma

[1] Bolsista do PET Conexões de Saberes – Comunidades Populares/UFSC.

mútua entre os participantes e idealizadora da atividade, onde ambos possuem papéis fundamentais nessa troca.

Todas as atividades são abordadas através de oficinas, com conteúdos de matemática relativos à educação básica, onde estas, podem ser de nível mais avançado de acordo com o retorno obtido em cada encontro. Todos os assuntos são trabalhados na forma de jogos e, durante suas aplicações, são levantadas questões, problematizações e, no final de cada encontro, é proposta uma reflexão acerca do tema, bem como um *feedback* em relação ao jogo escolhido e de que maneira esta escolha contribui para o avanço matemático ou (des)construção do modo de enxergar a matemática.

Importante ressaltar que há uma preocupação para que os jogos não sejam vistos como competitivos, para não haver vencedores e perdedores, evitando-se qualquer tipo de constrangimento entre os participantes.

Cabe destacar que a idealizadora não parte de um plano pronto de conteúdos, para trabalhar nas oficinas. A escolha dos assuntos que são abordados é dada em conjunto com os participantes, uma vez que, a oficina é dos participantes e para os participantes.

Percebeu-se que a utilização de jogos no ensino de matemática, torna acessível muitos conceitos antes não entendidos pelos participantes da oficina. Esta forma de trabalho torna visível o que estava acontecendo e como funcionava, e não, como muitas vezes acontece, uma automatização de passos, simplesmente porque sabemos que assim funciona, mas ainda não deixando claro do “porquê funciona”?

Foi possível uma reflexão relativa aos conteúdos que de fato faziam sentido ensinar ao idoso, colocar em pauta suas necessidades, curiosidades, para então partir para um planejamento de atividades. Entende-se que o tempo é diferente nessa fase da vida, então foi preciso ter certa preocupação nas seleções dos jogos, para que eles não se tornassem maçantes, cansativos, sem graça.

O trabalho se deu no decorrer do primeiro semestre de 2019, de 16/04 a 18/06, com encontros semanais de 1h 30min cada, ocorrendo nas dependências do NETI. Após o término destas, a convite do NETI, estas oficinas se transformaram em um curso regular, oferecido semestralmente, fazendo parte agora do quadro de atividades permanente do NETI, ratificando que a ideia do trabalho foi alcançada com sucesso e que muitas outras pessoas poderão ter acesso à metodologia e dinâmica trabalhada.

Este projeto foi apresentado na I Feira de Matemática da UFSC que ocorreu em junho de 2019, conquistando o destaque no tema Relevância Social e indicado para a Feira Municipal e Regional de Matemática de Florianópolis que se deu em agosto do mesmo ano, ficando em 3° lugar no cadastro reserva, como indicação para exposição na Feira Catarinense de Matemática. Foi exposto também no evento *The second International Conference on Creative Insubordination in Mathematics Education,* que se realizou em setembro de 2019.

Referências:

GRANDO, R. C. **O Jogo e suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino-Aprendizagem da Matemática**. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** 239 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. Insubordinação Criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n.51, p.1-17, abr.2015. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v29n51/1980-4415-bolema-29-51-0001.pdf>. Acesso em: 30 de agosto de 2019.

Laboratório de Ensino de Matemática

Andréia Cristina Silveira[1], João Victor Taborda da Silva[1]
e Lucas Gabriel Nadolnye[1]

Licenciatura em Matemática – UFPR
deia_silveira96@hotmaill.com, joaovictortabordadasilva@gmail.com
e lucasgnadolny@gmail.com

Prof.ª Elisangela de Campos (Orientador)
Departamento de Matemática – UFPR
elismat@ufpr.br

Palavras-chave: Área de polígonos, trigonometria, diagonal de polígonos.

Resumo:

O projeto Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) tem como objetivos desenvolver atividades e materiais didáticos e dar continuidade à reestruturação do laboratório existente no Centro Politécnico.

Figura 1: Laboratório de Ensino de Matemática – Centro Politécnico
Fonte: os autores

Para entender o que é um laboratório, como ele se constitui e que tipo de atividades são feitas neste ambiente fizemos leituras e discussões de textos sobre o LEM e pesquisamos sobre os laboratórios existentes em outras instituições. Dessa revisão bibliográfica entendemos que o Laboratório é um ambiente no qual os alunos possam experimentar alguns conceitos matemáticos utilizando materiais diversos e atividades investigativas. As situações didáticas desenvolvidas neste espaço devem ser desafiadoras, privilegiar a investigação matemática, com ou sem o uso de computadores e materiais didáticos. Neste trabalho apresentaremos algumas propostas de atividades investigativas desenvolvidas para este ambiente.

[1] Bolsista/Voluntário do Programa (idem).

Uma das atividades é sobre área de figuras planas no qual o objetivo é que ao ser dado o conceito de área o próprio aluno consiga deduzir a fórmula das figuras regulares através dos triângulos que é possível formar. Para isso primeiramente será demonstrado como se calcula a área de dois paralelogramos sendo eles, o quadrado e o retângulo e depois os alunos são levados a calcular a área de um triângulo através desses quadriláteros. Tendo a área dessas figuras os alunos podem deduzir a área do losango e de outras figuras regulares. Também será trabalhado como calcular a área de figuras irregulares sem ter que decorar uma fórmula. E mais tarde esse conceito pode ser aplicado para os poliedros.

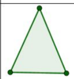
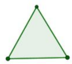
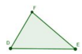
NOME	FIGURA	QUADRADO	FÓRMULA
ISÓSCELES			
EQUILATERO			
AGUDO			

Figura 2: Atividade da área de triângulos.
Fonte: os autores

Outra atividade desenvolvida se trata das funções básicas da trigonometria (seno, cosseno e tangente) e suas relações. Nessa atividade, a partir dos valores das funções para os ângulos notáveis (30°, 45°, 60°, 0°, 90° 180° e 270°), definição das funções no círculo trigonométrico e por meio da construção de um círculo trigonométrico, iremos instigar os alunos para que cheguem as relações entre as funções e também a demonstração da equação fundamental da trigonometria por meio da semelhança de triângulos e do Teorema de Pitágoras.

E por fim, uma atividade sobre a quantidade de diagonais em polígonos. Nesta, encontramos os números para os primeiros polígonos, triângulo, quadrilátero, pentágono e assim por diante, procuramos um padrão nesses números para deduzir quais seriam os próximos, e, a partir da sequência obtida, chegamos em uma generalização para a quantidade de diagonais em um polígono com n lados.

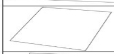
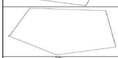
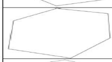
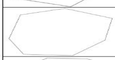
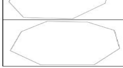
Polígono	Número de lados	Nome do polígono	Quantidade de diagonais
			
			
			
			
			
			

Figura 3: Atividade de trigonometria e de número de diagonais de um polígono.
Fonte: os autores

Além das atividades relatadas acima, confeccionamos alguns jogos sobre logaritmos e polígonos.

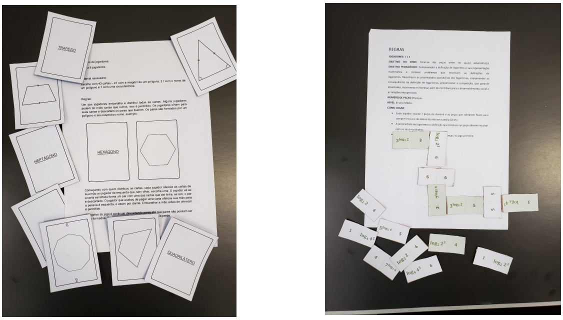


Figura 4: Cartas com polígonos e dominó de logaritmos
Fonte: os autores

Entendemos que para os futuros professores ter acesso a este ambiente, saber confeccionar, adaptar e utilizar materiais didáticos diferentes e atividades de a investigação é essencial para a sua formação. Para a formação de professores a vivência em um LEM, ainda nesta fase de formação inicial, é importante para que o futuro professor tenha como natural as atividades de um laboratório para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos da escola. Além disso o LEM pode ser utilizado na formação continuada, e em projetos que envolvam alunos da escola básica, para desmistificar a ideia de matemática como uma disciplina rígida, dura, sem espaço para experimentação e criatividade.

Referências:

LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Editora autores associados, 2009. Capítulo 1.

PONTE, J.P da. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Disponível em <file:///C:/Users/HP/Downloads/Investigacoes_matematicas_na_sala_de_aula .pdf> Acesso: 20/09/2019.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação.** Disponível em < http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/metodologia/Skovsmose_Cenarios_Invest.pdf> Acesso: 20/09/2019.

A Utilização da Arte e Tecnologia no Ensino da Matemática para Alunos com Altas Habilidades/Superdotação

Bárbara Caroline Zanetti1
Licenciatura em Matemática – UTFPR
barbaracarolinezanetti@hotmail.com

Prof. Luciana Schreiner de Oliveira
Departamento de Matemática – UTFPR
lu_zan1@hotmail.com

Palavras-chave:Altas Habilidades/Superdotação, Inclusão, Matemática, Arte e Tecnologia.

Resumo:

De acordo com o portal do Ministério da Educação (MEC) a quantidade de estudantes com altas habilidades nas redes públicas de ensino corresponde a cerca de 16 mil no Brasil[2]. A partir desse cenário, o projeto Matemática Acessível foi criado para melhor atender alunos com altas habilidades/superdotação, pensando no processo de inclusão e desenvolvimento de propostas voltadas a este público. projeto Matemática Acessível foi criado no segundo semestre de 2016 pelo curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), com objetivo geral formação de licenciandos capazes de produzir materiais e promover o ensino de estudantes com necessidades educacionais especiais atendidos no contraturno em salas multifuncionais da rede de ensino. Segundo o artigo 59 da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) dentre os direitos dos alunos com necessidades educacionais especiais estão:

> I - currículos, métodos, técnicas, recursos educativos e organização específicos, para atender às suas necessidades;
> III - professores com especialização adequada em nível médio ou superior, para atendimento especializado, bem como professores do ensino regular capacitados para a integração desses educandos nas classes comuns;(BRASIL,1996).

Também com objetivo específico de elaboração de de aprendizagem (jogos, materiais didáticos manipuláveis, e situações do cotidiano) que potencializam o ensino de conceitos matemáticos a estudantes com Altas Habilidades/Superdotação. O projeto de extensão foi firmado a partir da parceria entre a Secretaria Municipal de Pinhais e a UTFPR, contando com uma equipe de 14 estudantes da licenciatura em matemática e através de reuniões semanais com o grupo e a professora orientadora Luciana Oliveira, realizando estudos sobre o ensino da matemática para estudantes com Altas Habilidades/Superdotação, abordagem feita com recortes de textos do MEC, artigos acadêmicos e legislações próprias da área que regem o bem estar educacional desses estudantes. Também foi possível a preparação de materiais e

1 Aluna voluntária do Projeto de Extensão Matemática Acessível

2 Dado coletado no ano de 2016. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/32300> Acesso em: data 26 de jul. de 2019.

desenvolvimento de destinados aos estudantes com altas habilidades/superdotação das turmas da Escola Municipal Felipe Zeni e do Centro de Atendimento às Deficiências Sensoriais Hellen Keller (CADS), que atende alunos do ensino fundamental I e na turma do Colégio Estadual Arnaldo Faivro Busato, que atende alunos pertencentes ao ensino fundamental II e alunos do ensino médio. Uma parcela dos licenciandos do projeto ficou responsável por produzir sobre a Arte e Matemática, desenvolvendo um estudo sobre geometria básica e as isometrias, apresentando o artista Maurits Escher e suas obras a fim de atender os alunos pertencentes ao ensino fundamental II e ensino médio. Para melhor trabalhar com o tema Arte dentro da Matemática, o grupo elaborou que os alunos pudessem utilizar o aplicativo Geogebra (uma multiplataforma de matemática dinâmica) com a utilização de tabletes para cada aluno, que permitiu a utilização da técnica de tecelagem através das propriedades de isometria e geometria básica, técnica qual o artista Escher utilizava em suas principais obras. Foi possível desenvolver uma apostila sobre o Geogebra e suas ferramentas elementares junto da técnica de tecelagem para criação de telas semelhantes às de Maurits Escher. Com duas intervenções para aplicar as elaboradas no primeiro semestre para os alunos com Altas Habilidades/Superdotação, foram abordados/apresentados os conceitos de isometria (rotação, translação e reflexão), sendo os encontros organizados em 2 partes, a primeira com uma atividade sobre as isometrias e conceitos básicos da geometria, seguida da apresentação do artista Maurits Escher e o estudo de suas obras, visando a busca das isometrias e princípios matemáticos que ele utilizava como ferramenta para criá-las. A introdução do aplicativo Geogebra foi iniciado na primeira intervenção, tomando como guia a apostila desenvolvida pelos licenciandos de matemática. Com o intuito de aprofundar o conhecimento dos alunos sobre o aplicativo, foram propostas que envolviam geometria básica. No segundo encontro houve a apresentação da Fita de Mobius e realização da sua montagem a partir de materiais como papel, cola e tesoura. A partir dela foi possível trabalhar uma breve introdução sobre o conceito de infinito. Para finalizar os encontros do projeto, foram feitas as montagens de telas como as de Escher, a partir da técnica de tecelagem utilizando as malhas do Geogebra. Um dos resultados acompanhados com o projeto foi a partir da utilização do aplicativo Geogebra, foi possível detectar um interesse muito maior na maioria dos alunos em participar, até mesmo os que não tinham intimidade com a matemática foi possível despertar o interesse após os dois encontros, criando maior afinidade entre a matemática e o estudante e assim trazê-los para mais próximo dela. Também foi possível contribuir positivamente, através da empírica, com a formação dos licenciandos em Matemática da UTFPR em relação à educação inclusiva, “Conforme define a nova LDB [Lei de Diretrizes e Bases], trata-se de uma modalidade de educação escolar, voltada para a formação do indivíduo, com vistas ao exercício da cidadania” (ARANHA, 2003), e de forma particular ao ensino de alunos com altas habilidades/superdotação, já que se tratava, em sua maior parte, de alunos recém iniciados no curso e para muitos deles, este foi seu primeiro contato com a sala de aula e com a elaboração de para os alunos. Para concluir, o trabalho desenvolvido pelos licenciandos do projeto de extensão é de viés complementar dos conteúdos de sala de aula, já que acontece no contraturno e com intenção de fomentar o aprendizado e a integração com os outros estudantes do ensino básico, propiciando maior alcance do processo de inclusão dos alunos com Altas Habilidades no ensino “regular” através dessa complementação que surge no projeto de extensão.

> [...] A inclusão escolar constitui, portanto, uma proposta politicamente correta que representa valores simbólicos importantes, condizentes com a igualdade de direitos e de oportunidades educacionais para todos, em um ambiente educacional favorável (BRASIL, 2003, p. 23).

Por fim, ficou nítido a aprovação dos alunos com altas habilidades/superdotação e prazer em realizar as propostas pois ao final das intervenções não queriam sair da sala de aula mesmo com o tempo encerrado de atividade, nos dois encontros ocorreram essa situação, à facilidade com aprendizagem e realização das atividades propostas também foi um registro muito evidente durante o projeto de extensão.

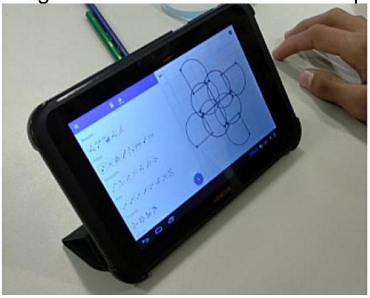


Figura 1: Aplicação da técnica de tecelagem no aplicativo Geogebra. **Fonte:** o autor.

Figura 2: Montagem da Fita de Mobius. **Fonte:** o autor

Referências:

ARANHA, M. S. F. – Organização. Coordenação geral: SEESP/MEC. **Estratégias para a educação de alunos com necessidades educacionais especiais**. p. 23. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Especial, 2003.

BRASIL. **Lei Nº 9.394**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

SCHENINI, F. et. al. **A Construção de Práticas Educacionais para Alunos com Altas Habilidades/Superdotação**; In. Portal Ministério da Educação; 2018; Disponivem em: <http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/32300> Acesso em: data 26 de jul. de 2019.

A Importância de Aplicações de Oficinas para o Ensino de Matemática – Caso de cinco Escolas de Francisco Beltrão - PR

Beatriz da Silva Rodrigues[1], Isabella Corbari dos Santos[1] e Jaqueline Ferreira da Silva[1]
Engenharia Ambiental, Engenharia Química e Engenharia Química – UTFPR
bearod@alunos.utfpr.edu.br, santosi@alunos.utfpr.edu.br e jaque-k@hotmail.com

Prof. Camila Nicola Boeri Di Domenico (Orientadora)
Departamento Acadêmico Física, Estatística e Matemática – UTFPR
camiladomenico@utfpr.edu.br

Palavras-chave: oficinas, matemática, escolas;

Resumo:

As dificuldades na compreensão da matemática não são algo recente, há relatos frequentes de grandes problemas de adaptação e entendimento dos seus teoremas. Frequentemente, repetem-se as mesmas falas por estudantes, que seria extremamente difícil sua compreensão, abstrata ou até mesmo tornando-se desinteressante (Pontes, 1994).

Sabe-se que a necessidade de aprender matemática na educação básica é de grande relevância para o crescimento não apenas intelectual, mas também pessoal, pois possibilitará um melhor desenvolvimento na tomada de decisões, resoluções de problemas e até mesmo em futuras escolhas de formação profissional.

Autores como Soares e Sauer (2004) apontam as dificuldades na matemática como uma bola de neve, que é um acúmulo de deficiências em todo ensino básico e ensino fundamental, em que esses problemas resultam da forma como os conteúdos de matemática são passados e exemplificados, com muitos "macetes" e fórmulas decoradas, sem um devido entendimento dos conceitos básicos.

Para Sadovsky (2007), o ensino da disciplina tem se resumido em regras mecânicas oferecidas pela escola, faltando uma dinâmica e formação aos docentes

[1] Bolsistas CNPq.

para aprofundar os aspectos mais importantes, aqueles que associam os conhecimentos prévios dos alunos, proporcionando associações e situações que poderão aplicar em situações cotidianas os novos saberes.

Levando em conta este cenário, dinamizar o ensino da matemática com oficinas tem sido um método empregado em cinco escolas públicas de Francisco Beltrão – Paraná, através do Projeto aprovado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) “Promovendo a inserção de jovens mulheres nas Ciências Exatas e Engenharias”.

Estas oficinas são realizadas com o uso do *software* livre Geogebra, bem como com o auxílio do aplicativo online *SymbolLab Math Resolver*, o que possibilita o contato com computadores para a compreensão da matemática, o que deixa as aulas mais dinâmicas, em que os alunos podem verificar a resolução e resultados só por apenas escrever a expressão no app.

Para melhorar a didática das aulas, uma vez ao mês os alunos são levados para laboratórios de informática em que são realizadas as oficinas de matemática. O Geogebra é o *software* mais utilizado em que são propostos o desenvolvimento de formas geométricas planas e espaciais, entendimento de tridimensionalidade e resoluções dos exercícios propostos. Funções lineares, exponenciais, segundo grau e logarítmica também são trabalhadas, possibilitando que os alunos entendam a construção de cada termo da função, o que acontece quando efetua-se a troca do sinal de cada constituinte, análise de funções decrescentes e crescentes, concavidade para cima ou para baixo.

Para possibilitar a análise do comportamento das funções, é proposto um pequeno relatório com exercícios que o objetivo é que observem o comportamento dos dados e escrevam a opinião referente a cada item fazendo com que além de apenas resolver os exercícios, possam interpretar o que cada exemplo significa, isso proporciona a curiosidade e é tentado evitar a mecanização de resolução dos itens.

Outro mecanismo de suporte utilizado, é o *Symbolab Math Resolver*, um aplicativo online que possibilita a verificação das resoluções dos exercícios. Este app foi repassado como meio de desenvolver autonomia para os alunos buscarem entender sozinhos os erros cometidos, já que o aplicativo demonstra passo a passo a resolução do problema. Com frequência são levados ao laboratório juntamente com uma lista de exercícios, previamente resolvida, com assuntos como de simplificações de polinômios, potenciação e função exponencial para que identifiquem os erros cometidos através do software.

A proposta tem sido bem eficiente no entendimento dos conteúdos abordados, tendo um retorno pelos alunos de desmistificação de alguns pontos da matemática. Além disso, mostra que eles são capazes de analisarem os seus próprios erros, sendo um modo de adaptá-los para resolução de problemas futuros.

Destaca-se, também, que a mudança do local que estuda-se a matemática, nesse caso o laboratório de informática, possibilita um outro olhar para a disciplina, oferecendo maior interação entre eles e discussão de cada função e formas geométricas abordadas.

Portanto, a matemática pode tornar-se uma disciplina dinâmica e confortável de trabalhar, e através das oficinas foi alcançado estes resultados nas cinco escolas do município de Francisco Beltrão.

Referências

CORREA, J., MACLEAN, M. **Era uma vez ... um vilão chamado matemática: um estudo intercultural da dificuldade atribuída à matemática.** Psicologia: Reflexão e Crítica [en linea] 1999, 12: **<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=18812112>**

DA PONTE, J. P. **Matemática: uma disciplina condenada ao insucesso?** 1994.

SADOVSKY, P. **Falta Fundamentação Didática no Ensino da Matemática**. Nova Escola. São Paulo, Ed. Abril, Jan./Fev. 2007.

SOARES, E. M. S.; SAUER, L. Z. Um novo olhar sobre a aprendizagem de matemática para a engenharia. **Disciplinas matemáticas em cursos superiores. (Cury, HN ed) pp**, p. 245-270, 2004.

Educação Matemática Financeira
Uma Proposta de Ensino

Bruno Domingos Fasolin[1] e Flavio Henrique de Carvalho[2]
Licenciatura em Matemática – UFPR
bruno_fasolin@hotmail.com e carvalho.flavio@outlook.com

Prof[a]. Dr[a]. Tania T. Bruns Zimer
Setor de Educação – UFPR
taniatbz@ufpr.br

Prof[a]. Mª. Sandra A. Martins
Colégio Estadual do Paraná
sandramartins105@gmail.com

Palavras-chave: Matemática, Educação Financeira, Ensino.

RESUMO:

Esse trabalho se refere a um projeto sobre o ensino da matemática e tem por objetivo relatar uma proposta metodológica para trabalhar com conteúdos da educação financeira. Fugindo do cronograma tradicional, foi proposto aos bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná que realizassem projetos extracurriculares às turmas de ensino médio do Colégio Estadual do Paraná.

O projeto neste colégio envolveu diferentes temas, entre eles o de Educação Matemática Financeira, foco desse trabalho. Com essa ideia, começou-se a elaborar os tópicos a serem tratados usando como base as dificuldades financeiras das pessoas, que são anunciadas pela mídia, tais como o número de pessoas endividadas no Brasil, sendo então selecionados os seguintes: Características do trabalho; Despesas fixas e variáveis; Salário e desconto salarial; 13º salário e férias; Planejamento financeiro; Empréstimos e financiamentos; Noções de investimento.

As aulas foram realizadas nas terças-feiras à tarde com alunos do segundo ano do ensino médio e nas quartas de manhã com alunos do primeiro ano do ensino médio. O Projeto teve três turmas, a primeira com alunos do segundo ano realizada entre os meses de março e maio, totalizando 7 encontros, a segunda, também com alunos do segundo ano, foi realizada entre os meses de junho e julho, totalizando 5 encontros e a terceira turma foi realizada entre os meses de agosto e setembro, dessa vez com os alunos do primeiro ano, totalizando 5 encontros. O projeto foi desenvolvido no contraturno do horário regular de aula dos alunos e de maneira que as aulas fossem pautadas em debates sobre os tópicos já indicados. Ao todo, participaram 35 alunos do ensino médio desta experiência de prática pedagógica

1 Bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência.
2 Bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência.

dos pibidianos. Seguem algumas imagens das aulas:

Figura 1: aula da primeira turma

Figura 2: aula da terceira turma

Figura 3: aula da terceira turma

Para a preparação das aulas, foram utilizados como base livros, artigos e sites. Utilizando o site do UOL na primeira aula para exemplificar a necessidade da educação financeira, na segunda aula, utilizamos o site da Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas (FIPE) e o site do Banco Votorantim para simular empréstimo, a coleção de livros didáticos de matemática (GIOVANNI; BONJORNO, 2000) e o site denominado Calculadora de Juros Compostos como materiais de apoio para tratar de juros e Tabela Price, também foi consultado o site do Tesouro Direto para simulações de situações problemas na aula 3 e site Toro Radar como base para aula 4 sobre ações.

O trabalho foi iniciado explicando-se a diferença entre despesa fixa e variável, trabalho formal e informal, renda e benefícios trabalhistas na primeira metade das aulas. Nesta etapa, o conteúdo matemático foi direcionado às operações básicas e a conceitos da educação financeira: como organizar o orçamento com as rendas e despesas. Na segunda metade do projeto, abordou-se mais conteúdos da Matemática que da educação financeira para tratar o funcionamento dos tópicos de empréstimos, financiamentos e investimentos, por exemplo: o funcionamento da Tabela Price e Taxa SELIC.

Em alguns casos, foi perceptível a relação que os alunos fizeram com problemas relacionados aos tópicos, e muitas vezes enfrentados em casa, os quais não sabiam como resolvê-los. Mesmo tratando de um conteúdo matemático que, a princípio, eles já deveriam saber, pois consta no currículo escolar de anos/séries anteriores, tal como o cálculo de porcentagem. Em outros, eram conteúdos não vistos normalmente em sala de aula, porém muito utilizados no dia a dia, como investimentos e cálculos de juros em empréstimos e financiamentos.

Como resultado desta proposta de ensino para a educação matemática financeira, pode-se apontar que houve interesse manifestado pelos participantes sobre o tema, visto as interações e participações no decorrer dos debates. Também, as maiores dificuldades vistas dos alunos foram o uso da calculadora e a conversão de porcentagem para número decimal.

Com a experiência adquirida em sala de aula, conseguiu-se perceber as dificuldades e comportamentos dos alunos, além disso, foi aprendido sobre como ensinar um conteúdo não visto antes, nem na época de colégio e nem agora durante a graduação.

Referências:

BANCO VOTORANTIM. Disponível em: <https://www.bv.com.br/site/financiamento/financiamento-de-veiculos/>. Acesso em: mar. 2019.

CALCULADORA JUROS COMPOSTOS. Disponível em: <https://calculadorajuroscompostos.com.br/tabela-price-amortizacao-emprestimos/>. Acesso em: mar. 2019.

FIPE (FUNDAÇÃO INSTITUTO DE PESQUISAS ECONÔMICAS). Disponível em: <https://veiculos.fipe.org.br/>. Acesso em: mar. 2019.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática ensino médio:** Uma nova abordagem. Volume 1: Versão progressões. São Paulo: FTD, 2000.

TESOURO DIRETO. Disponível em: <http://www.tesouro.fazenda.gov.br/tesouro-direto-calculadora>.

TORO RADAR. Disponível em: <https://www.tororadar.com.br/blog>. Acesso em: abr. 2019.

UOL ECONOMIA. Disponível em: <https://economia.uol.com.br/noticias/redacao/2019/06/06/dividas-atrasadas-nome-sujo-serasa.htm>. Acesso em: Julho 2019.

Estudo das Cônicas por Investigações Matemáticas

Bianca de Assis Natal[1] e Carolina Pereira Lejambre[2]
Licenciatura em Matemática – UFPR
bianca-natal@hotmail.com e carolina.lejambre@gmail.com

Prof. Anderson Roges Teixeira Góes (Orientador)
Departamento de Expressão Gráfica – UFPR
artgoes@ufpr.br

Prof. Giancarlo de França Aguiar (Supervisor)
Eixo de Matemática – IFPR
giancarlo.aguiar@ifpr.edu.br

Palavras-chave: Cônicas, Dobraduras, Investigação Matemática.

Resumo:

Este trabalho tem o objetivo de relatar a prática realizada no Instituto Federal do Paraná por alunas participantes (bolsistas IDs) do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) – projeto matemática – da Universidade Federal do Paraná. A atividade aplicada em uma turma do 3° ano do Ensino Médio, foi baseada em Investigações Matemáticas abordando o conteúdo das Cônicas (Parábolas e Hipérboles).

Com o objetivo de introduzir as cônicas por meio da investigação matemática, os temas foram separados em dois dias, sendo que a aplicação da atividade ocorreu em três aulas de 50 minutos cada. Desenvolvida por meio de dobraduras que desenhavam as curvas, buscou-se facilitar o aprendizado, instigando os alunos a pensarem como matemáticos.

A partir das dobraduras feitas com o uso apenas de papel vegetal, régua, compasso e caneta, os estudantes foram incentivados a buscarem relações no desenho das cônicas com o objetivo de encontrar suas definições e então as equações, com o auxílio de conteúdos trabalhados anteriormente.

A proposta foi realizada após a leitura do livro “Investigações matemáticas na sala de aula” de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira. Tendo em vista que uma atividade investigativa incentiva o estudante a agir e pensar como um matemático, durante todo o processo, foi assumida uma postura interrogativa, promovendo a reflexão dos estudantes sobre o que estavam fazendo.

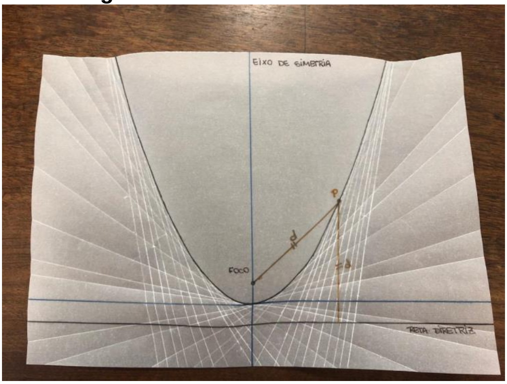
A investigação matemática foi realizada de maneira semelhante para a obtenção de ambas as curvas, com a diferença apenas no processo de dobradura para a obtenção do desenho de cada uma a ser estudada.

Em relação à Parábola, os estudantes foram incentivados a buscarem relações do desenho realizado com o auxílio de régua afim de encontrar a definição de Parábola e posteriormente sua equação. Com a dobradura, foi possível identificar que a distância de um ponto qualquer sobre a curva até o foco é a mesma distância

[1] Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID).
[2] Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID).

desse ponto até a reta diretriz. E com isso, por meio de conhecimento prévio sobre a distância entre pontos e distância entre ponto e reta, foi possível encontrar a equação da parábola.

Figura 1 – Dobradura da Parábola

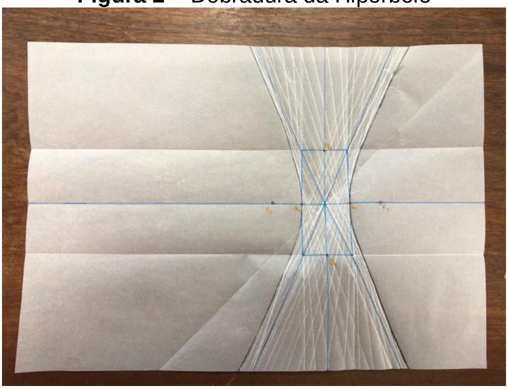


Fonte: Os autores, 2019

Após o desenvolvimento da dobradura, e o compartilhamento dos resultados obtidos, foi então apresentado formalmente a definição, os elementos e as equações das parábolas, finalizando a aula com a resolução de exercícios.

O mesmo processo foi feito para a Hipérbole. Com a dobradura, foi possível enxergar os ramos da hipérbole e com o auxílio de régua os estudantes foram incentivados a procurarem relações afim de obter a definição da curva e sua equação, ou seja, que a diferença entre as distâncias de um ponto fixo “P” qualquer da hipérbole até seus focos é constante e igual a distância entre os seus vértices.

Figura 2 – Dobradura da Hipérbole



Fonte: Os autores, 2019

Após a atividade de Investigações Matemáticas, com a análise do desenvolvimento das aluas e do desempenho dos estudantes, ficou evidente que mesmo que a maioria dos estudantes conseguiu atingir o objetivo, alguns apresentaram dificuldade em entender a atividade proposta.

Em um questionário apresentado aos estudantes sobre suas opiniões em relação a atividade proposta, notou-se que as dobraduras despertaram um certo interesse pela aprendizagem e uma das respostas obtidas foi:

“A forma como o conteúdo foi apresentado auxiliou muito na minha compreensão. Eu tenho certa dificuldade em matemática, mas o método como foi apresentado foi muito esclarecedor, pois demonstrou o que as fórmulas, por exemplo, representavam”.

Tornando as aulas produtivas, obteve-se a aprovação de grande parte dos estudantes, visto que a atividade facilitou a maioria no entendimento do conteúdo. Logo, constatou-se que a investigação matemática desafia e incentiva os alunos a pensarem como matemáticos, além de explorar a busca por soluções de problemas propostos, contribuindo no processo de aprendizado e facilitando o entendimento de conteúdos da Matemática.

Referências:

José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Jr.. Matemática Fundamental: Uma nova abordagem. Editora FTD S.A. (2002)

João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira. Investigações matemáticas na sala de aula. (2013)

Percepções acerca da matemática: crenças e mitos no ensino fundamental

Cristiane Aparecida Penkal Trianovski
Licenciatura em Matemática – PUCPR
cristiane.penkal@gmail.com

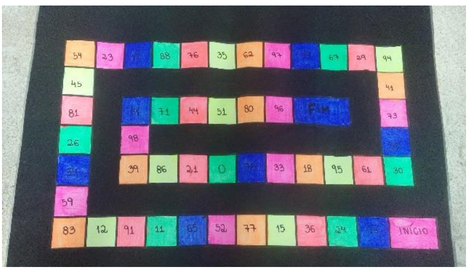
Prof. Veridiana (Orientador)
Supervisora do PIBID
veridibb@yahoo.com.br

Palavras-chave: matemática, mitos, emoções.

Resumo:

O presente trabalho trata-se de discursos pré-construídos voltados para a área da matemática. Que atire a primeira pedra quem nunca ouviu falar "matemática é difícil" ou ainda "matemática é para poucos". E é justamente esse tema que será tratado, já que ensinar matemática também é para poucos. A dificuldade existente advém da matéria ser abstrata, pois não se vê números caminhando pelas ruas da cidade, por exemplo. Dentro do senso comum surgem mitos que vão sendo passados adiante, além da mídia, da sociedade e dos próprios professores da área que perpetuam essa ideia. Este trabalho tem como objetivo desmitificar os mitos dessa matéria que causa tanto medo aos alunos e é a causa dos bloqueios cognitivos que surgem, além de mostrar que é possível aprender brincando. Com as oportunidades que o PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) oferece, estão sendo propostos jogos didáticos para que os estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental usem da sua liberdade e autonomia dentro da disciplina.

Dentre as atividades, iniciamos com a matemática básica, sendo esta a maior dificuldade dos alunos. Cada equipe confeccionou jogos sobre números decimais, positivos e negativos, potência, raízes, divisão com resto, multiplicação e tabuada, sempre buscando abordagens diferentes.



("Avançando com o resto")

("Roleta dos números decimais")

(“Batalha dos números positivos e negativos” – desenvolvido por alunos surdos)

Já para trabalhar as equações de 2º grau, foi aplicado o jogo do Stop, em que o objetivo era promover a participação de todos, com liberdade e autonomia, pois não foi cobrado nenhuma forma específica para resolver as questões, assim surge a oportunidade do aluno trazer de fora seus conhecimentos e aplicar em sala de aula. Essa atividade em especial, gerou uma competitividade boa, e muita discussão entre alunos no quesito qual a melhor forma de resolver rapidamente e chegar à resposta correta.

Notando a importância de uma abordagem interdisciplinar, também houve atividade envolvendo matemática, arte e o bullying, onde foi possível relacionar diretamente os mitos que envolvem a matéria, e provar que os alunos já vêm para a escola com a ideia de que matemática é algo difícil a enfrentar. Além de trabalhar com geometria e cores, também lidamos com os sentimentos e emoções envolvidos com a matéria.

Além destas atividades citadas, foram trabalhadas muitas outras, além de gincanas, sendo que os jogos de aprendizagem e por rotação são confeccionados pelos próprios alunos e com a utilização de materiais recicláveis, portanto, trabalha-se o conteúdo da matéria, a sustentabilidade e toda a área cognitiva da criança. Avaliando as atividades e resultados desenvolvidos com o projeto, pode-se notar uma melhora em vários pontos. São momentos de descontração e relaxamento, mas que rendem muito mais na aquisição de conhecimento, ainda mais na área da matemática, onde muitas vezes tem-se como algo maçante e cansativo, causando bloqueios cognitivos até mesmo. Aprendem diferentes formas de cálculo, aprimoram agilidade, raciocínio e atenção, aumenta-se a participação nas aulas, além de melhorar as relações aluno/aluno, aluno/professor e trabalhos em grupos. Desde sempre ouve-se falar que matemática e arte estão relacionadas, então porque não aproveitar para desenvolver esse tipo de atividades e liberar a criatividade e imaginação? E afinal, como aprende-se a nadar? Claramente, a resposta será "nadando", então por que com a matemática seria diferente? É importante colocar em prática o que aprende-se durante a semana, portanto os jogos têm-se mostrado um ótimo elemento de aprendizado, com resultados positivos.

Referências:

BALMANT, Ocimara. Especial para o Estado, O Estado de S.Paulo. **Por que somos tão ruins em matemática?**. 2011. Disponível em: https://www.estadao.com.br/noticias/geral,por-que-somos-tao-ruins-em-matematica-imp-,728446. Acesso em: 18/06/2019.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro (2012). **Por que alguns gostam dos cálculos e outros odeiam?**. Disponível em: < https://www.superprof.com.br/blog/por-que-matematica-da-medo-e-e-dificil/ >. Acesso em: 18/06/2019.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **A dificuldade da Matemática no Dizer do Aluno: ressonâncias de sentido de um discurso**. 2011. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/educacaoerealidade/article/view/18480>. Acesso em: 18/06/2019.

Atividade Investigativa no estudo das parábolas

Danyelle Horobinski[1]
Licenciatura em Matemática
dany.horo@gmail.com
Anderson Roges Teixeira Góes (Orientador)
Departamento de Expressão Gráfica
artgoes@ufpr.br
Giancarlo de França Aguiar (Supervisor)
Instituto Federal do Paraná
giancarlo.aguiar@ifpr.edu.br

Palavras-chave: Ensino-Aprendizagem, Parábola, Atividade Investigativa.

Resumo

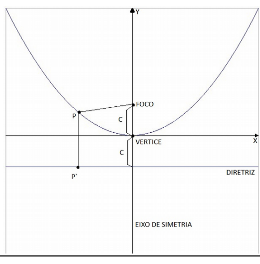
Esta prática docente usa o método da Investigação Matemática que é definida por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) em quatro etapas: reconhecimento da situação, exploração e formulação de questões; formulação de conjecturas; realizar testes e refinar as conjecturas; e demonstração. Vemos nessa tendência um método que possibilita nas salas de aulas o estímulo a pesquisa e, com isso, o estudante pode adquirir um pensamento mais reflexivo, e para muitos alunos a aula fica mais divertida por ser uma aula diferenciada.

O objetivo desse trabalho é dar início ao estudo das cônicas, após uma apresentação da circunferência, na sequência o estudo das elipses então viu se necessário estudar o conceito de parábola, sendo que o último conteúdo a ser abordado seriam as hipérboles, então essa prática aborda o conceito de parábola, bem como, sua definição, sua representação gráfica utilizando compasso, identificação do foco, a diretriz no gráfico e as equações das parábolas. Para isto, prática foi dividida em cinco etapas descritas e comentadas a seguir.

No primeiro momento foi desenhada a parábola no quadro identificando o foco, o vértice, a diretriz, o eixo de simetria e a definição (FIGURA 01).

Figura 01 – Definição e representação gráfica da parábola e seus elementos

Parábola é o lugar geométrico dos pontos “P” de um plano cuja distância a uma reta “r” dada é igual a distância a um ponto “F” não pertence a “r”.
d(P , P`)= d(P , F)



Fonte: Os autores, 2019.

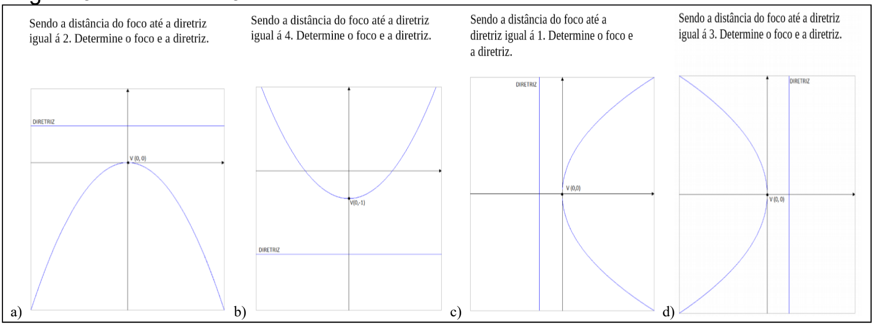
[1] Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID).

Os estudantes se organizaram em grupos de três pessoas e um grupo ficou com quatro integrantes. Com o compasso foi apresentada a forma representar a parábola utilizando sua definição.

Desenhando tudo fica mais claro, pois conseguimos visualizar como a definição ajuda a formar a parábola, ao desenhar tudo que foi utilizado foi a definição e assim encontramos os pontos da parábola.

Na sequência foi realizada uma atividade (FIGURA 02) para identificar o foco e a diretriz da parábola, dado a distância do foco à diretriz e dado seu vértice. Passamos essas quatro parábolas para cada grupo para eles identificarem e discutirem entre si.

Figura 02 – Atividade 01



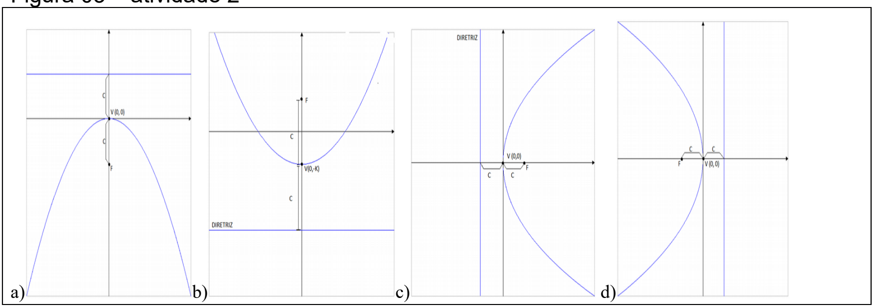
Fonte: Os autores, 2019.

Os estudantes se empenharam para descobrir seus vértices e a reta, discutiram maneiras de encontrar por meio de testes para ver se suas conjecturas se confirmavam. Quando um estudante não conseguia prosseguir, outro ajudava.

Na próxima atividade foi solicitado que fizessem o mesmo procedimento da atividade 01, mas com apenas uma distância arbitrária que denotamos como C que é a distância do foco ao vértice e também a distância do vértice á diretriz, como vemos na (FIGURA 01).

A figura 03 apresenta as representações indicadas aos estudantes, em que no enunciado constava: determine o foco, a equação da diretriz, sabendo que os pontos da curva são equidistantes a diretriz e ao foco.

Figura 03 – atividade 2



Fonte: Os autores, 2019.

Na atividade anterior eles realizaram suas conjecturas e testes e nesta atividade refinaram suas hipóteses, chegando ao raciocínio final.

Por meio da definição da parábola foi demostrada a equação da parábola com concavidade para cima, então chegando na equação de concavidade para cima, e, então sugerido que pensassem como ficaria se a concavidade fosse voltada para baixo ou lado.

Diante das atividades realizadas o objetivo da aula foi atingido, os estudantes conseguiram entender o conteúdo de uma maneira mais interessante para eles e foram muito participativos.

Aproveitamos para apontar os pontos negativos, pois teve estudante que não prestou atenção pelo fato de estarem em trio o que facilitou a conversa sobre assuntos não condizentes a aulas, desviando o foco.

Como propostas para futuras aplicações sugerimos oportunizar maior tempo, para os estudantes realizarem as atividades, pois assim conseguimos deixar mais tempo para os alunos realizarem as atividades, e podendo até explorar mais parábolas, como por exemplo as parábolas fora da origem.

REFERÊNCIA

PONTE, João Pedro da., BROCARDO, Joana., OLIVEIRA, Hélia. Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Editora Autência. Belo Horizonte/MG, 2013.

A Expressão Gráfica em Oficinas Pedagógicas como agente facilitador na aprendizagem da Matemática

Davi Paula da Silva, Mayumi Kuriyama de Lima e Flávia Victória Antunes
Técnico em Meio Ambiente integrado ao Ensino Médio – IFPR
davipaulasilva@hotmail.com, mayumi-mi@hotmail.com, flavia-vic01@hotmail.com

Prof. Alessandra Assad Angieski
Departamento de Matemática – IFPR
alessandra.assad@ifpr.edu.br

Palavras-chave: Educação Matemática, Expressão Gráfica, Matemática Básica.

Resumo:

O Sistema de Avaliação de Educação Básica (SAEB) instituído em 1990, com responsabilidade do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), tem como cerne realizar um diagnóstico da Educação Básica brasileira e de alguns fatores que possam interferir no desempenho do estudante, fornecendo um indicativo sobre a qualidade do ensino ofertado (INEP, 2018).

O SAEB é realizado no último ano de cada ciclo (Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio), e a última informação divulgada pelo mesmo refere-se ao ano de 2017, conforme apresenta a Figura 1 abaixo:

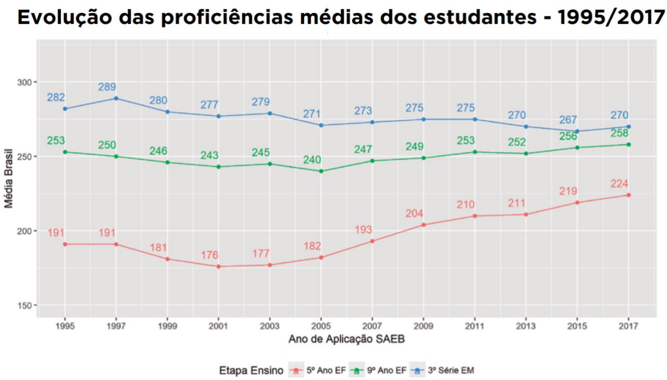


Figura 1 – Resultado SAEB Matemática
Fonte: Inep/SAEB (2018)

Neste sentido, quando analisado, percebe-se que os dados, no que tangem o Ensino Fundamental I, é o que apresentou o maior crescimento desde 1995. O Ensino Fundamental II comparado a 1995 ainda apresenta um baixo índice, porém tem apresentado, mesmo que mínima, uma evolução. Com relação ao Ensino Médio percebe-se ainda que o ano de 2015 apresentou o pior índice dos últimos 10 anos, evidenciando uma situação preocupante no que cerne a Educação Matemática nesta Etapa de Ensino.

Neste sentido, fica evidente que medidas são necessárias para minimizar a problemática. Optou-se pelas Oficinas Pedagógicas, que segundo Candau (1999) é uma proposta metodológica de trabalho em grupo, que trabalha com a construção coletiva do saber e principalmente as diferentes trocas de experiências no qual o saber não se finda apenas ao resultado final do processo de aprendizagem, mas além disso, colabora no processo de construção do conhecimento.

As oficinas, portanto, foram criadas com o objetivo de auxiliar na aprendizagem dos discentes em relação à matemática, com ênfase nos estudantes de Ensino Médio, do Instituto Federal do Paraná – Campus Paranaguá. Oferecendo, desta forma, subsídios em relação aos conteúdos abordados muitas vezes em sua grade curricular, além de instigar a resolução de problemas algébricos, despertando o espírito de equipe e a relação entre professor-aluno.

O ensino da Matemática na visão do presente trabalho propõe uma metodologia centrada no aluno, na qual os monitores como mediadores de conhecimento subsidiam os discentes com diferentes ferramentas pedagógicas.

Portanto, a principal ferramenta utilizada é a Expressão Gráfica, que segundo Góes (2012) é um campo de estudo que usufrui de elementos como desenhos, imagens, modelos, materiais manipuláveis e recursos computacionais aplicados às diversas áreas do conhecimento. Assim, a Expressão Gráfica pode auxiliar na solução de problemas e na transmissão de ideias propostas nas oficinas pedagógicas.

Nas oficinas os estudantes monitores voluntários, os quais juntamente com a professora orientadora, criam os materiais manipuláveis para fortalecer a aprendizagem da Matemática de forma dinâmica e eficiente.

Na Figura 2, apresenta-se um jogo de tabuleiro, o qual foi utilizado em diversas oficinas, adequando as perguntas as temáticas abordadas de acordo com a oficina trabalhada. Na Figura 3 é apresentado o jogo de dominó de potências. E a Figura 4, apresenta a oficina de conjuntos numéricos, que tratou do conteúdo com a sala temática, transformando-a em um grande conjunto numérico, delimitada através de fitas adesivas, onde os estudantes sorteavam um valor numérico e se colocavam dentro do conjunto que pertenciam.

Figura 2 - Jogo de tabuleiro
Fonte: Os autores

Figura 3 – Dominó de potências
Fonte: Os autores

Figura 4 - Sala temática de conjuntos numéricos
Fonte: Os autores

Até o presente momento, os resultados obtidos tem caráter qualitativo, através da devolução positiva dos estudantes que frequentam as atividades e interagem com atividades dinâmicas e práticas apresentadas. Contudo, há ainda, dentro das oficinas, questionários aplicados com os conteúdos abordados durante as oficinas, de forma a realizar um estudo em relação ao desempenho dos estudantes.

Ademais, a contemplação da Expressão Gráfica no cotidiano dos estudantes traz uma experiência progressiva, interessante e formativa, apoiada na ação, descoberta, reflexão e comunicação. Espera-se, por fim, que após a abordagem de conteúdos da Matemática com diversas ferramentas didáticas, as mesmas sejam devidamente organizadas em um Caderno Pedagógico online, disponibilizando-os para diversas instituições de ensino.

Referências:

CANDAU, Vera Maria. **Educação em Direitos Humanos: uma proposta de trabalho**. In: CANDAU, Vera Maria, ZENAIDE, Maria de Nazaré Tavares. Oficinas Aprendendo e Ensinando Direitos Humanos. João Pessoa: Programa Nacional de Direitos Humanos; Secretaria da Segurança Pública do estado da Paraíba; Conselho Estadual da Defesa dos Direitos do Homem e do Cidadão, 1999

GÓES, H. C.; **Expressão Gráfica: esboço de conceituação**. 2012. 123 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba.

INEP, **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação**. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb. Acessado em junho de 2018.

O QUE DIZEM AS TESES E DISSERTAÇÕES SOBRE A EDUCAÇÃO INCLUSIVA NA MATEMÁTICA?

Deborah Silva Borges
Licenciatura em Matemática – UFPR
dedesborges@gmail.com

Prof. Elenilton Vieira Godoy (Orientador)
Departamento de Matemática – UFPR
elenilton@ufpr.br

Palavras-chave: educação inclusiva, educação matemática, deficiência.

Resumo:

Quando se pensa sobre alunos com problemas de aprendizagem, superdotação, transtornos ou com deficiência, a primeira coisa que nos vem à mente, pensando em futuros professores, é a sensação de despreparo ao entrar numa sala de aula com esses alunos presentes. Tendo em vista que o professor deve sempre buscar a melhor maneira de elaborar e ministrar uma aula, encontrando uma metodologia adequada, como ele pode planejar e ministrar essa aula para alunos com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades ou superdotação, onde realmente exista a inclusão? Considerando que a inclusão escolar vai muito além do que simplesmente facilitar o ingresso na escola, mas sim, entender as dificuldades desses alunos e dar de fato uma educação eficaz. (LUCION, 2015).

Este trabalho, definido por estado da arte ou estado do conhecimento, tem por objetivo reunir as teses e dissertações coletadas no BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações) relacionadas à educação inclusiva que tem ligação com a matemática. Após essa coleta houve a análise buscando saber sobre: como os autores entendem a educação inclusiva, o que tem sido feito na sala de aula para os alunos com deficiência e relatando as dificuldades encontradas na aula e na formação dos professores. Para isso foi realizada uma pesquisa qualitativa e a análise se constitui na proposta inicialmente organizada por Michel Pêcheux,

passando por Eni Orlandi e Sergio Freire, uma Análise de Discurso (AD) do tipo recorte, ou também chamada de AD francesa. Com esse mapeamento, se espera contribuir para uma futura pesquisa nesta mesma temática, onde auxilie a produção de algum material didático que seja realmente útil e eficaz para os alunos com deficiência.

Referências:

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB - Lei nº 9394/96**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 02/06/19

FERNANDES, C. A. **Análise Do Discurso: Reflexões Introdutórias**. 2 ed. São Carlos: Claraluz, 2007

FERNANDES, S. H. A. A. **Educação Matemática Inclusiva: Adaptação X Construção**. Revista Educação Inclusiva ? REIN, v. 1, p. 78-95, 2017.

FERREIRA, N. S. de A., **As Pesquisas Denominadas "Estado Da Arte"**. Revista Educação & Sociedade, número 79, ano XXIII, CEDES, Campinas, São Paulo, 2002.

FERREIRA, W. B. **Educação inclusiva: será que sou a favor ou contra uma escola de qualidade para todos?** Revista da Educação Especial. Out. 2005. p.40-46. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/revistainclusao1.pdf. Acessado em: 29/05/2019

GAIA, R. da S. P. **Educação especial no brasil: análises e reflexões.** p. 1-12. 2017. Disponível em: http://uniesp.edu.br/sites/_biblioteca/revistas/20170719100610.pdf. Acesso em: 03/06/19

GUSMÃO, L. F.; BARBOSA, L. D. A.; SANTOS, L. G. A. dos. **A Educação inclusiva na visão dos professores de matemática: desafios e possibilidades**. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo. **Anais... .** [s. L.]: Anais, 2016. p. 1 - 10.

LUCION, Paula. **A Organização do ensino de matemática no contexto de inclusão.** 2015. 183 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

ROSA, E. A. C.; ROSA, F. M. C. da; BARALDI, I. M.; **As pesquisas em educação matemática em face das políticas públicas de inclusão escolar**. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo. **Anais... .** [s. L.]: Anais, 2016. p. 1 - 12.

SASSAKI, R. K. **Inclusão: o paradigma do século 21.** Revista da Educação Especial**.** Out. 2005. p. 19-23. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/revistainclusao1.pdf. Acessado em: 29/05/2019

SOUZA, Sérgio A. F. **Análise de discurso:** procedimentos metodológicos. Manaus: Census, 2014. Ebook. Disponível em: https://www.amazon.com.br/An%C3%A1lise-Discurso-Procedimentos-S%C3%A9rgio-Freire-ebook/dp/B00OTSKS9M. Acesso em: 04/06/2019

UNESCO. **Declaração de Salamanca.** Sobre Princípios, Políticas e Práticas na Área das Necessidades Educativas Especiais. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/salamanca.pdf. Acesso em: 03/06/19

Mulheres matemáticas dão as cartas: a questão de gênero na ciência

Evelyn Karine Guimarães Pedroso[1]
Licenciatura em Matemática – UTFPR
evespedroso@gmail.com

Edna Sakon Banin e Luciana Schreiner de Oliveira (Orientadoras)
Departamento Acadêmico de Matemática – UTFPR
ednas@utfpr.edu.br e lu_zan1@hotmail.com

Palavras-chave: mulheres cientistas, educação matemática crítica, história da matemática.

Resumo:

Este trabalho apresenta uma proposta de aula aplicada em turmas de 2º ano de Ensino Médio Técnico Integrado de Informática do Colégio Estadual Pedro Macedo, localizado no bairro Portão, em Curitiba/PR, em 3 aulas de 50 minutos, durante o mês de março de 2019 pelo projeto Residência Pedagógica do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba (UTFPR-CT). Com o propósito de consolidar o conceito sobre o tema Conjuntos, as aulas promoveram um diálogo sobre a carreira científica e suas representantes mulheres -tópico pertencente ao Tema Transversal "Orientação Sexual", dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, p. 27). O ensino técnico no Brasil busca atender o mercado de trabalho, mas outras possibilidades, como a carreira científica e o ingresso no ensino superior também são almejados por estudantes deste nível de ensino. Discutir importantes representantes que contribuíram com pesquisas nas áreas da ciência e tecnologia colabora na ampliação dessas alternativas. Por isso, além de dar continuidade ao conteúdo matemático oficial, um dos objetivos das aulas visou despertar o interesse por diferentes profissões, diversificando e ampliando o leque de interesse desses estudantes em suas futuras escolhas profissionais.

As aulas foram ministradas pela metodologia de resolução de problemas (KRULIK, 1997), ancoradas na Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2001) e na História da Matemática (MIGUEL e MIORIM, 2011) desenvolvidas com apoio de dois materiais[2]: um baralho com seis cartas sobre mulheres cientistas e uma Ficha de Atividade. A Ficha de Atividade contava com a parte teórica sobre conjuntos (definição, classificação e exemplos) e com perguntas reflexivas sobre a presença feminina nas áreas exatas. Ela não apenas possibilitou aos estudantes (organizados em grupos) construírem conhecimento de forma autônoma, mas também de trocarem ideias e discutirem entre seus pares.

---

[1] Bolsista do Programa Residência Pedagógica.
[2] Disponíveis em: http://bit.ly/2kvvC50

Entre algumas das justificativas dadas por Miguel e Miorim (2011) para utilizar a História da Matemática, estão a introdução do conteúdo, acontecimentos motivadores, instigar o pensamento crítico e a inclusão social (MIGUEL e MIORIM, 2011, p. 61-62). Justificativas, estas, que fundamentam sua utilização para introduzir as primeiras concepções sobre conjuntos e inserir, de forma concomitante, breves biografias sobre mulheres matemáticas.

As aulas iniciaram-se com a construção do significado da palavra cientista pelos alunos. Os estudantes os caracterizaram, principalmente, com os estereótipos cinematográficos, como profissionais “inteligentes” que realizam experimentos, invenções e pesquisas em laboratório relacionados às áreas das ciências exatas.

Durante a discussão, os alunos compreenderam que diversas áreas do conhecimento possuem produções científicas, sendo a universidade um dos principais espaços para fazê-las e que elas poderiam ser realizadas em todos os níveis de ensino. Para Skovsmose (2001, p. 101), discutir condições básicas de obtenção de conhecimento, estar a par de problemas sociais e fazer da educação uma força progressivamente ativa é dever de uma educação crítica.

Ao serem questionados, os nomes de cientistas mencionados nas duas turmas foram Albert Einstein, Isaac Newton, Thomas Edson e Stephen Hawking. Além deles, faziam parte do repertório dos alunos os cientistas Leibniz, Benjamin Franklin e Nicolau Tesla, alguns personagens de ficção e até mesmo a professora de ciências do colégio (única mulher cientista lembrada).

Após a discussão, cada grupo recebeu o baralho e a Ficha de Atividade para cada integrante. Os estudantes foram convidados a ler as informações das cartas e discutir em seus grupos algumas questões propostas: *Quais as características comuns entre as personagens? Qual relação pode ser feita entre as personagens e os nomes de cientistas relacionados na lousa? Por que nenhuma mulher foi citada? Quais outras mulheres são reconhecidas na ciência?*

Compreendendo que nomes de mulheres não foram diretamente associados aos nomes de cientistas, como justificativa alguns alunos consideraram a falta de oportunidades e outros – alunos homens – a falta de interesse das mulheres. Uma das alunas julgou estar na infância o princípio do desinteresse por disciplinas das ciências exatas e destacou que as mulheres são minoria na sua turma de futuros técnicos em informática. O apontamento da aluna coincide com o que entendem Spanger, Cascaes e Carvalho (2009, p. 137), ainda persiste uma forte influência de estereótipos sexuais na educação e uma sociedade androcêntrica ainda dominante, apesar de todos os avanços conquistados pelas mulheres no último século.

Entre as cientistas, apenas Marie Curie foi reconhecida por alguns. Ada Lovelace (Figura 1) foi destacada na discussão pela relação entre sua área de estudo e as disciplinas do curso. Valerie Thomas (Figura 2) também foi enfatizada por ser uma cientista contemporânea e representar as mulheres negras na ciência.

Figura 1

Figura 2

Figura 3

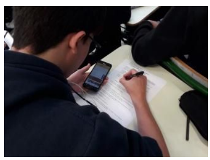


Figura 4

Elisabeth Blackwell, Lisa Meitner, Mileva Maric, Karen Uhlenbeck e Maryam Mirzakhani foram nomes incorporados à discussão após pesquisas (Figuras 3 e 4) feitas utilizando o celular.

Sobre a teoria de conjuntos, as atividades da ficha relacionaram as personagens nas cartas como elementos pertencentes ao conjunto de mulheres cientistas e outras informações do baralho também foram associadas à relações de pertinência. A ideia de que os cartões recebidos representava um subconjunto das mulheres cientistas introduziu a relação de continência entre conjuntos. Apesar do foco inicial nas mulheres cientistas, outros conjuntos, incluindo os numéricos, foram estudados.

De forma geral, as turmas atenderam às expectativas, pois compreenderam e participaram ativamente da dinâmica proposta: trabalharam em grupos, mediados pelos professores, e reconheceram inclusive que, infelizmente, as mulheres ainda não são lembradas quando o assunto é ciência. O trabalho em grupo também trouxe resultados: puderam elaborar questões sobre o conteúdo, construíram definições e resoluções, e discutiram sobre os significados e origens das notações utilizadas.

De forma analítica reflexiva, é possível aprimorar este plano de aula para possíveis aplicações futuras como, por exemplo, ampliar o debate sobre as questões de gênero na Ficha de Atividade (ancoradas nas cartas ou em outros textos) e enfatizar, também, a presença de mulheres negras na ciência. Embora as discussões tenham trazido comentários relevantes para a construção da cidadania e o desenvolvimento do raciocínio crítico, o material não contemplava vários temas que foram levantados nesse momento, para dar continuidade e aprofundá-los.

Logo, momentos como este são necessários, tanto para incentivá-los a ingressar na carreira científica quanto para valorizar a presença das mulheres na história da matemática e assim desconstruir a concepção de que as profissões científicas unicamente são masculinas. Com o comprometimento dos alunos foi possível desenvolver conceitos matemáticos acoplados ao debate e ao pensamento crítico, com autonomia, durante as aulas de resolução de problemas sobre conjuntos contextualizadas por biografias de mulheres importantes na matemática.

Referências:

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> Acesso em: 19 set. 2019.

KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.. **A resolução de problema na matemática escolar.** Tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria. Ângela. **História na Educação Matemática: propostas e desafios.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica:** a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001

CARVALHO, Maria G.; CASCAES, Tânia Rosa F.; SPANGER, Maria Aparecida F. Costa. Ciência e tecnologia sob a ótica de gênero. In: LUZ, Nanci Stancki da; CARVALHO, Marília G.; CASAGRANDE, Lindamir Salete (.org). **Construindo igualdade na diversidade**: gênero e sexualidade na escola. Curitiba: UTFPR, 2009.

Gênero, orientação sexual e raça nas disciplinas escolares de Física, Matemática e Química

Fernanda Dartora Musha[1]
Licenciatura em Matemática – UFPR

Prof. Elenilton Vieira Godoy (Orientador)
Departamento de Matemática – U
FPR
elenilton@ufpr.br

Palavras-chave: gênero, orientação sexual, raça, disciplinas escolares de exatas.

Resumo:

Este trabalho está sendo desenvolvido em Iniciação Científica pelo projeto Meninas na Matemática - Procuram-se Arletes, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). O projeto, que conta com três bolsistas da graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR), faz parceria com cinco escolas públicas (com 5 docentes responsáveis e 15 bolsistas de ICJúnior) a fim de inspirar e motivar mulheres a seguir carreira nas exatas. A escola, como instância constituinte de uma pedagogia cultural, legitima ideologias sociais e culturais; isso, contudo, ocorre decorosamente, dando à sociedade uma aparente sensação de justiça e naturalidade (LOURO, 2019; APPLE, 1989). Ao reproduzir relações de poder centradas e retratadas pelo homem cisgênero, branco, heterossexual, pertencente à classe média urbana e cristão, a escola ratifica padrões de comportamento socialmente construídos (LOURO, 2008; LOURO, 2019).

Tendo em vista então questões de gênero - em relação à mulher cis e à mulher trans -, orientação sexual e raça, o conflito emocional decorrente da reprodução de discriminações se expande nas disciplinas de exatas para mais níveis: a ausência de discussões acerca da construção dos padrões adotados como corretos na sociedade e os motivos para tanto no ambiente escolar acarreta na consequente reprodução e manutenção de desigualdades e preconceitos (ALMEIDA; LUZ, 2014). Estes então podem ser fatores determinante para o distanciamento da área de exatas, considerando que discentes podem ser afetados com tais violências nesses três aspectos.

O objetivo do presente estudo é atestar violências simbólicas - percebidas apenas em casos extremos - ocorridas nas aulas de Física, Matemática e Química em relação à gênero, orientação sexual e raça. Ainda, visa-se à identificação dos

[1] Bolsista do Projeto Meninas na Matemática: Procuram-se Arletes

sujeitos dessa ação - docentes, colegas, instituição de ensino, livro didático - e à compreensão do dever da Física, Matemática e Química nesse sentido. Além disso, busca-se compreender interpretação sobre como deve funcionar a relação de tais disciplinas com as questões de gênero, orientação sexual e raça por parte de discentes que futuramente atuarão como docentes no Ensino Básico fora da área de exatas. Procura-se estabelecer uma correspondência entre o afastamento das exatas na escolha da graduação e a questão emocional referente à Física, Matemática e Química, mais ainda, se essa questão está vinculada às violências simbólicas que ocorrem associadas a gênero, orientação sexual e raça.

Para alcançar os objetivos propostos o presente estudo se insere em uma abordagem quantitativa e qualitativa de pesquisa. A proposta metodológica consiste em uma pesquisa de campo, com o desenvolvimento e aplicação de questionários com questões objetivas e discursivas relacionando gênero, orientação sexual e raça à Física, Matemática e Química escolar. Buscando apresentar a visão de discentes dos cursos de Licenciatura na Universidade Federal do Paraná (UFPR) fora da área de exatas (considerando as graduações realizadas em Curitiba), elaboramos 26 perguntas para serem respondidas anonimamente, sendo 23 questões objetivas e 3 discursivas. O público alvo é composto então por discentes de Licenciatura em Artes Visuais, Licenciatura em Biologia, Licenciatura em Ciências Sociais, Licenciatura em Educação Física, Licenciatura em Filosofia, Licenciatura em Geografia, Licenciatura em História, Licenciatura em Letras e Licenciatura em Música.

O questionário, intitulado Gênero, orientação sexual e raça nas disciplinas escolares Física, Matemática e Química, foi desenvolvido na plataforma Formulários *Google*, fornecida gratuitamente pela *Google*, com aplicação online e anônima. Ele foi dividido em 5 seções, sendo elas Seção 1: Escolha da área de graduação; Seção 2: Sentimentos em relação às disciplinas escolares Física, Química e Matemática; Seção 3: Questões de Gênero, Orientação Sexual, Raça e as disciplinas escolares Física, Matemática e Química; Seção 4: Democracia, Justiça Social e as disciplinares escolares Física, Matemática e Química e Seção 5 - Identificação da pessoa respondente. O *link* para preenchimento do formulário foi disponibilizado pela coordenação de cada curso via *e-mail* ou por discentes do curso em grupos de diferentes redes sociais e todas as questões eram obrigatórias.

As seções são organizadas de forma a conseguir identificar o perfil socioeconômico da pessoa respondente, sua motivação para a escolha de seu curso e o consequente afastamento da área de exatas, sua relação com as ciências exatas no Ensino Básico, sua perspectiva a respeito da contribuição (positiva ou negativa) das disciplinas de Matemática, Química e Física para justiça social, seu sentimento (de acolhimento, coerção e desrespeito) nessas disciplinas, por qual canal o acolhimento ou coerção sucedeu e sua interpretação das atribuições da Educação Matemática no tocante às questões de gênero, orientação sexual e raça.

Com a aplicação dos questionários, espera-se compreender, a partir da percepção discente depois da saída do Ensino Básico, como se dão as relações de poder na aula de Física, Matemática e Química, corroborando ou não com a existência de uma série de violências simbólicas ocorridas nessas disciplinas nos ensinos fundamental e médio. Ainda, espera-se salientar quais são os agentes destas agressões, isto é, destacar os canais pelos quais se instalam e se reproduzem as violências simbólicas - instauradas com a aquiescência da pessoa dominada com relação à pessoa dominante, uma vez que aquela se utiliza da estrutura proveniente da incorporação de classificações que produzem seres sociais para ver e avaliar a outras pessoas, dominadas e dominantes, e a si mesma (BOURDIEU, 2019). A análise pode apontar quais cursos têm discentes com uma maior sensibilidade a tais hostilidades, e como cada corpo discente dos cursos considerados enxerga o papel da Física, Matemática e Química no tocante às questões de gênero, orientação sexual e raça. Além disso, será possível perceber se houve influência de uma postura excludente nas aulas de Física, Matemática e Química para o afastamento destes discentes da área de exatas.

Assim, almeja-se instigar a reflexão de docentes de Física, Matemática e Química para que, em seu exercício pedagógico, cultivem práticas inclusivas, que contemplem as diversidades existentes no ambiente escolar.

Referências:

ALMEIDA, K. D.; LUZ, N. S. da. Educação Sexual: uma discussão para a escola? Curitiba: Appris, 2014.

APPLE, M. W. Currículo e poder. Revista Educação e Realidade, Porto Alegre, v. 14, n. 2, p. 46-57, 1989.

BOURDIEU, P. A dominação Masculina - a condição feminina e a violência simbólica. 15. Ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.

BUTLER, J. Problemas de gênero: feminismos e subversão da identidade. 17 ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2019.

LOURO, G. L. Gênero e sexualidade: pedagogias contemporâneas. Revista Pro-Posições, Campinas, v. 19, n. 2(56), p. 17-23, 2008.

LOURO, G. L. Pedagogias da sexualidade. In: LOURO, G. L. (Org.). O corpo educado: pedagogias da sexualidade. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2019. p. 7-42.

SKOVSMOSE, O. Cenários de investigação. Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro (SP), n. 14, p. 66-91, 2000

SUCUPIRA, G. Será que as meninas e mulheres não gostam de matemática? Reflexões sobre gênero, educação e ciência a partir de uma etnografia sobre as olimpíadas de Matemática em Santa Catarina. In: CONGRESSO FAZENDO GÊNERO, 8., 2008, Florianópolis (SC).

Elementos da Análise Didática da Matemática

Gabriel José Cavassin Fabri
Estatística– UFPR
gjc.fabri@gmail.com

Profa Dra Maria Lucia Panossian
Departamento de Matemática – UTFPR
mlpanossian@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Análise Didática. Metodologia.

Resumo:

Análisis Didáctico, aqui apresentada como Análise Didática, é uma referência teórico-metodológica proveniente do Departamento de Didática da Matemática da Universidade de Granada, Espanha, baseada nas formas gerais de análise. O objetivo desse trabalho é apresentar a Análise Didática, algumas de suas fundamentações e sua organização, a fim de popularizar essa perspectiva que carece de trabalhos na língua portuguesa. Assim, com base em Lupiañez (2013) e Romero (2013, 2016), pontuam-se os principais aspectos dessa teoria, cujos pressupostos são a Análise Conceitual, como coloca Bardin (2011), e a Análise de Conteúdo, sintetizado pelos autores conforme o Quadro 1.

Análise conceitual	Análise de conteúdo
Unidade central de indagação	
Termo, conceito (por exemplo: modelo, quantidade, currículo...)	Um texto, discurso, tarefa escrita e comunicação
Sentido	
Externo ao conceito	Interno ao texto
Unidades básicas de análise	
Significados/definições do termo	Unidades menores de discurso (por exemplo: palavra-termo; verbo-adjetivo, palavra-frase)
Nível de análise	
Único	Continuo: manifesto-latente
Técnicas próprias	
Método do exemplo/contraexemplo. Linguagem vocativa e uso de analogias. Estruturação e interpretação da rede de significados do conceito.	Delimitação da unidade básica. Estabelecimento de categorias. Interrelação de categorias. Assinatura de unidades a categorias.
Disciplina em que opera	
Filosofia, epistemologia, história da ciência	Linguística, Matemática, Psicologia, Sociologia e Didática
Fim primordial	
Fundamentar e clarificar termos e conceitos	Estudar textos, tarefas ou relatos
Concepção prioritária sobre a análise	
Regressiva/escrutinadora	Divisora/redutiva
Sequenciamento	
Longitudinal: relevância da previsão histórica	Transversal: relevância da ampliação do discurso
Função auxiliar o método geral	
Definir termos. Classificar teorias. Validar construções.	Técnica de recolhimento de dados Técnica de análise de dados

Quadro 1 – Análise conceitual e de conteúdo.
Fonte: RICO; FERNÁNDEZ-CANO, 2013, p. 10-11, tradução livre

Com raízes nessas duas análises, Romero (2013) considera que a análise pode ser vista a partir de três movimentos: (i) regressiva-escrutinadora; (ii) desagregadora-redutiva; (iii) transformadora-interpretativa. A primeira trata da indagação dos princípios a serem provados, a segunda trata do desmembramento dos fenômenos e a terceira a priori do processo de decomposição.

> Para analisar algo, em primeiro lugar é necessário interpretá-lo de algum modo, traduzir o enunciado inicial em uma linguagem lógico ou científica, antes de articular elementos e estruturas relevantes, e assim contribuir com a identificação dos princípios para explicá-lo. A análise de um objeto se realiza a partir da relação dos elementos existentes que o constituem como um todo estruturado para sua interpretação (ROMERO, 2013, p. 12-13, tradução nossa)

Assim, organiza a Análise Didática, mostrando-a não apenas como um fundamento analítico, dentro do ciclo análise/síntese, mas também considerando que pode possuir o papel de método de investigação. Rico e Fernandez-Cano (2013) trazem a Análise didática como "[...] um conjunto de conceitos e métodos que alcançam um uso generalizado, tratado pelos grupos de pesquisa constituído na área da Didática da matemática." (p. 1, tradução nossa). Dessa forma, estabelecem quatro dimensões associadas a uma das subanálises como no Quadro 2.

Dimensões			
Cultural-conceitual	Cognitiva	Ético-normativa	Social
Métodos de análise			
Análise dos significados	Análise cognitiva	Análise instrucional	Análise de avaliação
Objeto de estudo			
Significado dos conteúdos matemáticos	Condições e orientação da aprendizagem matemática	Planejamento e orientação da aprendizagem matemática	Compreensões alcançadas: informação, quantificação e tomada de decisão.
Organizadores curriculares ou categorias para a análise em cada dimensão			
(i) Estrutura conceito; (ii) Sistemas de representação; (iii) Sentidos e modos de uso.	(i) Expectativas de aprendizagem; (ii) Limitações; (iii) Oportunidades de aprendizagem	(i) Tarefas e sequências; (ii) Organização do trabalho em aula; (iii) Materiais e recursos	(i) Modalidades e planejamento; (ii) Intervenção e tomada de decisão; (iii) Indicadores de qualidade.
Conteúdo didático/componentes de organizadores para análise de conteúdo matemático			
(i) Propriedades formais/ Funcionalidade cognitiva- atitudes emocionais, morais e éticas. (ii) Representações simbólicas/ gráficas/ numéricas. (iii) termos/contextos/ fenômenos/ situações.	(i) Objetivos/ competências/ compromissos; (ii) Erros/ dificuldades/ empecilhos. (iii) Condições/ demandas/ desafios.	(i) Variáveis de tarefa/ funções; (ii) Complexidade/ criatividade/ organização; (iii) Características/ tipos de uso	(i) Funções/ normativo/ momentos; (ii) Critérios/ instrumento/ rendimento; (iii) Avaliação estratégica/ estudos comparativos
Síntese			
Significados prioritários para o	Estrutura das tarefas matemáticas	Organização do ensino a partir de	Compreensões e qualidades dos

ensino e aprendizagem	relativas à aprendizagem esperada	unidades didáticas.	aprendizados alcançados
Conteúdo didático de um tema da matemática resultante da análise didática			

Quadro 2 - Categorias para a análise didática
Fonte: (ROMERO, 2016, p. 96, tradução nossa)

Assim, a Análise Didática é sintetizada como o processo de quatro análises distintas, que possuem como finalidade reconhecer o conteúdo didático presente em algum elemento textual, objeto da análise. Para isso, estabelece ferramentas de segmentação do conhecimento matemático.

Um desses elementos é a organização disciplinar segundo seus objetos e segundo seu procedimento, sendo que o primeiro trata mais do movimento de ontogênese e filogênese, levando a considerar blocos de conteúdo: Aritmética, Álgebra, Geometria, Análise, Estatística e Probabilidade. Em relação ao procedimento, trata da forma como os conceitos são trazidos, ainda que

> Em geral, a organização clássica das disciplinas respeita uma sequência; iniciam o procedimento com as definições e notações, o continuam com os axiomas, enunciados, operações e propriedades, e o terminam com os teoremas e corolários, concluindo com as aplicações. (ROMERO, 2016, p. 88, tradução livre)

Traz a separação no sentido cognitivo dos conceitos em campos: conceitual, procedimental, atitudinal. E o seu sentido fenomenológico: numérico, espacial, métrico e estocástico, cada um desses ligado ao um bloco de conteúdo.

Portanto, compreende-se nesse delineamento de análises, considerando os pressupostos de organização do conceito, espera-se que, com base na relação análise-síntese, a compreensão da unidade didática dos conceitos, visando aprimorar a prática docente. A exemplo disso, tem sido uma das bases utilizadas na formação de professores espanhóis, apresentando potencialidades para a formação de educadores brasileiros.

Referências:

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. 3 ed. São Paulo: Edições 70, 2011. Tradução de: Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro.

LUPIAÑEZ, J. L. Análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. In: RICO, L.; LUPIAÑEZ, J. L.; MOLINA, M. (Org.). **Análisis didáctico en educación matemática:** metodología de investigación, formación de profesores, e innovación curricular. Granada: Comares, 2013. Cap. 4. p. 81-101.

RICO, L; FERNÁNDEZ-CANO, A. Análisis didáctico y metodología de investigación. In: RICO, L; LUPIAÑEZ, J L; MOLINA, M. **Análisis Didático en Educación Matemática***:* Metodología de investigación, formácion de profesores e inocación curricular. Granada: Comares, 2013. Cap. 1. p. 1-22.

ROMERO, Luis Rico. El método del Análises Didáctico. **UNIÓN**: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, FISEM, v. 1, n. 33, p.11-27, mar. 2013.

ROMERO, L. R. Matemáticas y análisis didáctico. In: ROMERO, L. R.; LUPIANEZ, J L; MOLINA, M. **Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria.** Madri: Pirâmide, 2016. Cap. 4. p. 85-100.

Números decimais e educação financeira

Bruno Ferreira Mariani[1]; Carla Gabriela Hamester[1]; Gabrielly Larsen[1]; Gabriella Conceição de Almeida[1]; Mariana da Silva Freitas[1].
Licenciatura em Matemática – UFPR
mariani.bruno.f@gmail.com; hamestercarla@gmail.com; gabyyy360@hotmail.com; gabyalmeida.ga00@gmail.com; marianadasilvafreitas@hotmail.com

Prof. Elisangela Campos
Departamento de Matemática - UFPR
eliscamposmat@gmail.com

Palavras-chave: Números Decimais, Projeto, Educação Financeira

Resumo:

Com o objetivo de oferecer aos alunos da Escola Municipal Albert Schweitzer, em Curitiba, uma diferente perspectiva no ensino e aprendizagem da matemática, os bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná organizaram um projeto referente ao ensino dos números decimais, em três turmas dos sétimos anos, a pedido da professora regente. O projeto foi aplicado em 2019 e atingiu 105 alunos. Como base para compreender qual seria a melhor forma de se trabalhar o conteúdo em sala de aula, foi feita uma análise da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Fundamental, e também um estudo sobre alguns livros didáticos usados nas escolas públicas do Brasil.

Pensou-se então na aplicação de um jogo no laboratório de matemática, envolvendo números decimais e a sua relação com dinheiro. A turma foi dividida em grupos de seis ou mais alunos. Uma etapa do jogo consistia em cada um dos integrantes do grupo realizar, individualmente, o lançamento de dois dados diferentes (figura 1), cujos lados eram representados por números decimais. Os alunos deveriam então realizar a adição dos resultados encontrados em cada um dos dois dados. Caso realizassem a adição corretamente, ganhariam, em notas falsas, o dinheiro equivalente ao valor somado. Caso contrário, receberiam um pouco menos de dinheiro. O objetivo, além da realização das somas, era fazer com que cada estudante ficasse com o menor número de notas ou moedas possível. Cada grupo era responsabilidade de um dos bolsistas do PIBID, que ficaria encarregado de distribuir e organizar o dinheiro, além de fazer trocas a pedido dos alunos, como, por exemplo, trocar duas notas de cinco reais por uma de dez reais ou duas moedas de cinquenta centavos por uma moeda de um real. No fim de três etapas, cada aluno foi instruído a realizar a soma dos resultados obtidos em cada etapa, com a finalidade de obter um valor final que seria utilizado nas atividades seguintes.

[1] Bolsistas do PIBID UFPR

Figura 1 – Objetos usados para o jogo dos dados

Fonte: os autores

Como continuação do projeto, foram distribuídas tabelas com preços de produtos tipicamente encontrados em padarias. Os alunos deveriam, individualmente, usar esse valor final obtido no jogo, convertido em dinheiro, para realizar o orçamento do que foi chamado de "lanche da semana". Ou seja, durante cinco dias, com o dinheiro obtido no jogo, eles deveriam comprar, no mínimo, um salgado e uma bebida, sem que todos os dias tivessem escolhas repetidas. Além disso, não deveria sobrar mais dinheiro que o item mais barato da tabela. A ideia desse processo era treinar noções de divisão e aproximações, já que, idealmente, os alunos fariam uma estimativa de um valor a ser gasto por dia, mas não gastariam a mesma quantidade todos os dias. Notou-se certa dificuldade geral no quesito de aproximações e estimativas, necessitando que os bolsistas orientassem os alunos a equilibrar os dias com mais gastos e dias com menos gastos.

Para a parte final do projeto, pediu-se que os alunos se juntassem novamente com os mesmos grupos com que fizeram o jogo dos dados. Dessa vez, deveriam somar os valores finais de cada integrante para obter o dinheiro referente ao grupo. Multiplicando esse valor por dois, o objetivo dessa parte do projeto era fazer com que o grupo todo realizasse outro orçamento, do que foi chamado de "compra do mês". Foram distribuídos panfletos de mercado e uma folha, para cada grupo, mostrando as compras essenciais e obrigatórias. Com o dinheiro restante, poderiam comprar o que quisessem. Cada grupo montou um cartaz (figura 2), expondo os produtos comprados, e em uma folha separada realizaram os cálculos de adição e multiplicação.

Figura 2 – Cartazes de compra

Fonte: os autores

O projeto ocorreu durante três aulas em cada turma. Para os integrantes do PIBID, essas atividades representaram uma diferente perspectiva para o ensino na sala de aula. Percebeu-se, como esperado, uma maior facilidade e principalmente interesse dos alunos em trabalhar com os números decimais, facilitando e fortalecendo seu aprendizado. Além disso, pôde-se observar o desenvolvimento positivo na dinâmica em grupo. Sendo assim, concluiu-se ser necessária uma introdução ao sistema monetário anterior à aplicação desta atividade, para que os alunos consigam entender melhor a relação de equivalência entre as notas e moedas. Principalmente, notou-se um retorno positivo por parte dos alunos, que evidenciou os benefícios de buscar situações que retratam a realidade no ensino da matemática.

Referências:

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI Jr, José Ruy. *A Conquista da matemática 6ª série*. São Paulo-SP: FTD, 2002.

BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática Atual 6ª série*. São Paulo-SP: Atual, 1994.

WOZIVODA, Amélia. Brincando com a Matemática: o uso de atividades lúdicas para o ensino de números decimais. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unicentro_mat_pdp_amelia_wozivoda_traczewski.pdf. Acesso em: 28 de agosto de 2019.

A História da Matemática como aporte para a construção de conceitos matemáticos: discutindo o conceito de medidas

Guilherme Oliveira Santos[1]
Licenciatura em Matemática – UEM
gui14gos2014@gmail.com

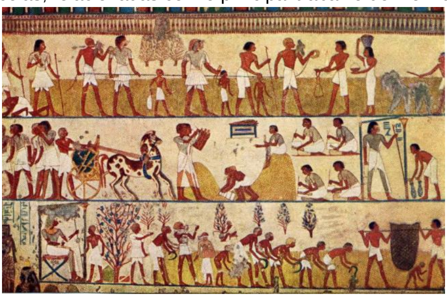
Sandra Regina D'Antonio Verrengia (Orientadora)
Departamento de Matemática – UEM
sandradantonio@hotmail.com

Palavras-chave: Educação Matemática, História da Matemática, Medidas.

Resumo:

O presente trabalho descreve um relato de experiência ocorrido durante o período de Estágio Supervisionado I em um colégio particular do Município de Nova Esperança-PR, a partir da aplicação de uma oficina[2] intitulada "Medindo no Egito" voltada para o 6º e 7º ano, que tinha por objetivo trabalhar o conceito de medição partindo da unidade de medida conhecida como côvado (distância da ponta do dedo indicador até o cotovelo). A atividade em questão teve como motivação inicial a leitura e análise da figura 1, visando a contextualização histórica e o estudo sobre a civilização egípcia: suas relações de trabalho, necessidades, costumes, organização hierárquica e formas de pensar e utilizar a matemática.

Figura 1: Cenas agrícolas, relacionadas com o principal trabalho de Menna em vida (Traduzido)



Fonte: Lázaro (2012)

A opção pelo trabalho com a História da Matemática deve-se ao fato de que podemos, a partir dela, mostrar a relação existente entre a construção e

---

[1] Discente do curso de Licenciatura em Matemática

[2] Essa oficina é a adaptação de um minicurso elaborado e aplicado pelo Grupo de Estudos em História da Matemática e Educação Matemática (GHMEM), coordenado pela Prof.ª Dr.ª Lucieli M. Trivizoli da Universidade Estadual de Maringá (UEM-PR).

consolidação da Matemática enquanto Ciência e a vida. Ideia preconizada pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018):

> [...] a Matemática deve ser vista como um processo em permanente construção, como mostra a História da Matemática. Seu estudo não deve se reduzir à apropriação de um aglomerado de conceitos. O estudante deve ser motivado a, em seu percurso escolar, questionar, formular, testar e validar hipóteses, buscar contra exemplos, modelar situações, verificar a adequação da resposta a um problema, desenvolver linguagens e, como consequência, construir formas de pensar que o levem a refletir e agir de maneira crítica sobre as questões com as quais ele se depara em seu cotidiano (BRASIL, 2018, p. 131).

Assim,

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos (BRASIL, 1999, p. 42).

Em sala de aula, uma possibilidade de se trabalhar com a História da Matemática seria a partir do uso de fontes originais, por meio de atividades que envolvam representações gráficas e possibilitem uma discussão sobre os contextos históricos e a Matemática. Chamamos esse estudo descritivo de iconografia: “[...] ramo da história da arte que trata do tema ou mensagem das obras de arte em contraposição à sua forma.” (PANOFSKY, 1991).

Panofsky (1991) sugere que as imagens sejam analisadas em três níveis de profundidade, a saber: pré-iconográfica, que consiste numa descrição primária para identificação de aspectos ligados a imagem; iconográfica, que tem como enfoque identificar o tema e estudar o significado da imagem; e iconológica, que exige uma interpretação e síntese da imagem a partir do contexto em que foi criada.

Assim, inspirados no modelo proposto por Panofsky (1991), estabelecemos três momentos distintos para o desdobramento da oficina em questão: sendo o primeiro correspondente a análise da imagem; o segundo o de contextualização histórica, partindo-se do que os discentes observavam e de seu conhecimento a respeito do assunto, tendo-se em vista que o tema Egito é trabalhado na disciplina de História no 6º ano na maioria das escolas; e, o terceiro a realização de uma atividade prática que consistia em medir o contorno da sala de aula usando como referência o côvado e, a partir do método de multiplicação egípcia, encontrar o valor correspondente a esse contorno em centímetros e metros.

Ao final da oficina propomos aos alunos que respondessem as seguintes indagações: O que você já sabia sobre o assunto? e O que você aprendeu? Dentre as respostas descrevemos:

> *Aluno 1*: *"Que aprendemos sobre o Egito como a matemática chegou lá como eles mediam as coisas como eram as tumbas e como faziam as operações".*
>
> *Aluno 2: Bem eu já sabia sobre o Egito, mas não sabia que eles usavam tanto a matemática e como mediam as coisas. Aprendi a multiplicação dos Egípcios, e a medida deles - o côvado e que eles lá trás já contavam grãos".*

A partir da atividade desenvolvida, foi possível verificar o interesse e envolvimento dos alunos, uma vez que a oficina propiciou a interação entre os discentes dando-lhes a oportunidade de se expressar, explorar, conjecturar e defender seu raciocínio. Lendo seus relatos foi possível também perceber que os alunos conseguiram compreender os objetivos propostos nesse trabalho, estabelecendo uma relação entre a História da Matemática e o conceito de medida.

A experiência desse estágio então mostrou-nos que existem outras possibilidades de exploração dos conceitos matemáticos, outras metodologias, como a História da Matemática que possibilita aos estudantes uma reflexão a respeito das "informações históricas de modo a estabelecer conexões entre os aspectos cotidiano, escolar e científico da matemática presente nessa história" (MENDES, 2006, p. 97). Nesse sentido, o trabalho permitiu o enriquecimento de todos os envolvidos.

Referências:

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEF, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**: Matemática. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, 1999.

MENDES, I. A. **A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula**. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. A História como um agente de cognição na Educação Matemática. Porto Alegre: Sulina, 2006. p. 79-136.

PANOFSKY, E. **Iconografia e Iconologia:** Uma introdução ao estudo da arte da Renascença. In: PANOFSKY, E. Significado das artes visuais. Tradução: Maria Clara F. Kneese e J. Guinsburg. São Paulo: Perspectiva, 2 ed., 1991, p. 47-65.

TRIVIZOLI, Lucieli M. (Org.). **Contextos Histórico e Matemático a partir do Estudo de Ilustrações**. São Paulo: Livraria da Física, 2019.

A robótica aplicada em sala de aula

Fernando Kolb Domingos, Gustavo Teixeira de Macedo
Licenciatura em Matemática – UTFPR
fernando.kolb@gmail.com; gustavoteixeira2799@hotmail.com.

Profa. Luciana Schreiner de Oliveira
Departamento Acadêmico de Matemática – UTFPR
lucianaoliveira@utfpr.edu.br

Profa. Maria Lucia Panossian
Departamento Acadêmico de Matemática – UTFPR
mlpanossian@utfpr.edu.br

Prof. Miguel Antonio Sovierzoski
Departamento Acadêmico de Eletrônica – UTFPR
miguelaso@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Arduino, robótica educacional, informática.

Resumo:

Pensando na necessidade de se adaptar aos rápidos avanços da tecnologia e levar diversidade para a sala de aula, a ideia de trabalhar com robótica educacional surgiu, e sabendo do impacto que uma aula diferenciada pode apresentar, criamos uma situação de ensino que leva a programação de forma acessível a todos os alunos.

> Em decorrência do avanço e da multiplicação das tecnologias de informação e comunicação e do crescente acesso a elas pela maior disponibilidade de computadores, telefones celulares, tabletes e afins, os estudantes estão dinamicamente inseridos nessa cultura, não somente como consumidores. (BRASIL, 2018, p. 61)

Tendo isso em mente a robótica educacional era uma boa escolha para aproximar a tecnologia ao aluno, dando uma introdução sobre o que era robótica, a programação envolvida e como a matemática se relaciona com a nossa realidade.

> Estudos e pesquisas evidenciam que a robótica tem impacto potencial no aprendizado dos alunos em diferentes áreas do conhecimento (física, matemática, engenharia, computação e muito mais) e em relação ao desenvolvimento pessoal, incluindo cognição, meta-cognição e habilidades sociais, como: habilidades de pesquisa, pensamento criativo, tomada de decisão, resolução de problema, comunicação e trabalho colaborativo. (EGUCHI, 2010; BENITTI, 2012 apud CAMPOS, 2017, p.2110)

No relato que seguirá, contaremos como foi a experiência aplicando a situação de ensino que foi desenvolvida e adaptada para uma turma de alunos

com altas habilidades/superdotação, com alunos de séries diversificadas (de 7º ano do ensino fundamental até 2º ano do ensino médio) colocados juntos para efetuar a mesma atividade com o conteúdo de função linear do primeiro grau (funções do tipo $y = ax$) utilizando a robótica e a programação com o Arduino como ferramentas para explorar o tema abordado.

Já foi realizada uma aplicação prévia da mesma situação de ensino, para alunos do ensino regular, porém um pouco reduzida quanto à quantidade de exercícios para uma turma de 1º ano do curso técnico em teatro em um colégio estadual no Paraná.

A adaptação que foi realizada aconteceu devido às expectativas referentes à turma de alunos com altas habilidades, que esperávamos resolver todas as atividades propostas com facilidade, e nesta adaptação, acrescentamos alguns desafios de robótica para que os alunos pensassem em maneiras de programar o “carrinho” robótico para que ele realizasse trajetos específicos, por exemplo, executar o símbolo do infinito e desviar de obstáculos.

A atividade tem duração de duas aulas geminadas (140 minutos), e os materiais necessários são computadores com o programa Arduino IDE instalado, o carrinho montado, um projetor para a exibição da programação, baterias recarregáveis para a alimentação das partes eletrônicas e réguas ou fita métrica para a determinar a distância percorrida.

Infelizmente houveram alguns imprevistos no dia da aplicação da situação de ensino elaborada: o primeiro empecilho que enfrentamos foi ter que procurar uma sala disponível, pois o laboratório de informática não havia sido reservado e seria utilizado para uma outra atividade da escola. O segundo problema foi a locomoção até a outra sala “emprestada”, que tomou alguns minutos a mais da aplicação, tanto para organizar todo o material que seria utilizado e organização da sala em si, como para a organização dos alunos em para a realização da situação; por fim, tivemos nosso tempo reduzido pois a professora que nos concedeu a sala, temporariamente, precisou retornar para finalizar o desenvolvimento das atividades com a sua turma.

Foram formadas duas equipes com três alunos e uma equipe com quatro alunos, e durante o tempo que foi utilizado de fato para a explicação da situação de ensino com robótica percebemos que alguns alunos estavam agitados e conversando entre si, o que dificultou o desenvolvimento da atividade. Nenhum grupo teve problemas com a compreensão da programação, e foram capazes de fazer o carrinho funcionar como esperado, contudo, com o tempo disponível sendo reduzido, os alunos foram capazes somente de realizar alguns testes de movimentação do carrinho e medir a distância percorrida pelo mesmo, e também calcular a sua velocidade média (em cm/s), mas não foi possível o desenvolvimento dos exercícios restantes, estes que envolvem a confecção da representação gráfica de uma função afim e também da conjectura da função que descreve a distância percorrida pelo carrinho em função do tempo que foi programado.

No decorrer da situação de ensino, observamos que os alunos apresentaram o mesmo comportamento de uma outra turma no ensino regular; analisamos a aplicação nas duas turmas, e na explicação sobre a programação os alunos de ambas ás turma prestavam atenção na explicação do professor, mas quando se iniciava a resolução da situação de ensino, os alunos das duas turmas se desviavam da resolução dos problemas propostos e brincavam com o robô e interagiam com as equipes ao seu lado, mostrando a programação que realizaram. Como infelizmente tivemos imprevistos e isso afetou a aplicação da situação de ensino, não foi possível uma análise completa sobre as duas aplicações, mas conseguimos observar, mesmo sendo turmas com necessidades educacionais diferentes, demonstraram comportamento iguais referente a situação de ensino, assim entendemos que uma situação de ensino pode ser aplicada em vários contextos e ambientes escolares diferentes apenas conhecer os alunos a quem será aplicado e assim realizando uma adequação a turma.

Referências:

BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria Executiva; Secretaria de Educação Básica; Conselho Nacional de Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018.

CAMPOS, Flavio Rodrigues. **Robótica educacional no Brasil**: questões em aberto, desafios e perspectivas futuras. Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação, Araraquara, v. 12, n. 4, p. 2108-2121, dez. 2017.

Jogos Pedagógicos em Aulas de Matemática:

Possibilidades de Uso do 7° Ano do Ensino Fundamental

Hanaan Tarbine

Licenciatura em Matemática – UTFPR

hanaantarbine@gmail.com

Profa. Dra. Leônia Gabardo Negrelli

Departamento de Matemática – UTFPR

negrelli@utfpr.edu.br

Palavras-chave: ensino de matemática, jogos pedagógicos, ensino fundamental.

Resumo:

No decorrer do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Curitiba (UTFPR-CT) há a possibilidade de conhecer e investigar diversos recursos didáticos e tendências metodológicas no âmbito da Educação Matemática. Nesse cenário, os jogos se destacaram dentre os recursos estudados, uma vez que, por meio do ensino com estratégias diferenciadas, como o uso de materiais didáticos manipuláveis e jogos pedagógicos, o conhecimento matemático pode ser construído pelo aluno de maneira mais significativa, pois a participação dele precisa ser ativa. Neste estudo denominamos como pedagógicos os jogos utilizados em sala de aula, incorporados pelo professor no planejamento e execução de suas atividades de ensino, com o propósito de abordar conteúdos matemáticos.

O desenvolvimento desta pesquisa ocorreu concomitantemente à realização do Estágio Supervisionado Obrigatório da primeira autora, cujo interesse era investigar possibilidades para o uso de jogos em aulas regulares de matemática, o que a levou a planejar uma pesquisa de campo, cujo resultado final foi a elaboração e uso de um jogo matemático e de atividades relacionadas a ele para uma turma do 7° ano do Ensino Fundamental.

O estágio obrigatório a ser realizado nos anos finais do Ensino Fundamental compreendeu 105 horas de atividades sendo que, desse total, um mínimo de 45 horas foi destinado à execução de atividades no ambiente escolar e outras cerca de 30 horas utilizadas para o planejamento das atividades de ensino a serem realizadas.

A pesquisa buscou estar em conformidade com os documentos oficiais vigentes, sendo eles nacionais, regionais e locais, relativos ao ensino de matemática, como as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná (DCE-PR), do ano de 2008; os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Fundamental, de 1998; O Guia Didático do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), de 2017 e o Projeto Político Pedagógico (PPP), de 2014, do colégio ambiente da pesquisa de campo.

Embora os documentos oficiais fomentem a utilização de jogos, nota-se que eles são pouco explorados nas salas de aula.

Emerique, na obra de Bicudo, cita Schwartz que considera:

> A noção de jogo aplicado à educação desenvolveu-se com lentidão e penetrou, tardiamente, no universo escolar, sendo sistematizada com atraso. No entanto, introduziu transformações decisivas... materializando a ideia de aprender divertindo-se, devido à sua fertilidade pedagógica essencial.'' (SCHWARTZ, 1998, p.66)

Essa ausência pode ocorrer por vários fatores, como pelo pouco conhecimento, por parte dos professores, desse recurso e de suas potencialidades, pela forma como o desenvolvimento curricular é proposto nas instituições de ensino, por restrições relacionadas à disponibilidade de tempo e recursos materiais, dentre outros. Diante disso, um elemento decisivo no emprego de jogos é a opção que o professor faz ao incluir este recurso em suas aulas, visto que caberá a ele suprir esta carência.

Desse modo, o presente estudo teve como objetivo principal investigar as potencialidades do uso de jogos pedagógicos, em aulas de matemática, do Ensino Fundamental II, visando desenvolver o conhecimento matemático de maneira mais significativa.

Os aspectos metodológicos da pesquisa envolveram o estudo do PPP do colégio campo de pesquisa e do estágio obrigatório, o levantamento dos jogos presentes na escola e no livro didático adotado pela mesma, além do acesso ao planejamento da professora regente. O estudo de caso partiu do planejamento e execução de aulas com a inserção do jogo da memória proposto, que englobam a definição, produção, aplicação e avaliação, o que permitiu a análise dos benefícios e dificuldades encontrados na utilização deste recurso.

Juntamente com as professoras supervisora e orientadora do estágio, optou-se por desenvolver três jogos, semelhantes ao conhecido jogo da memória, com os seguintes conteúdos: ângulos; perímetro e expressões polinomiais do primeiro grau e resolução de problemas envolvendo equação polinomial do primeiro grau. Dessa forma, foram elaborados três kits de jogos sobre os assuntos mencionados. Também foram elaboradas atividades complementares a cada jogo, parte importante para a avaliação do desempenho dos alunos, da atuação do professor e do funcionamento do jogo.

Por último, ocorreu a proposição dos jogos nas regências de aulas regulares ao decorrer do estágio, assim como a aplicação das atividades complementares. A avaliação contou com a observação do envolvimento dos alunos ao decorrer da aplicação, e com o desempenho nas folhas de atividades.

A escolha por incorporar o uso de jogos pedagógicos em turmas regulares e não em salas de apoio ou como atividades extracurriculares, com um número reduzido de alunos é uma característica essencial desta pesquisa. Outra é a utilização do jogo como elemento do processo avaliativo do ensino e da aprendizagem, com o que pudemos abordar o jogo sem que o foco fosse a diversão ou um elemento motivacional apenas. Com isso, constatou-se que é possível relacionar um recurso didático lúdico com um sistema avaliativo, desmistificando a necessária produção de uma nota que revele algo acerca do empenho e do desempenho do aluno e do professor.

Percebeu-se que para a elaboração adequada de um jogo é necessário levar em conta diversos aspectos. Um deles é analisar os pré-requisitos de possíveis conteúdos relacionados ao jogo; outro é analisar a realidade do aluno e ver se, de fato, a aplicação é viável. O desenvolvimento deste trabalho relacionado com o estágio supervisionado foi produtivo e satisfatório por conta disso, pois durante o semestre em contato com a escola, foram feitas observações participantes, além de regências com a turma na qual se que pretendia desenvolver a proposta envolvendo o jogo elaborado, o que permitiu conhecer o grupo de alunos, os recursos e contingências do ambiente escolar.

Referências:

BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. **Educação matemática: pesquisa em movimento.** 3. Ed. São Paulo: Cortez, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Programa Nacional do Livro Didático- PNLD 2017:** matemática – ensino fundamental anos finais. Brasília: SEED, 2016.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CURITIBA, **Projeto Político Pedagógico**: Colégio Estadual Natália Reginato, 2014.

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** 2. Ed. Campinas: Autores associados, 2009. (Coleção formação de professores).

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica:** matemática. Curitiba: SEED, 2008.

A MATEMÁTICA NA ALIMENTAÇÃO: A RECEITA E OS ALIMENTOS EM UMA VISÃO INTERDISCIPLINAR.

Higor Afonso Candido Pinto
Licenciatura em Matemática – UFPR
higorunited@yahoo.com

RESUMO:
Este relato apresenta uma sequência de aulas com a temática de alimentação, com uma proposta interdisciplinar de Língua Portuguesa, História, Geografia e Matemática, em particular Grandezas e medidas, em turmas de 2º Ano do Ensino Fundamental. Com essa proposta, o estudante perceberá como um padrão de unidades de medidas é importante para fazer receitas de alimentos e que cada mudança pode acarretar em problemas na sua execução.

PALAVRAS-CHAVE: Receita. Alimentos Típicos. Grandezas e Medidas. Interdisciplinaridade.

INTRODUÇÃO:

Desde os primórdios da humanidade, a necessidade de comparar elementos é utilizada para a troca de matérias-primas. Porém, a falta de um padrão se tornou um problema com a globalização dos povos e nisto a necessidade de estabelecê-la se transformou em fato. Na atualidade, medir é a base da sociedade, desde a venda e compras em um supermercado até as altas inovações na engenharia, investimentos financeiros e administração de empresas

Na sociedade atual, a gastronomia vem ganhando espaço no entretenimento e as pessoas cada vez mais se importam em cozinhar, o sabor dos alimentos, como saber fazer pratos saborosos, com o menor gasto possível. Programas de “cozinhar” interessam as pessoas, em particular as crianças, que vão apresentando uma enorme curiosidade para como é feito as refeições que eles comem e auxiliar nesta atividade diária.

Nisto, foi realizado uma sequência de atividades, interdisciplinarmente nas disciplinas de Língua Portuguesa (com o gênero textual Receita), Matemática (com as grandezas e medidas de massa, capacidade e de Sistema Monetário), Geografia e História (com a pluralidade cultural brasileira durante a história, pelo ponto de vista da gastronomia) em duas turmas de 2º Ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal no município de Fazenda Rio Grande. A Interdisciplinaridade é um conceito importantíssimo para o ensino nos tempos atuais, ensinando de uma forma dinâmica e contextualizada, nesta geração onde ensinar está cada vez mais desafiador. Segundo Fazenda (2002, p. 18), a interdisciplinaridade é “o movimento em prol de um ensino que considere o todo, o global das áreas de conhecimento, ou seja, a interdisciplinaridade surgiu em oposição à especialização e à fragmentação demasiadas do conhecimento, que separam e distanciam a realidade vivida no cotidiano do que se discute teoricamente nas universidades”.

Estabelecer padrões é um dos princípios fundamentais da Matemática ao longo da historia e foram inúmeros processos para estabelecer esses padrões. Mas o que é medir?

“Medir é comparar” (VIANNA, 2014, p. 35). Mas como mostrar esta comparação para alunos na alfabetização? Isto é um principio que está implicitamente no cotidiano da criança, mesmo muita vezes ela não percebendo como unidades de medidas, como nas embalagens de produtos. Porém para as crianças são apenas os mesmos números que aparecem em telefones ou endereços. Entretanto, prossegue Vianna “Comparamos atributos, ou grandezas, que devem ter a mesma natureza” (VIANNA, 2014, p.35), um conceito que é facilmente contextualizado para os alunos, mas dificilmente formalizado para eles.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, o aluno deve ser induzido a “Reconhecer grandezas mensuráveis, como comprimento, massa e capacidade e elaborar estratégias pessoais de medidas” (BRASIL, 1997, p. 66). Com isso, um tratamento diferenciado para o ensino de grandezas e medidas pode influenciar no aprendizado do aluno, fazendo-o relacionar essa construção histórica, a conceituação matemática e a suas vivências no cotidiano. Vale lembrar que a utilização dos instrumentos de medidas adequados para cada grandeza é fundamental, pois leva o aluno a refletir sobre a importância de existir um padrão de medida para cada grandeza, onde existe um instrumento adequado e que a comparação entre grandezas diferentes pode acarretar em estimativas confusas e conclusões não válidas.

Neste sentido, esta sequência de aulas tem como objetivo o ensino das grandezas e medidas de capacidade, de massa e de valor monetário, por meio da leitura, interpretação e aplicação do gênero textual receita.

Para introduzir a sequência de aulas, foi lida a história “Rodolfo, o Ursinho Confeiteiro”, realizando uma roda de conversa sobre a história, além de iniciar uma discussão sobre as características de uma receita e a sua utilidade no cotidiano. Com isso, foi entregue uma receita de bolo de chocolate para leitura coletiva. Aprofundando, com uma discussão de como mudar as medidas dos ingredientes pode fazer a receita “não dar certo” e colocar para eles como medir é importante no cotidiano das pessoas.

Na sequência, mostrando vários elementos que são usados para medir quantidades de massa e capacidade como xícaras de diferentes tamanhos, uma balança de pratos e outra digital, além de um copo de medidas. Com esses objetos, foram colocados vários alimentos como um saco de arroz, de feijão, caixa de leite, caixa de leite condensado, entre outros produtos. Com isso, foi explicado para eles que aquelas letras que aparece ao lado do número é a unidade de medida, além de questionar quem já tinha ouvido falar de litro, mililitro, quilograma e grama, os fazendo notarem que se utiliza o litro e mililitro em alimentos e ingredientes líquidos e quilograma e grama para alimentos sólidos, além que a diferença na unidade altera a quantidade, mesmo o número que aparece na embalagem é maior.

Em seguida, foi colado um cartaz com todas as cédulas e moedas para leitura diária nas aulas e a foi colocado cédulas e moedas verdadeiras para os alunos manusearem e fazerem as trocas equivalentes. Em seguida, foi entregue cédulas e moedas sem valor para cada criança na mesma quantidade, colocado cantos com embalagens de produtos diversos, além de um folder com os preços dos produtos e simulado uma região de comércio para que eles pagarem os produtos e receber o troco correto do colega do caixa, além de encontrar os ingredientes para fazer a receita do beijinho, analisando o valor total dos ingredientes.

Encerrando esta sequência de aulas, com a contribuição voluntária da família das crianças com os ingredientes, foi realizada uma aula de culinária para fazer o beijinho. Realizada a releitura da receita do beijinho, colocando em cima de uma mesa central os ingredientes nas quantidades corretas. Disto, os alunos foram lendo o modo de fazer, colocando alguns alunos para realizarem a ação pedida.

CONCLUSÃO

Concluí-se com este relato que as grandezas e medidas são fundamentais no cotidiano, além de ser um conteúdo que precisa de sua devida importância na visão da educação básica, em particular nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Com isso, uma sequência didática interdisciplinar coloca para o estudante as grandezas e medidas como algo contextualizado, que a importância de padrões de medidas é evidente, em particular em receitas culinárias típicas, que este alimento será apreciado e confeccionado ao redor do mundo.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Parâmetros **Curriculares Nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília: MEC/SEF, 1997.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Interdisciplinaridade: história, teoria e pesquisa**. 10ª. Ed. Campinas: Papirus, 2002.

VIANNA, C. V. **Afinal, o que é medir? In: BRASIL. Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Grandezas e Medidas** / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014.

A Grounded Theory implicada à sala de aula: apontamentos para a análise de dados em jogos de Quiz

Ingrid Aline de Carvalho Ferrasa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – (PPGECT) – Campus Ponta Grossa.
ingridferrasa@alunos.utfpr.edu.br

Awdry Feisser Miquelin (Orientador)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – (PPGECT) – Campus Ponta Grossa
awdry@utfpr.edu.br

Palavras-chave: *Grounded Theory*, Jogos de *Quiz*, Sala de Aula.

Resumo:

A partir de uma prática pedagógica desenvolvida com 31 alunos do 9º ano do Colégio Estadual Professor Colares em Ponta Grossa – Paraná, um número significativo de dados foram coletados. Tal prática envolveu a elaboração e o desenvolvimento de jogos do tipo *quiz* (de perguntas e respostas - em meio físico) como instrumento de ensino e aprendizagem nas aulas de Matemática. Os estudantes dispostos em equipes, produziam as perguntas e um, na função de árbitro, a colocava em jogo para a equipe adversária. Desenvolvemos esta prática independente de um referencial teórico pré-definido, pois nosso objetivo não estava ligado em testar teorias, mas que a partir dos dados coletados, chegássemos a um referencial teórico que nos conduzisse à novas contribuições para a Educação Matemática. De posse dos dados, nossa situação-limite envolveu: como a *Grounded Theory* está implicada na sala de aula para a análise dos dados de uma prática educativa com jogos do tipo *quiz*? Na perspectiva qualitativa, o resultado dos momentos das codificações nos levou aos '*Nove Eventos de Instrução Externa'* de Robert Mills Gagné (1970, 1973 e 1980).

Desenvolvimento

A arte do jogo de perguntas e respostas, popularmente conhecido por *quiz*, fundamenta-se em um diálogo interrogativo. Tal diálogo aparece inscrito nos tempos do Rei Salomão. Zaratustra (profeta da Pérsia) respondia perguntas dos sessenta sábios do Rei e da rainha de Sabá. Na literatura brâmane, *bramatchárin* era interrogado pelos mestres, até que a sabedoria de suas respostas o leva também a interrogá-los (HUIZINGA, 2000 (*grifos do autor*)). Ainda, segundo Flemming (2009), o uso do jogo, quando bem desenvolvido e mediado pelo professor, propicia o aprimoramento de atitudes nos estudantes

Para tanto, um total de nove jogos de *quizzes* foram realizados. Ao término de cada jogo, a média de 40 cartões eram agregados aos dados. No quadro (1) são apresentadas as temáticas, o número de cartões de perguntas e respostas, e os níveis correspondentes.

Quadro (1): Número de cartões e níveis dos jogos de *quiz* para a temática correspondente.

Temática	Cartões Perguntas	Cartões respostas válidas	Níveis – Cartões perguntas			Níveis – Cartões respostas válidas		
			Fácil	Médio	Difícil	Fácil	Médio	Difícil
Radiciação	40	30	8	16	16	8	12	10
Potenciação	40	32	8	16	16	7	14	11
Equação de 2º grau	40	37	8	16	16	8	15	14
Sistemas de Equações	40	36	8	16	16	8	14	14
Equações Biquadradas	40	39	8	16	16	8	16	15
Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras	40	40	8	16	16	8	16	16
Função Afim e Função Quadrática	39	36	8	16	15	7	15	14
Porcentagem e Juros	40	40	8	16	16	8	16	16
Geometria Plana e Espacial	40	40	8	16	16	8	16	16
Total	**359**	**330**	**72**	**144**	**143**	**70**	**134**	**126**

No intuito de manter a vigilância necessária sobre nossa prática pedagógica, aplicamos dois questionários abertos aos estudantes, em dois momentos distintos: no 1º e no 4º bimestre, visto que os *quizzes* incorporaram o sistema avaliativo da disciplina. Logo, nossos dados analisados a partir da *Grounded Theory* envolveram tais questionários, bem como os 330 cartões de respostas dos jogos.

*A Grounded Theory (*Strauss 1967, 1990 e 2008) tem como característica principal a transformação de dados ontológicos em epistemológicos. É uma metodologia de cunho qualitativo a qual permite ao pesquisador compreender a realidade a partir do conhecimento da percepção ou significado do objeto. Ela possibilita a construção de uma teoria fundamentada em dados, de modo a contribuir ou trazer novos conhecimentos no domínio científico.

A *Grounded Theory* leva o pesquisador a entrar pela 'porta dos fundos' da pesquisa científica. Menos gloriosa e mais laboriosa, a porta dos fundos da pesquisa leva o pesquisador conhecer as nuances do ambiente a ser pesquisado. Sem premeditar uma base teórica, é a partir dos dados coletados do ambiente no qual se está, que a *Grounded Theory* revela, pelos seus procedimentos de "codificação", os vieses da pesquisa ao pesquisador tanto na fundamentação teórica, quanto na construção de novas teorias. De posse de todos os dados coletados, passamos a efetivar os procedimentos para a análise desses.

Segundo Strauss e Corbin (1990), os dados coletados devem passar, necessariamente, pelos procedimentos de 'codificação'. Os procedimentos se referem à análise dos mesmos, fornecendo ao pesquisador os vieses da pesquisa e o rigor metodológico necessário em detrimento a manipulação dos dados de uma pesquisa. Com tais procedimentos se constrói as categorias de análise, a partir dos dados coletados, bem distantes do levantamento prévio de hipóteses, dos quais são normalmente concebidas pelo pesquisador (GLASER & STRAUSS, 1967).

Tais procedimentos de codificação envolvem a: *codificação aberta*, *codificação axial* e a *codificação seletiva* (GLASER & STRAUSS, 1967 e CORBIN & STRAUSS, 1990). Na codificação aberta se compara os incidentes da pesquisa. É o momento para o pesquisador de maneira indutiva e dedutiva levantar suas inquietações sobre os dados coletados para categorizá-los em categorias e subcategorias. Nessa fase da pesquisa, passamos a proceder com algumas perguntas em relação aos nossos dados como: *tais dados se conectam* *a este estudo? Qual(is) categoria (s) pertence (m) a este estudo? A qual categoria este dado indica?*

A codificação axial é o momento do pesquisador analisar os conceitos selecionados a partir dos dados já organizados em categorias e subcategorias, para a sua validação ou não (CORBIN & STRAUSS, 1990). Para esta fase, comparamos os dados coletados ao número de categorias identificando os mais significativos para cada uma delas, à luz dos novos dados.

E, por fim, o procedimento da codificação seletiva onde o pesquisador satura cada uma das categorias de análise, efetivando algumas perguntas de acordo com Corbin e Strauss (1990): *qual é a principal ideia apresentada nesta pesquisa? Se minhas descobertas devem ser conceitualizadas em algumas frases, o que eu explicaria? Qual será a ação/interação dos dados sobre a pesquisa? Como posso explicar a variação que vejo entre os dados e as categorias?* (*tradução nossa*, p. 14). As categorias de análise que partem da codificação aberta devem permanecer ativas até o momento da codificação seletiva (GLASER, 1978 *apud* GOULDING, 2001). A partir disto, é o momento de o pesquisador efetivar um levantamento bibliográfico.

Dentro da perspectiva qualitativa, o resultado da codificação nos levou aos '*Nove Eventos de Instrução Externa'* de Robert Mills Gagné (1970, 1973 e 1980). Isso ocorreu a partir das três categorias de análise, sistematizadas pela *Grounded Theory*: a motivação; o desempenho; e apropriação do conhecimento, referente aos jogos de *quizzes* realizados.

Assim, os objetivos futuros a partir desta prática pedagógica está em efetivar uma análise sistemática e rigorosa dos dados categorizados, no sentido de construir uma teoria fundamenta em dados pela *Grounded Theory*, a partir dos 'eventos de instrução' de Gagné para a área da Educação Matemática.

Referências

CORBIN, J; & STRAUSS, A. Grounded Theory Research: Procedures, Canoan and Evaluative Criteria. **Qualitative and Sociology**, 13(1), 1990. pp. 1–21.

FLEMMING, D. M. Jogos como recursos didáticos nas aulas de Matemática no contexto da Educação Básica, **Educação Matemática em Revista**, n. 26, p. 34-40, 2009.

GAGNÉ, R. M. **Como se realiza a aprendizagem**. Trad, Terezinha, M. R. Tovar. Rio de Janeiro: Ao livro técnico. 1973.

______________. **Princípios essenciais da aprendizagem para o ensino.** Trad, Rute V. A. Baquero. Porto Alegre: Globo. 1980.

______________. **The conditions of Learning**. 2 Ed. Florida: Holt, Rinehart & Winston. 1970.

GLASER, B. G.; & STRAUSS, A. L. **The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research, Observations**. New York: Routledge, 1967, p. 282.

GOULDING, C. Grounded Theory: A magical formula or a potential nightmare. **The Marketing Review,** v. 2, n.1, p. 21- 34. 2001.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens**. 4ªEd, Editora Perspectiva, 2000. p. 162.

STRAUSS, A. & CORBIN, J. **Pesquisa Qualitativa Técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada.** 2ª Ed. Porto Alegre: Artmed. 2008. P. 288.

Conhecimento Matemático dos Estudantes do Ensino Médio

Isabella Corbari dos Santos[1], Beatriz da Silva Rodrigues[1] e Jaqueline Ferreira da Silva[1]
Engenharia Ambiental, Engenharia Química e Engenharia Química – UTFPR
santosi@alunos.utfpr.edu.br, bearod@alunos.utfpr.edu.br e jaque-k@hotmail.com

Prof. Camila Nicola Boeri Di Domenico (Orientadora)
Departamento Acadêmico de Física, Estatística e Matemática – UTFPR
camiladomenico@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Matemática; Ensino; Aprendizagem.

Resumo:

As dificuldades no aprendizado da matemática não são recentes. Há relatos frequentes de grandes problemas de adaptação e compreensão dos seus teoremas, visto por pesquisadores como Ponte (1994), segundo os quais para os alunos, a principal razão do insucesso na disciplina de Matemática resulta desta ser extremamente difícil de compreender.

Assim como expressa Kremer (2011), a necessidade de aprender matemática na educação básica não é questionável, entretanto os contornos que essa aprendizagem toma ao longo do seu processo natural, trazem muitas ambiguidade quanto a eficiência alcançada.

Por conta disso, muitas vezes alunos do Ensino Médio crescem desenvolvendo um pensamento de inferioridade de aprendizado por não entender a disciplina em aula. Essa aversão à matemática que os estudantes criam, vem de não entender de onde e o porquê que todas essas "equações" surgem. O ensino deficiente pode ser um dos aliados deste bloqueio gerado, por não estimular o aluno a pensar e a questionar o sentido dessas equações e o porquê de usá-las. Consequentemente, a falta de compreensão induz os alunos a decorarem as informações, intensificando ainda mais o impasse gerado.

Neste sentido, este trabalho teve por objetivo aferir o conhecimento matemático de estudantes de cinco colégios do município de Francisco Beltrão, no Paraná. Para esta análise, foram utilizados dados de um teste diagnóstico aplicado aos alunos, através do projeto "Promovendo a Inserção de Jovens Mulheres nas Ciências Exatas e Engenharia", fomentado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Técnologico (CNPq) e que tem como foco aulas de Matemática semanais preparatórias para o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), oficinas com aplicações de *softwares* e também objetiva quebrar o bloqueio e a resistência em relação a disciplina.

[1] Bolsistas CNPq.

Por meio de análise quantitativa, foi aplicado um questionário para diagnosticar as principais dificuldades relacionadas à aprendizagem da matemática no ensino médio de cinco escolas públicas do município de Francisco Beltrão. O teste era composto por 9 questões, das quais quatro abordaram Função de Primeiro e Segundo grau, uma questão de Geometria Espacial, uma de Simplificação de Polinômios, uma de Estatística e duas de Expressões Algébricas, tendo um total de 54 alunos participantes.

Após as correções, as respostas foram classificadas em três categorias: **certo**, **errado** e **branco**. Os dados obtidos foram compilados e organizados em uma planilha e os resultados apresentados em forma de tabela, conforme mostrado abaixo.

Tabela 1 - Análise das respostas do diagnóstico

Tipo	Corretas(%)	Branco(%)	Erradas(%)
Funções	12,04	49,07	38,89
Geometria	75,92	12,04	12,04
Estatística	77,78	11,11	11,11
Polinômios	74,07	9,25	16,67
Expressões algébricas	74,07	22,22	3,70

Fonte: Dados dos autores (2019)

Por meio do teste, percebeu-se que em todos os colégios o assunto que os alunos apresentam mais dificuldades são função de 1º e do 2º grau, no que se refere às dificuldades de como substituir valores na função, representar graficamente e encontrar as raízes das funções foram bem acentuadas. Além disso, os principais erros nas questões de expressões algébricas e polinômios foram: regra de sinais, propriedade distributiva e falta de atenção. Enquanto que os assuntos de geometria e estatística foram os que apresentaram maior facilidade de resolução pela maioria dos estudantes, tendo um percentual de 77 e 75 de acertos entre os alunos. Para finalizar, neste estudo, percebemos que há muitas dúvidas em relação aos conceitos de matemática básica, os quais apareceram nas resoluções apresentadas pelos estudantes.

Referências bibliográfias

KREMER, K. A. **Dificuldades de aprendizagem em matemática**, Rio De Janeiro., p. 3-37, jan. 2011. Disponível em: <http://www.avm.edu.br/docpdf/monografias_publicadas/k215345.pdf>. Acesso em: 18 junho. 2019.

DA PONTE, J. P. **Matemática: uma disciplina condenada ao insucesso?**. 1994.

Dinamicidade em aula para maior aprendizagem de Matemática: aplicação em cinco colégios do município de Francisco Beltrão - Paraná

Isabella Corbari dos Santos[1], Beatriz da Silva Rodrigues[1] e Jaqueline Ferreira da Silva[1]
Engenharia Química, Engenharia Ambiental e Engenharia Química – UTFPR
santosi@alunos.utfpr.edu.br, bearod@alunos.utfpr.edu.br e jaque-k@hotmail.com

Prof. Camila Nicola Boeri Di Domenico (Orientadora)
Departamento Acadêmico Física, Estatística e Matemática – UTFPR
camiladomenico@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Matemática, Aprendizagem, Aulas.

Resumo:

A relação com a matemática não é vista de boa forma por todos os estudantes, já que alguns, segundo Pires (2006), se julgam incapazes de compreender essa ciência. Empecilhos na aprendizagem desta, podem estar relacionados a negligência do aluno com a disciplina (Lima, 1995) e a fatores internos e externos que são um agravante (Brum, 2013).

D'Ambrosio (2011) afirma que é complicado motivar os alunos com situações reais. Cabe ao professor o papel de buscar ferramentas adicionais para os auxiliar nesta caminhada, pois "a motivação, ou o motivo, é aquilo que move uma pessoa ou que a põe em ação ou a faz mudar de curso" (Bzuneck, 2000).

Segundo Sacristan (1999), a lógica de cada sujeito não se adapta a uma organização complexa de padronização. Logo, cada aluno apresenta seu ritmo de aprendizagem e desenvolvimento. Assim, o projeto aprovado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq "Promovendo a Inserção de Jovens Mulheres nas Ciências Exatas e Engenharias", visa incentivar as jovens mulheres para o mundo das exatas.

Isto ocorre, com aulas programadas de forma diferenciada, incorporando simultaneamente as cinco escolas, o qual é contabilizado o número de 54 alunos, em que alguns possuem ritmos diferentes de aprendizagem e estudo. Para atender a todos, as aulas contam com oficinas de software e desafios. O intuito é de incentivar

[1] Bolsistas CNPq.

e motivar as jovens mulheres a adentrarem nesta área acadêmica, entretanto, há a oferta para todos os alunos, independente de sexo.

São ofertadas aulas preparatórias do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM da disciplina de matemática. As aulas ocorrem em cinco colégios estaduais de Francisco Beltrão- Paraná, no período de contra turno uma vez por semana, ministradas e planejadas por acadêmicas da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. A seleção dos conteúdos ocorre a partir da análise quantitativa das provas anteriores do exame.

As atividades desenvolvem-se com a apresentação de breves resumos do conteúdo trabalhado na semana e, na sequência, resolução, em conjunto, das questões referentes ao assunto abordado no dia. As resoluções ocorrem, geralmente, de forma iterativa, com os alunos indo para o quadro responder as questões assim como auxiliando os colegas.

Ainda, uma vez ao mês, ocorrem oficinas em que são apresentados *softwares* matemáticos ou um dia de desafios matemáticos. Nesse dia, os alunos são capacitados a aplicarem o conhecimento adquirido durante o mês e a testarem seu raciocínio lógico nos desafios.

Com estas atividades desenvolvidas, percebe-se que diferentes alunos apresentam obstáculos distintos para a aprendizagem de matemática. Dessa maneira, a variedade da composição da metodologia empregada pelo projeto é ajustada de acordo com as necessidades de cada turma, atendendo as necessidades individuais.

Até então, as oficinas apresentaram um grau de rendimento maior quando comparadas aos demais métodos empregados. Logo, constata-se a necessidade de atividades inovadoras e práticas para melhor aprendizagem e absorção do conteúdo.

Referências:

BRUM, W. P. **Crise no ensino de matemática:** amplificadores que potencializam o fracasso da aprendizagem. São Paulo: Clube dos Autores, 2013

BZUNECK, José Aloysio**. As crenças de auto-eficácia dos professores.** Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2000.

D' AMBROSIO, U. **Educação matemática da teoria à prática.** 22. ed. Campinas-SP, Papirus, 2011.

LIMA, E. L. Sobre o ensino da matemática. **Revista do Professor de Matemática**, n. 28, 1995.

SACRISTÁN, J. Gimeno. **Poderes Instáveis em educação***.* Porto Alegre: Artmed, 1999.

PIRES, V. E. O. **O ensino da matemática nos dias atuais**. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/coluna/coluna_usuario.html> Acesso em: 4 de outubro de 2019.

Proposta de construção de secadores solares de alimentos em cinco colégios do município de Francisco Beltrão - Paraná

Jaqueline Ferreira da Silva[1], Isabella Corbari dos Santos[1] e Beatriz da Silva Rodrigues[1]
Engenharia Química, Engenharia Ambiental e Engenharia Química – UTFPR
jaque-k@hotmail.com, santosi@alunos.utfpr.edu.br *e bearod@alunos.utfpr.edu.br*

Prof. Camila Nicola Boeri Di Domenico (Orientadora)
Departamento Acadêmico Física, Estatística e Matemática – UTFPR
camiladomenico@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Secador Solar, Matemática, Modelagem Matemática.

Resumo:

A matemática sempre foi vista, pelos alunos e pela sociedade em geral, como uma disciplina difícil. Ao longo dos tempos, tem se tornado o verdadeiro “bicho papão”, onde a maioria dos alunos veem essa ciência como inacessível, de difícil aprendizagem e distante da realidade (SILVA, 2014).

Toujá (2014) estuda as possíveis causas de desinteresse e dificuldade dos alunos pela disciplina de matemática, e relatou que apesar de afirmarem a importância da matemática por suas aplicações, somente poucas delas são colocadas pelos alunos, afirmando que o conhecimento das aplicações é muito superficial e não representa a realidade à qual essa ciência está inserida. Não se pode ignorar que mesmo os alunos que dizem ter como favorita a disciplina de matemática, não conhecem a dimensão histórica desse conhecimento, que impulsionou grande parte dos avanços nas mais diversas áreas do conhecimento (TOUJÁ, 2014)

Mesmo que a matemática nem sempre esteja presente em nosso cotidiano de maneira direita, está inserida indiretamente, dadas suas várias aplicações nas mais diversas áreas tais como biologia, administração, medicina, economia entre outras. Essa visão desvinculada da matemática das outras atividades humanas, faz notar a necessidade de uma matemática escolar que explore mais as suas aplicações, gerando um maior interesse pela disciplina.

Machado (1990) também diz que é importante que os conteúdos escolares

[1] Bolsistas CNPq.

estabeleçam relações com as aplicações concretas dessa ciência, evidenciando as ideias e conceitos de como foi produzido historicamente tal conhecimento.

Dessa forma, visto a necessidade da aplicabilidade como estratégia para quebrar a dicotomia existente entre a matemática escolar e a matemática aplicada, foi proposta a construção e a experimentação de diferentes modelos de estufas sustentáveis de secagem solar para desidratação de alimentos, de forma a relacionar teoria e prática por meio da modelagem matemática, permitindo uma aprendizagem diferenciada. Segundo as Diretrizes Curriculares da Educação Básica para a Matemática:

> A Modelagem Matemática tem como pressuposto a problematização de situações do cotidiano, ao mesmo tempo em que propõe a valorização do aluno no contexto social, procura levantar problemas que sugerem questionamentos sobre situações da vida (PARANÁ, 2008).

Diante disso, essa proposta visa possibilitar às alunas adquirir conhecimento matemático e contribuir para sua formação crítica e científica, através da iniciação à pesquisa, análise e compreensão do processo de secagem a partir do estudo experimental e modelagem matemática de processos de secagem com energia solar.

A partir do projeto aprovado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ), Promovendo a Inserção de Jovens Mulheres nas Ciências Exatas e Engenharias, atuante em 5 colégios estaduais de Francisco Beltrão – Paraná, foram selecionadas 3 bolsistas em cada instituição para a construção dos secadores com materiais de baixo custo, com a participação de todos os integrantes do projeto.

A proposta foi dividida em duas fases: o dimensionamento e construção de diferentes modelos de secadores solares de convecção natural para desidratação de frutas, e o estudo experimental e a modelagem matemática dos processos de secagem para diferentes produtos.

Em relação a primeira fase, as alunas deveriam pensar em vários aspectos importantes na construção dos secadores solares, tais como a orientação visto a dependência da eficácia da captação de energia solar por parte da estufa, tipo de estrutura, analisando então a função de cada componente, investigando possíveis materiais com enfoque também no aspecto econômico. O material transparente a ser utilizado é o fator mais importante visto que desse depende a energia transmitida e retida, em função da seletividade do seu espectro, suas características estabelecem a intensidade do efeito de estufa, fixam a opacidade à grandes comprimentos de onda.

Levando em conta esses fatores, serão construídos diferentes secadores solares com as mesmas dimensões, empregando-se materiais diferentes, será avaliado o desempenho e comparado sua eficiência por meio de medições das temperaturas no interior do equipamento, com o uso de termômetros. Os dados coletados serão representados graficamente para fins de comparação. Na segunda fase os experimentos serão realizados, com a exposição de alimentos à radiação solar dentro de cada secador construído, e o acompanhamento da perda de massa do produto ao longo do tempo. A matéria-prima a ser utilizada na secagem será frutas da época da região. Os dados experimentais serão representados graficamente e, após, será feita a modelagem matemática deles. A revisão de literatura será realizada ao longo de toda a duração do projeto e irá fornecer a base científica para a execução das duas fases da atividade.

Atualmente, as alunas encontram-se desenvolvendo a fase. Pode-se perceber que atividades experimentais são uma metodologia capaz de promover uma aprendizagem mais significativa, podendo contribuir para a superação de obstáculos na aprendizagem de conceitos científicos, não somente por propiciar interpretações, discussões e confrontos de ideias entre os estudantes, mas também pela sua natureza investigativa (Paraná, 2008).

Referências:

MACHADO, J. M. **Matemática e Língua Materna:** A análise de uma Impregnação Mútua. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1990. 169 p.

Paraná. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes curriculares da educação básica matemática**. Curitiba: SEED, 2008.

SILVA, M. V. **As dificuldades de aprendizagem da matemática e sua relação com a matofobia**. 2014. 59 f. Monografia (Curso de Especialização Fundamentos da Educação: Práticas Pedagógicas Interdisciplinares) – Universidade Federal da Paraíba, Princesa Isabel, 2014.

TOUJÁ, P. W. **Matemática:** Do que trata? Para que serve? Qual sua história?. 2014. 67 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

INVESTIGANDO A TRIGONOMETRIA

Jéssica Gomes Furtado
Licenciatura em Matemática – UFPR
jessicagomesfurtado@gmail.com

Prof. Anderson Roges Teixeira (Orientador)
Departamento de Expressão Gráfica – UFPR
artgoes@ufpr.br

Prof. Giancarlo Roges Teixeira (Supervisor)
Eixo de Matemática - IFPR
giancarlo.aguiar@ifpr.edu.br

Prof.ª Cíntia Teixeira Prêve (Supervisora)
Eixo de Matemática - IFPR
cintia.preve@ifpr.edu.br

Palavras-chave: Investigação Matemática, Seno, Cosseno.

Resumo:

Segundo Ponte (2003), investigar "não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções" (PONTE, 2003, p.02). Sendo assim, tendo como objetivo incentivar os estudantes a investigar, foi aplicada uma prática docente com base nas quatro fases da Investigação Matemática para os 40 estudantes do 2º ano do curso de Informática integrado ao Ensino Médio no Instituto Federal do Paraná (IFPR) - Campus Curitiba.

A Matemática Investigativa é desenvolvida em quatro fases (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013), sendo elas: apresentar o problema proposto e compreendê-lo; propor conjecturas que possivelmente resolvam o problema proposto; pôr em prática estratégias para validar as conjecturas ou descartá-las e, por fim, compartilhar suas descobertas e repensar se estas são válidas para todas as situações que o problema propõe.

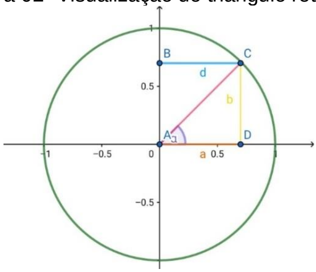
O conteúdo abordado é a Trigonometria, mais especificadamente Seno e Cosseno na circunferência trigonométrica e para a realização da atividade foi utilizado como recurso a Prancha Trigonométrica (FIGURA 1), com a qual é possível destacar um ângulo desejado e encontrar o valor do seno e cosseno desse respectivo ângulo.

Figura 1- Prancha Trigonométrica

Fonte: Acervo dos autores, 2019.

Após dividir os estudantes em duplas e distribuir as Pranchas Trigonométricas, foi proposto, como exercício, que encontrassem os pares ordenados dos ângulos 30º, 45º e 60º. O objetivo do exercício foi fazer com que os estudantes percebessem as relações de correspondência entre o eixo das abscissas (cosseno) e o eixo das ordenadas (seno). Como houve dificuldade para chegar a essa conclusão, foi solicitado aos estudantes que montassem a tabela com os valores do seno e cosseno dos ângulos notáveis. Com a tabela ficou mais fácil e logo os estudantes propuseram a seguinte conjectura: o eixo das abscissas corresponde ao cosseno e o eixo das ordenadas ao seno. Dessa forma, a conjectura proposta deveria ser verificada para ser validada ou descartada. Para provar a conjectura, os estudantes deveriam identificar o triângulo retângulo que se forma ao analisar um ângulo na circunferência trigonométrica, como ilustrado na Figura 02.

Figura 02- Visualização do triângulo retângulo



Fonte: Os autores, 2019.

Após identificar o triângulo os estudantes deveriam identificar quais relações trigonométricas precisariam utilizar para generalizar a conjectura e dessa forma chegar às relações expressas na Figura 02:

Figura 02 – Generalização da hipótese

No triângulo retângulo CÂD (FIGURA 4) o lado *a* corresponde ao cateto adjacente, o lado *b* ao cateto oposto e o seguimento AC à hipotenusa do triangulo.

1) Utilizando a razão trigonométrica que relaciona o cateto adjacente, a hipotenusa e o cosseno, obtêm-se:

$$\frac{ca}{hip} = \frac{a}{hip} = \cos\theta$$

Sabendo que a hipotenusa do triângulo equivale ao raio da circunferência trigonométrica e, portanto, é igual a 1, obtêm-se que:

$$\frac{a}{hip} = \frac{a}{1} = \cos\theta \rightarrow a = \cos\theta$$

Dessa forma, conclui-se que o eixo das abcissas corresponde a função trigonométrica cosseno.

2) Analogamente, utilizando a razão trigonométrica que relaciona o cateto oposto, a hipotenusa e o seno, obtêm-se:

$$\frac{co}{hip} = \frac{b}{hip} = \sin\theta$$

Como a hipotenusa é igual a 1 por também ser o raio unitário da circunferência trigonométrica, obtêm-se:

$$\frac{b}{hip} = \frac{b}{1} = \sin\theta \rightarrow b = \sin\theta$$

Dessa forma, conclui-se que o eixo das ordenadas corresponde a função trigonométrica seno.

Fonte: Conexões com a matemática 2º ano, 2016, p.14 – adaptado pelos autores, 2019.

Os estudantes identificaram rapidamente quais razões trigonométricas deveriam utilizar para provar a hipótese, todavia, tiveram dificuldade em identificar que o raio da circunferência correspondia a hipotenusa do triângulo e que, portanto, seu módulo é 1. Para que os estudantes conseguissem identificar essa relação foi solicitado que encontrassem o par ordenado correspondente ao ângulo 0°, isto é, (1,0) para que identificassem qual o módulo desse seguimento e que o mesmo corresponde ao raio da circunferência trigonométrica. Com isso, foi possível chegar à conclusão e validação da generalização.

Com a hipótese validada, os estudantes foram convidados a compartilhar com os demais colegas as estratégias adotadas durante a atividade, bem como, se as mesmas estavam corretas ou não. Logo depois, foi solicitado que determinassem o sinal de cada função, seno e cosseno, em cada quadrante. Por fim, deviam determinar as relações de simetria entre os ângulos, compreendendo que o módulo dos valores do seno e cosseno são equivalentes e apenas o sinal mudará de acordo com cada quadrante em que o ângulo em questão se encontra.

Como a proposta da aula foi diferente da proposta de aulas expositivas, os estudantes interessaram-se muito ao longo de toda a atividade, sendo o principal motivo para o bom resultado da aplicação, pois dessa forma houve participação assídua dos estudantes na especulação de hipóteses, testes e compartilhamento de informações. Durante a investigação, principalmente na fase de testes e generalização da conjectura, os estudantes tiveram um certo nível de dificuldade, pois era necessário que utilizassem conhecimentos anteriores, todavia conseguiram transpor essas dificuldades trocando ideias com os próprios colegas, dessa forma, conseguiram cumprir o objetivo da atividade, isto é, investigar, e pelo que aparentavam estavam gostando de ser investigadores.

Por meio da Investigação Matemática o estudante tem a oportunidade de ser responsável por seu próprio aprendizado e, dessa forma, redescobrir novos conhecimentos sendo um verdadeiro investigador dentro da sala de aula. Dessa forma, as atividades investigativas deveriam ser mais utilizadas, afinal, “as investigações matemáticas são um tipo de atividade que todos os alunos devem experimentar” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 25) para que possam compreender a Matemática e não apenas aceitá-la.

Referências:

Conexões com a matemática/organizadora Editora Moderna; obra coletiva, concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. 3.ª ed. São Paulo: Moderna. 2016.

PONTE, João Pedro da. **Investigar, ensinar e aprender**. Em Actas do ProfMat 2003. Santarém: Associação de Professores de Matemática, pp. 25–39. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf>. Acesso em 20 de ago. 2019.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. 3.ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora. 2013.

Possibilidades da Lousa Digital no Ensino de Funções

Apijã Yukio Aihara[1], Gabriela Martos[1], Kauana Sandeski Cunha[1] e Richard Longhi[1]
Licenciatura em Matemática – UTFPR
apijaaihara@gmail.com; gabi_martos@live.com; kauanacunha@hotmail.com; richardlonghii@gmail.com

Prof. Luciana Schreiner De Oliveira (Orientador)
Departamento de Matemática – UTFPR
lu_zan1@hotmail.com

Palavras-chave: Lousa Digital, Funções, Tecnologia.

Resumo:

Durante o Projeto Institucional de Residência Pedagógica propusemos uma Intervenção Pedagógica no Colégio Estadual Jayme Canet – escola-campo onde fomos alocados – cuja finalidade foi a implementação da lousa digital (LD) com fins pedagógicos. Esta intervenção foi estruturada em 3 práticas: utilização da LD na prática docente, formação de bolsistas do Projeto; e formação de professores atuantes na escola-campo. Neste, abordaremos a primeira prática, na qual elaboramos uma regência tendo como público alvo três turmas do segundo ano do Ensino Médio Regular a qual contemplou a revisão dos seguintes conteúdos: Plano Cartesiano (Eixos e Par Ordenado) e Funções (Domínio, Contradomínio, Imagem e Gráfico), utilizando a Lousa Digital e o *software* GeoGebra. Esses conteúdos foram selecionados devido ao planejamento trimestral incluir Função Trigonométrica e também devido à dificuldade dos estudantes com o tópico de Funções, a qual já era conhecida, pois acompanhávamos estas turmas há um ano.

Os benefícios constatados de forma empírica nesta aula nos motivaram a propor formações aos bolsistas do Projeto e professores atuantes da escola-campo, além disso, propor uma aula utilizando a LD mostra que é possível inseri-la na prática pedagógica, o que reforça as práticas anteriormente citadas.

No planejamento trimestral da professora preceptora, o conteúdo de Razões Trigonométricas seria sucedido pelo conteúdo de Funções Trigonométricas. Havíamos constatado, em observações anteriores, que os estudantes tinham

[1] Bolsista do Projeto Institucional de Residência Pedagógica – área Matemática – UTFPR/CT

dificuldade com pré-requisitos deste. Além disso, a carga horária semanal de Matemática destes estudantes é de 2 horas/aula. Diante dessa situação, precisávamos pensar em estratégias de ensino que conseguissem revisar estes pré-requisitos poupando tempo de aula e que fosse atrativo para os estudantes. Com este fim, decidimos então aplicar esta regência utilizando ferramentas tecnológicas, como a LD e o GeoGebra para otimizar o tempo bem como viabilizar a visualização deste conteúdo matemático. Essa decisão foi pautada em conhecimentos adquiridos durante nossa formação inicial e é defendida pelos autores Kalinke e Navarro (2018) e Barros (2017).

Esta regência foi aplicada três vezes –uma em cada turma observada– em dois espaços distintos: na sala de aula usual; e na sala multiuso do colégio. Iniciamos a aula conceituando os elementos do Plano Cartesiano e localização de pontos com auxílio da LD e do GeoGebra. Após isso, por meio do jogo Batalha Naval[2], na plataforma GeoGebra, convidamos os alunos para marcar os pontos no Plano Cartesiano, através da interação com a LD

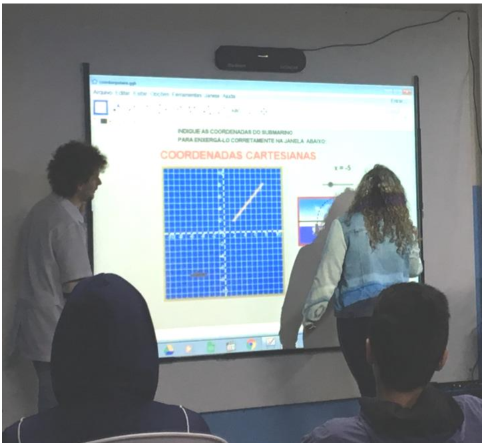


Figura 1: Estudante localizando pontos.
Fonte: Os autores.

Prosseguimos a aula com o conteúdo de Funções, abordando e definindo Domínio, Contradomínio e Imagem com a utilização do Diagrama de Venn. Também discutimos quando uma relação é, ou não, função.

[2] Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/gg5qmtkw>. Acesso em: 23 jul 2019

Finalizamos esse encontro plotando alguns gráficos e a partir desses os alunos foram capazes de identificar quais representavam funções, justificando suas respostas.

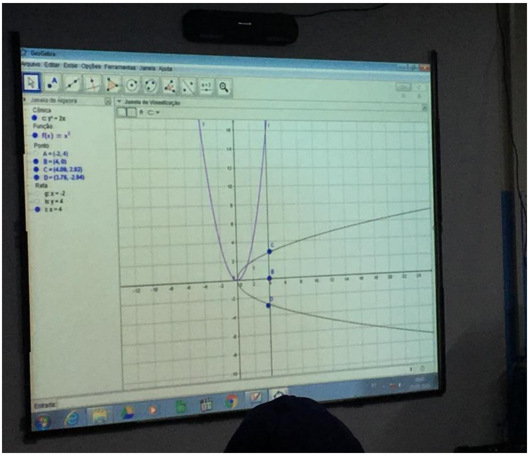


Figura 2: Identificando Funções.
Fonte: Os autores.

Como a LD tinha sido instalada recentemente, os alunos ficaram eufóricos ao saber que um toque realizado na superfície plana substituía a função do mouse. Com isso, foi possível atrair a atenção deles, otimizando o tempo de aula construindo gráficos mais precisos, com a utilização do GeoGebra. Além disso, realizamos a marcação de pontos sobre o gráfico estando ao lado da projeção, evitando obstruções visuais causadas pela movimentação excessiva do professor.

A partir dessa regência pudemos perceber que a LD foi um diferencial nesta aula, pois, a revisão de um assunto que poderia ser maçante para os alunos tornou-se uma aula atrativa, na qual os estudantes puderam constituir e tirar suas principais dúvidas. Portanto, esta ferramenta torna-se um recurso pedagógico que deve ser considerado durante a preparação das atividades a serem realizadas em classe.

Referências:

BARROS, Gílian Cristina. **Tecnologias e educação matemática**: projetos para a prática profissional. Curitiba: InterSaberes, 2017. 259 p.

NAVARRO, Eloisa Rosotti; KALINKE, Marco Aurélio. **Lousa Digital**: investigando o uso na Rede Estadual de Ensino com apoio da formação continuada. Curitiba: CRV, 2018. 181 p.

“Máscaras Africanas”: A Arte de Resolver Problemas

Keith Gabriella Flenik Morais[1] e Elisângela Zarpelon Aksenen[2]
Licenciatura em Matemática – UTFPR e Colégio Estadual Jayme Canet SEED/PR
keithgabriella@hotmail.com e elisangela.aksenen@gmail.com

Luciana Schreiner de Oliveira e Edna Sakon Banin (Orientadoras)
Departamento Acadêmico de Matemática – UTFPR
lu_zan1@hotmail.com e ednas@utfpr.edu.br

Palavras-chave: máscaras africanas, resolução de problemas, simetria.

Resumo:

O programa Residência Pedagógica é destinado a estudantes de Licenciatura que tenham concluído pelo menos metade do curso. Similar às disciplinas de estágio obrigatório supervisionado da Universidade Tecnológica Federal, Campus Curitiba (UTFPR-CT), a imersão na realidade escolar compõe o programa.

Durante o mês de novembro de 2018, a residente do Colégio Estadual Jayme Canet, localizado no bairro Xaxim, Curitiba/PR, ministrou uma oficina sobre “Máscaras Africanas” durante a “Semana Cultural da Consciência Negra”. A “Semana Cultural” é um evento que visa “despertar e resgatar o instinto investigativo/ Motivação (valores) para melhor conseguir trabalhar os saberes elaborados e seu direcionamento cientifico que vem se desenvolvendo ao longo dos tempos” (SEED, 2012, p. 23).

O tema sobre a Consciência Negra, cuja data comemorativa é 20 de novembro, está contido na categoria de Pluralidade Cultural dos Temas Transversais dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Ele enfatiza que grupos socioculturais diferentes do etnocêntrico também contribuíram para a construção da matemática, de mesmo modo que também têm direito ao saber escolar (BRASIL, 1998, p. 32). Outro documento que fundamenta a inserção do ensino sobre a cultura negra na escola são as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN). As DCN têm documento próprio sobre o ensino de história e cultura afro-brasileira e africana, as quais frisam o direito de acesso à educação e à aproximação da escola com a cultura africana, garantido à comunidade negra, a fim de estabelecer relações étnico-raciais saudáveis, ou seja, combater o preconceito e valorizar a comunidade negra.

A “Semana Cultural da Consiência Negra” contava com oficinas, gincanas e passeios pedagógicos para os Ensinos Fundamental e Médio durante três dias de evento. Para a realização de oficinas, era necessário contemplar o tema, diferentes níveis de ensino e não ultrapassasse o limite de tempo. Assim, a oficina “Máscaras Africanas”, ofertada para os anos finais do ensino fundamental, possibilitava ao aluno completar uma máscara africana que estava pela metade. Deste modo, os estudantes poderiam colocar em prática seus conhecimentos matemáticos e artísticos sobre simetria e reflexão de uma figura, além de explorar a criatividade, colorindo-as. Rohde (1997) define as operações de simetria, dentre elas a reflexão:

---

[1] Bolsista do Programa Residência Pedagógica.
[2] Professora Preceptora do Programa Residência Pedagógica.

> A simetria de reflexão é a simetria bilateral obtida colocando-se um objeto diante de um espelho e considerando-se a forma e sua imagem. Uma forma com simetria de reflexão possui um plano imaginário que o divide em duas partes idênticas, de natureza especular (...). (ROHDE, 1997, p. 12)

Ademais, Rohde (1997) também reforça a presença de simetria na arte africana: “A África negra e a Oceânia conhecem e praticam o bilateral intensamente, através de máscaras e estatuetas. O bilateral predomina nas chamadas ‘artes primitivas’ com exceção de poucos lugares e momentos. ” (ROHDE, 1997, p. 64)

A oficina foi dada pela metodologia de resolução de problemas (KRULIK, 1997) organizada em quatro momentos: (i) selecionar uma das 8 metades de máscaras; (ii) (situação-problema) completá-la com auxílio de régua e compasso; (iii) colori-la; (iv) recortá-la e colá-la numa folha colorida. Apesar de terem criados muitos questionamentos de como iniciar o desenho e terem trabalhado com tentativa e erro - fases similares à investigação matemática (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2016, p. 21)- não precisaram criar conjecturas ou justificá-las.

Participaram da oficina estudantes de 6º ao 8º ano: iniciava-se a oficina com um exemplo feito pela residente e outro no quadro e, ao longo da oficina, ela passava entre as mesas para ajudar as crianças com as medições e precisão. Conforme terminavam a proposta, as artes foram sendo coladas no quadro da sala de aula para que pudessem compartilhar com os colegas e se inspirarem.

Ao todo foram produzidas 36 máscaras na oficina, delas, os sextos anos apresentaram menos esforços, pois fizeram a mão livre sem se preocuparem com a exatidão. Os sétimos anos apresentaram dificuldade em desenhar curvas (delimitação do rosto das máscaras). Já as turmas de oitavos anos, apresentaram mais autonomia e mais capricho nos desenhos (preocupando-se com a precisão e com a coloração).





Figura 1: Opção 3. **Figura 2:** Opção 8. **Figura 3:** Opção 6. **Figura 4:** Opção 7. **Figura 5:** Opção 4.
Fontes: Próprias autoras.

Além de ter tido alta participação dos estudantes, a oficina foi bem vista pelos professores: uma professora solicitou a cópia do plano de aula para aplicar com suas turmas e outra professora convidou a residente para ministrar com suas três turmas de sétimos anos A, B e C.

As regências também aconteceram no mês de novembro. Conforme a professora e a residente iam aplicando nas turmas, a atividade ia tomando forma já que alguns estudantes escapavam da proposta de usar régua e compasso e refletiam a figura na janela para contorná-la. Cada turma, assim como na oficina da “Semana Cultural”, teve duas aulas de 50 minutos para realizar a mesma proposta. Contudo, como já havia trabalhos prontos da oficina, ao expô-los às turmas, ficou mais fácil para visualizarem a atividade e se inspirarem.

Alguns estudantes de cada turma apresentaram características peculiares: na turma A, um dos estudantes apresentou símbolos característicos da sua realidade (Figura 2) e outros pintaram as máscaras africanas com a cor salmão -comum para designar a pele branca de pessoas (Figura 3). Na turma B, apenas um estudante desenhou uma "máscara branca" e a maioria utilizou retas de apoio para desenhar (Figura 1). E, na turma C, quase um terço dos alunos dobraram a folha para contornar seu reflexo. É possível percebê-la, pois as folhas ficaram vincadas na pintura.

De uma forma geral, as máscaras sem a caracterização de "cabelo" foram consideradas mais fáceis, pois os estudantes terminavam de completar a figura mais rapidamente. As figuras que tinham "cabelo" e a que tinha formato circular (Figuras 4 e 5) foram consideradas mais difíceis, pois os estudantes demoravam mais para fazê-las devido à riqueza de detalhes.

Ao todo foram feitas 119 máscaras. Embora tenha sido apresentado superficialmente o porquê do uso de máscaras na África, eles tiveram uma semana para abordar sobre a cultura, a presença e a valorização da comunidade negra na escola, no trabalho e na história do Brasil, ou seja, não foram aulas em vão, nem descontextualizadas. Contudo, questionar sobre as confecções de "máscaras brancas" em pleno evento sobre Consciência Negra teria sido de grande valia já que esta peculiaridade se destacou entre as demais.

Além disso, os estudantes tiveram a oportunidade de aprender sobre simetria de forma descontraída: trabalharam com a precisão da régua e exploraram a criatividade ao colorirem. Portanto, foi possível não apenas abordar um tema transversal na matemática, mas também, apropriar-se da resolução de problemas (KRULIK, 1997) para trabalhar geometria (desenho) em conjunto com a área de artes, proposta esta, não comum quando se trata desta metodologia.

Referências:

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana.** Brasília: Ação Educativa, 2004. Disponível em: <http://www.acaoeducativa.org.br/fdh/wp-content/uploads/2012/10/DCN-s-Educacao-das-Relacoes-Etnico-Raciais.pdf> Acesso em: 29 ago. 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/ SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> Acesso em: 29 ago. 2019.

KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A resolução de problema na matemática escolar.** Tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

ROHDE, Geraldo Mario. **Simetria: rigor e imaginação.** Porto Alegre: EDIPUCRS, 1997.

SEED. **Projeto Político Pedagógico Colégio Jayme Canet: Ensino Fundamental e Médio.** Curitiba: Redescola, 2012. Disponível em: <http://www.ctajaymecanet.seed.pr.gov.br/redeescola/escolas/9/690/1068/arquivos/File/ppp.pdf> Acesso em: 29 ago. 2019.

A Investigação Matemática como uma abordagem de ensino de funções afim

Hesrron Crysthoffer Porto Santana, João Micheletti e Laís de Souza Rocha
Licenciatura em Matemática – UTFPR
hesrron@alunos.utfpr.edu.br, joaomicheletti@alunos.utfpr.edu.br e laisrocha@alunos.utfpr.edu.br

Prof. Luciana Schreiner de Oliveira (Orientador) e Prof. Maria Lucia Panossian (Orientador)
Departamento de Matemática – UTFPR
lucianaoliveira@utfpr.edu.br e mlpanossian@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Investigações Matemáticas, Análise Didática, Função Afim.

Resumo:

Este relato de experiência está inserido no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) do curso de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Visando uma proposta de ensino diferenciado, foi elaborado um plano de aula que focasse no aprendizado do estudante através de sua autonomia. Para essa elaboração, foi utilizado os preceitos da Investigação Matemática segundo o modelo apresentado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013). Para a realização da intervenção foi utilizado o software GeoGebra instalado em tablets como ferramenta tecnológica.

Desenvolver a autonomia no estudante é fundamental para a sua formação. Para obter o êxito em sua aprendizagem ele necessita estar uma posição de envolvimento ativo dentro desse processo. Com uma premissa que se baseia em colocar o aluno como protagonista de seu próprio estudo, a Investigação Matemática tem como maior objetivo dar independência para que o estudante construa um trabalho criativo e autônomo, segundo o seguinte modelo:

Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problema ● Explorar a situação problemática ● Formular questões
Conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulações	● Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	● Justificar uma conjectura ● Avaliar o raciocínio ou resultado do raciocínio

FONTE: (PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2013, p.21).

Com a tecnologia envolvida, o aprendizado ganha ferramentas eficazes a seu favor. Segundo Borba e Penteado (1992), o acesso a informática é direito dos estudantes, por conta disso tanto na educação pública quanto na privada o aluno deve ter o contato com a tecnologia, e a "alfabetização tecnológica". A utilização dessa tecnologia deve vir por meios de interdisciplinaridade, unindo o conteúdo da sala de aula à informática.

O software GeoGebra foi desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarlter, em 2001. Por ser gratuito e de multiplataforma, é de extrema acessibilidade. O software é dinâmico, permite testar funções e obter o seu gráfico ilustrado instantaneamente no software, e em outras janelas ver a expressão algébrica, uma planilha com as coordenadas dos pontos pertencentes ao gráfico, independentemente da alteração da função.

Utilizando os preceitos da investigação e inserindo a tecnologia do GeoGebra no meio educacional, no dia 26 de abril de 2019, em duas turmas de primeiro ano do ensino médio, no Colégio Estadual do Paraná, ocorreu a intervenção de uma situação de ensino envolvendo investigação matemática para o aprendizado de funções afins. Foram utilizadas duas aulas de quarenta e cinco minutos para a realização da atividade. Para iniciar a aula, foi apresentado o que é uma investigação matemática, segundo o modelo apresentado por João Pedro da Ponte (2013). Também foi apresentado o software GeoGebra, suas funções, utilidades e seu modo de trabalho.

Finalizada as explicações teóricas dos elementos envolvidos na situação que seguiria, cada dupla recebeu uma folha de orientação. A folha entregue orientava o aluno a anotar todo seu processo investigativo e resultados além de conter as questões a serem investigadas. Também foi entregue um tablet por dupla para que pudessem, através do GeoGebra, iniciar suas investigações.

Para análise da tarefa proposta aos alunos, foi utilizada a Análise Didática como fundamento teórico, que consiste em um método de investigação próprio da didática da matemática, acerca de um conteúdo, que visa aprofundar, estruturar e interpretar de maneira curricular tal conteúdo, com relação a sua programação e implementação.

A tarefa proposta trouxe aos alunos diferentes observações, interações entre colegas e desenvolvimento de conteúdo. Mesmo que alguns possuíssem dificuldades na realização do trabalho, se envolveram com a metodologia desenvolvida. Mesmo com dificuldades pontuais a atividade investigativa mostrou resultados satisfatórios. Prevaleceu nas aulas a autonomia, criatividade e o espírito colaborativo dos estudantes.

Referências:

CARVALHO, B. M; PENTEADO, M G. **Informática e educação matemática**. Autêntica, 1992.

HOHENWARTER, M. **GeoGebra- Informações**. 2007. Disponível em: <http://www.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf>. Acesso em: 18 jun 2019.

PONTE, João Pedro da; OLIVEIRA, Hélia; BROCARDO, Joana. **Investigação Matemática na Sala de Aula.** Belo Horizonte: editora autêntica, 2013.

RICO, L.R.; LUPIANEZ, J.L.; MOLINA, M. **Análisis Didáctico em Educación Matemática**: Metodologia de investigacion, formación de professores e innovacion curricular.Granada: Editorial Comares, 2013.

UMA INVESTIGAÇÃO DAS DESIGUALDADES SOCIAIS A PARTIR DA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA E DE CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Lucas Nacif Giacomin, Rogério Otávio Mainardes da Silva e Lais Gabrielle Barboza Maciel
Licenciatura em Matemática – UFPR
lnacif98@gmail.com , r.otavioms@gmail e laisgbm@gmail.com

Prof. Arilda Fortunata Arboleya (Orientador)
Departamento de Teoria e Fundamentos da Educação – UFPR
arildaa@hotmail.com

Palavras-Chave: Sólidos Geométricos, Desigualdade, Gráficos.

Resumo:

Na disciplina de Estágio Supervisionado em Processos Interativos em Educação, fez-se necessário o acompanhamento das aulas em uma escola e o desenvolvimento e aplicação de uma atividade prática durante algumas aulas de matemática. Para tal atividade, o tema proposto pela professora da disciplina foi “Educação e desigualdade”, então, a partir desta temática, deveríamos envolver os alunos com algum exercício lúdico que envolvesse e trabalhasse a matemática enquanto tratava de alguma maneira, tangencial ou incisiva, uma correlação entre desigualdades e educação.

A escola onde o estágio foi desenvolvido, Centro Estadual de Educação Profissional de Curitiba, aborda o Ensino médio integrado com cursos técnicos em diversas áreas. Tendo então essa vertente do curso técnico, o colégio possui muitos alunos que começam a trabalhar muito cedo devido a suas condições sociais e econômicas, ou mesmo as oportunidades deliberadas devido a formação técnica que estão tendo.

Considerando que todos os cursos da formação técnica têm duração de quatro anos, devido às aulas geminadas, a pequena quantidade de alunos na sala (22) e a indicação da própria Professora Supervisora do Estágio, a turma escolhida para o desenvolvimento para a atividade foi um terceiro ano do Curso Técnico em Biotecnologia. Esta que, durante o período do estágio, estava tendo com o conteúdo Volumes e Áreas de figuras como cilindros e esferas.

Tendo em vista estas informações, como meio de trazer à tona grandiosos dados percentuais acerca de temas como a taxa evasão do Ensino Médio, a taxa de analfabetismo no Brasil e os diferentes resultados que podem ser obtidos quando se inferem nas mesmas taxas separando os gêneros, a atividade proposta

constituiu-se na construção de gráficos cilíndricos em três dimensões. Para isso, a sala foi separada em grupos de 3 a 4 alunos e cada grupo desse recebeu um dado diferente acerca das taxas citadas anteriormente, dados estes retirados do PNAD contínua (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (Org.), 2018) e do Censo da educação superior 2017 (BRASIL. INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS, 2018). Com isso, dada uma Área fixa para as bases dos cilindros, os alunos deveriam efetuar os cálculos corretos para encontrar a altura adequada do cilindro para que seu Volume representasse corretamente os percentuais nas taxas entregues. Além disso, após as construções efetuadas, foi sugerido que determinassem a quantidade de alunos que representaria os valores encontrados nos gráficos, tendo como o total a quantidade de alunos na sala, para que assim os dados atribuídos a cada grupo, como “a taxa de evasão de 60% do Ensino Médio”, se tornassem mais palpáveis.

Terminadas todas essas construções, os alunos compartilharam os seus resultados, o que deu início a uma discussão sobre as desigualdades presentes na própria escola, como o favoritismo e a proporção entre homens e mulheres em cada curso, em especial nesta turma há apenas um homem. A atividade surtiu o efeito desejado, ultrapassando as expectativas, e ao final da aula um questionário foi repassado aos alunos para que pudéssemos ter um *feedback*, que confirmou a compreensão da atividade e contou com alguns elogios.

Referências:

CARDOSO, Adalberto. Transições da escola para o trabalho no Brasil: persistência da desigualdade e frustração de expectativas. **Dados**, Rio de Janeiro , v. 51, n. 3, p.569-616, 2008. Disponível em http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0011-52582008000300002&lng=en&nrm=iso>. http://dx.doi.org/10.1590/S0011-52582008000300002.

BRASIL. INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS. (Org.). **Censo da Educação Superior:** Notas Estatísticas 2017. 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_superior/censo_superior/documentos/2018/censo_da_educacao_superior_2017-notas_estatisticas2.pdf>.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (Org.). **Educação : 2018.** Rio de Janeiro, 2019. 12 p. Disponível em https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/biblioteca-catalogo?view=detalhes&id=2101657

KOSLINSKI, Mariane Campelo; ALVES, Fatima. Novos olhares para as desigualdades de oportunidades educacionais: a segregação residencial e a relação favela-asfalto no contexto carioca. **Educ. Soc.**, Campinas , v. 33, n. 120, p. 805-831, set. 2012 . Disponível em http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-73302012000300009&lng=pt&nrm=iso>. http://dx.doi.org/10.1590/S0101-73302012000300009. https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/biblioteca-catalogo?view=detalhes&id=2101657

Dificuldades de alunos do 1º ano do Ensino Médio na resolução de problemas matemáticos

Letícia Ferreira Gomes
Licenciatura em Matemática – UFPR
leticiafgomes@ufpr.br

Profª. Drª. Tania T. Bruns Zimer (Orientadora)
Departamento de Teoria e Prática de Ensino – UFPR
taniatbz@ufpr.br

Palavras-chave: Dificuldades, Resolução de Problemas, Função do 1º grau.

Resumo:

O estudo deste trabalho foi desenvolvido no contexto da disciplina de Prática de Docência em Matemática I e II, do curso de Matemática da Universidade Federal do Paraná, em cinco turmas do 1º ano do Ensino Médio em um Colégio Estadual de Curitiba. Como consequência do contato com a sala de aula, foi possível observar que diante de problemas matemáticos propostos uma grande parcela dos alunos apresentava dificuldades durante a resolução e, muita das vezes, apresentava as mesmas dificuldades de forma recorrente em diferentes problemas. Sendo assim, esse cenário serviu como motivação para identificar quais são as maiores dificuldades que os alunos apresentam durante a resolução de problemas.

Portanto este trabalho busca identificar, à luz de teóricos como Polya (1995), Onuchic e Allevato (2014) e Dante (2009), quais são as dificuldades que alunos do 1º ano do Ensino Médio apresentam durante a resolução de problemas matemáticos. Como o conteúdo trabalhado durante o primeiro semestre ficou restrito a funções do primeiro grau, os problemas analisados serão especificamente a respeito desse conteúdo.

Como instrumento de investigação para coletas de dados foi elaborado um teste com quatro problemas explorando o conteúdo de funções aplicado em uma das turmas, além disso, também é levado em consideração a observação participativa das aulas no estágio e o diário de bordo. Como o estágio teve a duração de dois semestres diversas observações foram constatadas ao longo das aulas e, como a observação era participativa, alguns alunos receberam ajuda e algumas de suas dificuldades foram identificadas. No diário de bordo foram feitas anotações em relação às observações constatadas em sala de aula de forma que foi possível analisar, posteriormente, cada situação considerada relevante.

O teste foi desenvolvido pela própria autora, composto por quatro problemas envolvendo o conteúdo de funções do primeiro grau. Os problemas matemáticos foram aplicados para 25 alunos de uma das turmas do 1º ano do Ensino Médio, e a escolha da turma foi realizada através de um sorteio.

Os quatro problemas podem ser categorizados como problemas-processo ou heurísticos – categorias feitas por Dante (2009) – pois as operações não estão

contidas explicitamente no enunciado e a linguagem precisa ser traduzida para uma linguagem matemática.

Segundo Polya (1995), existem quatro etapas para se resolver um problema:

1. Compreender o problema;
2. Estabelecer um plano;
3. Executar o plano;
4. Fazer a verificação.

Foram classificadas, então, possíveis dificuldades dentro de cada uma das etapas de Polya, de forma que, a partir da análise das respostas dos alunos foi possível identificar as maiores dificuldades apresentadas pelos mesmos em cada um dos problemas propostos.

Por exemplo, no segundo problema do teste foi detectado dentro da primeira etapa que os alunos têm dificuldade em interpretar o enunciado do problema, em ler tabela, em reconhecer quais são os dados do problema e qual é a incógnita. Dentro da segunda etapa, dificuldade em relacionar as variáveis envolvidas, utilizando, em muitas soluções, apenas uma delas. Dentro da terceira etapa, dificuldade em realizar as operações aritméticas e em utilizar a notação de função. Na última etapa, concluiu-se que muitos alunos nem chegaram a realizar essa etapa.

Referências:

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática - Teoria e prática**. 1ª. ed. São Paulo: Ática, 2009. 192 p.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí, Paco Editorial, 2014. 160 p.

POLYA, G. A. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p.

A FORMAÇÃO DE PROFESSOR NO ESTÁGIO SUPERVISIONADO E O ENSINO DE MATEMÁTICA: DIVERSIDADE E PILARES DA EDUCAÇÃO NO ENSINO.

Leticia Milek Weinert, Samantha Kubes e Wagner Luz
Licenciatura em Matemática e Estatística – UEPG
leticiamilek@hotmail.com, samantakubes@gmail.com e wagner-luz@hotmail.com

Prof.ª Marceli B. Goulart (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística– UEPG
marcelibg@gmail.com.br

Palavras-chave: Pilares, Educação, Métodos.

Resumo: Este artigo tem por finalidade discutir o quão importante é o estágio supervisionado na formação de professores, bem como a experiência acadêmica em diferentes campos de estágios, os quais foram realizados durante o ano de 2019 para o curso de Licenciatura de Matemática na Universidade Estadual de Ponta Grossa.

O estágio supervisionado é de suma importância para a formação acadêmica, e também uma exigência legal, conforme a Lei de Diretrizes e Bases - LDB 9394/96

> Parágrafo único - Para cada aluno é obrigatório a integralização da carga horária total do estágio previsto no currículo pleno do curso, nela podendo ser incluídas as horas destinadas ao planejamento, orientação paralela e avaliação das atividades (BRASIL, 2013).

Além disso, proporciona ao futuro professor aprendizagens para enfrentar alguns dos desafios encontrados no cotidiano da profissão, e ainda relacionar as teorias aprendidas na formação inicial com a prática.

> O estágio é o eixo central na formação de professores, pois é através dele que o profissional conhece os aspectos indispensáveis para a formação da construção da identidade e dos saberes do dia-a-dia (PIMENTA E LIMA, 2004)

Para Içami Tiba (2018), escritor de livros sobre educação e palestrante “os quatro pilares andam juntos, pois quem escuta esquece, quem assiste uma aula só ouvindo perde tempo pois será tudo se esquecido, só ouvir não ensina, quem justifica não faz, quem faz aprende, quem aprende produz, quem faz inova, quem inova sustenta e quem sustenta é feliz, para sermos felizes passamos por todos os pilares pois a felicidade não existe sozinha” (2018)

Seguindo o pensamento de Tiba (2018), temos que o ensino vai muito além de transmitir o conteúdo, o ensino está envolvido na construção do ser humano, no crescimento profissional e pessoal de cada um, onde como professor e instituição de ensino devemos ter como foco os quatro pilares, onde ensinamos a “aprender a aprender”, não apenas passamos o conteúdo, mas sim os ensinamos a buscar o conhecimento por conta própria e ainda a desenvolver seu próprio conhecimento, não depender de receber tudo pronto. Ensinamos também o “aprender a fazer” onde ensinamos a “prática”, como fazer, como agir nesta situação, a ação, por exemplo, em matemática é o ensinar a calcular. O “aprender a ser” está envolvido com o se conhecer, se desenvolver e assim melhorar intrinsecamente. O “aprender a conviver”, ensinamos sobre o relacionamento entre as pessoas a convivência e a desenvolvemos.

O presente artigo tem como finalidade identificar e descrever alguns indícios da presença dos quatro pilares da educação propostos por Tiba (2018), em três diferentes campos de estágios, Ensino Médio Regular Noturno, Educação de Jovens e Adultos (EJA) e no Projeto Adolescente Aprendiz, no município de Ponta Grossa.

Para tanto, foram realizadas observações destes três contextos no 1º semestre de 2019, como proposta da disciplina de Estágio Curricular Supervisionado II.

No Ensino Médio Regular Noturno, um dos estagiários acompanhou duas turmas: uma de 2º ano e outra de 3º ano do Colégio Estadual Eugênio Malanski. As outras duas estagiárias, num primeiro momento realizaram o estágio no Projeto Adolescente Aprendiz, onde as mesmas eram regentes da turma, e em segundo momento no EJA, do colégio Professor Paschoal Salles Rosa, onde observaram a turma de Matemática do Ensino Médio.

Através dos quatro pilares buscamos tentar através de observações e docências identificar quais têm maior enfoque, e se este tem variação de um campo de estágio para o outro, e também procurar identificar os motivos pelos quais se optou por focar mais em um pilar do que no outro, ou até mesmo como conseguem focar nos quatro pilares ao mesmo tempo, e ainda tentar propor soluções para que os quatro pilares estejam como base da educação em todos os ambientes de ensino.

No Quadro 1, são apresentados alguns indícios da presença dos quatro pilares propostos por Tiba (2018) nos três contextos de estágio:

QUADRO 1: PRESENÇA DOS 4 PILARES NOS CAMPOS DE ESTÁGIOS

	Projeto Adolescente Aprendiz	**Ensino de Jovens e Adultos**	**Ensino Regular**
Aprender a aprender	Aulas para desenvolver o raciocínio lógico, fazendo assim o aluno a pensar. (Bom)	Aulas para desenvolver o raciocínio lógico, fazendo assim o aluno a pensar. (Bom)	Aulas para desenvolver o raciocínio lógico, fazendo assim o aluno a pensar. (Regular)
Aprender a fazer	Aulas voltadas para aplicação do conhecimento adquirido. Como o curso está vinculado ao trabalho, muitos dos conhecimentos adquiridos já estavam associados com o que podem utilizar no ambiente de trabalho. (Bom)	Aulas voltadas para aplicação do conhecimento adquirido, através dos exemplos que em todos os conteúdos o professor apresenta onde e como utilizam aqueles conhecimentos. (Bom)	Aulas voltadas para aplicação do conhecimento adquirido. (Regular)
Aprender a ser	Aulas com relação a convivência e sociabilidade, neste campo havia uma disciplina sobre socialização e convivência, além de palestras focadas no aluno e na sua relação consigo mesmo, e palestras sobre drogas. (Regular)	Aulas com relação a convivência e sociabilidade. (Fraco)	Poucas aulas com relação à convivência e sociabilidade. (Fraco)
Aprender a conviver	Afetividade entre professor e alunos, podemos observar isto na relação existente entre os professores e alunos, e até mesmo com nós. (Bom)	Afetividade entre professor e alunos. (Bom)	Afetividade entre professor e alunos. (Regular)

Fonte: os autores (2019).

Com base nas observações e docências percebemos que a presença dos quatro pilares está ligada diretamente em todos os ensinos, seja Regular, Eja ou em Projetos, citando o ensino médio regular em primeiro momento foi observado que a dificuldade em cumprir todos estes pilares está primeiramente na carga horária de aulas ministradas, sendo apenas duas horas aulas semanais de matemática no segundo ano e três aulas semanais no terceiro ano do ensino médio, forçando o professor a tentar vencer o conteúdo que deveria ser aprendido no mesmo, faltando assim tempo para se preocupar nas aprendizagens do aprender a ser e a conviver que são essenciais para a convívio em sociedade. Entretanto, foi observado que o aprender a conviver pode ser de certa forma driblada quando o professor toma algumas atividades fundamentais para esse pilar, elaborando algumas vezes atividades em grupos, incentivando os alunos a se relacionar um com o outro e fazendo sempre que possível grupos diferentes formando assim uma afetividade em cada integrante da turma.

No EJA percebemos que um dos principais fatores para que esses pilares não sejam todos cumpridos está na sua maioria na dificuldade de cada um, que por sua vez são de maioria trabalhadora e com idade avançada no conteúdo a ser aprendido, quando comparados ao ensino regular, sendo assim neste ambiente temos um maior enfoque no aprender a fazer, e deixasse um pouco de lado os demais pilares, apesar de no caso específico desta turma o professor ter uma interação muito direta com os alunos proporcionando a eles muitos momentos de convivência, e participação nas aulas, o que não chega a ser exatamente o que é proposto para o quarto pilar, mas ao mesmo tempo traz um pouco da essência deste.

Já no projeto Adolescente Aprendiz, podemos observar que neste caso existem pontos dos quatro pilares de maneira mais clara que nos demais campos, inclusive disciplinas sobre a socialização e convivência, como se trata de um curso para adolescente que estão trabalhando em empresa temos o aprender a fazer muito claro, pois muitos dos conhecimentos adquiridos ali podem ser usados na empresa, já com relação ao ser e aprender a aprender, trata-se de algo com um pouco menos de enfoque, mas que ao mesmo tempo pode ser observado em atividades realizadas por eles, onde se propõe reflexões referentes a temas pessoas, assim como palestras, e referente ao aprender a aprender temos as metodologias ativas que nos dão uma excelente base para desenvolver no aluno esse costume de buscar e não apenas receber o conteúdo.

Referências:

BRASIL. **As Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília/DF – 2013.

PIMENTA, Selma Garrido e LIMA, Socorro Lucena Lima. **Estágio e Docência**. São Paulo: Editora Cortez, 2004.

OS PILARES BÁSICOS DA EDUCAÇÃO | IÇAMI TIBA. Duração: 07:10min. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=xWPtCoWf5UQ>. Acesso em: Setembro de 2019;

YOSHII, Carla Adriana e BRANDÃO, Taissa de Paula. **A importância do estágio na formação dos futuros docentes na educação infantil em uma escola no município de Paratins/ AM.** Disponível em: < http://www.editorarealize.com.br/revistas/fiped/trabalhos/TRABALHO_EV050_MD1_SA12_ID440_22102015164956.pdf> Acesso em: Setembro de 2019

A participação de um professor da cidade de Antonina PR no Movimento da Matemática Moderna no litoral paranaense

Ligiane de Oliveira Simões[1]
Licenciatura em Matemática – Unespar
ligiane.unespar@gmail.com

Prof. Dr. Mariliza Simonete Portela (Orientadora)
Departamento de Matemática – Unespar
mariliza.portela@unespar.edu.br

Prof. Me. Liceia Alves Pires (Orientadora)
Departamento de Matemática – Unespar
liceia.pires@unespar.edu.br

Palavras-chave: História da Matemática, Matemática Moderna, litoral do Paraná.

Resumo:

O seguinte trabalho é resultado de estudos decorrentes do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática (GPHEM), da UNESPAR, *campus* de Paranaguá. Reestruturado a partir da apresentação no ENAPHEM (Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática) em novembro de 2018, na cidade de Campo Grande – MS, o trabalho tem como objetivo compreender como se deu a participação de um professor de matemática na região litorânea paranaense no período do Movimento da Matemática Moderna (M.M.M), a partir dos anos 1960.

Para tanto, utiliza-se o depoimento oral de um professor que fazia parte do corpo docente de um dos colégios da Cidade de Antonina – PR, que participou de cursos e implementou em sua prática, ações do Movimento da Matemática Moderna.

Como aporte teórico utilizou-se a concepção de história de vida dos professores, justificando que, segundo Goodson (2007, p. 124), “a própria metodologia insiste que o pesquisador converse com os professores, pense nele e entre em contato com eles, respeitando-os, porque não é possível trabalhar de outra forma. Afinal, eles são a fonte”.

O Movimento da Matemática Moderna nasceu da intenção de criar uma nova perspectiva de como ensinar e aprender matemática, buscando suprir as novas necessidades que surgem com a tecnologia que emerge no fim da década de 1950.

No Brasil, essa nova disposição começa a tomar forma no início de 1960 com grupos formados por professores de matemática em vários estados do país. O primeiro, Grupo de Estudo do Ensino de Matemática (GEEM), se formou na cidade de São Paulo em 1961 e foi liderado por um dos maiores nomes se tratando em educação matemática da época, o professor Osvaldo Sangiorgi. Já, no Paraná,

[1] Bolsista do Programa PiBIC - Fundação Araucária 2018.

segundo Wielewski (2008), institui-se o Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM), criado e coordenado pelo professor Osny Antonio Dacol, que foi professor e diretor do Colégio Estadual do Paraná.

Com o intuito de entender como foi a participação do professor pesquisado, recorreu-se a um diálogo com o professor de matemática pioneiro da região estudada neste período, no sentido de dar voz ao professor, buscando resgatar parte desta história.

Pela concepção de Goodson, a voz do professor é uma vertente de pesquisa tão necessária quanto a das práticas educacionais, pois

> no mundo do desenvolvimento dos professores, o ingrediente principal que vem faltando é a *voz do professor.* Em primeiro lugar, tem-se dado ênfase à prática docente do professor, quase se podendo dizer ao professor enquanto "prático". Necessita-se agora de escutar acima de tudo a pessoa a quem se destina o "desenvolvimento". Isto significa que as estratégias a estabelecer devem facilitar, maximizar e, em sentido real, surpreender a voz do professor. (GOODSON, 1995 , p.69)

Portanto, buscou-se o depoimento do professor José Augusto Mendes de 82 anos que lecionou nas matérias de Matemática e Física, desde maio de 1966, no Colégio Estadual Moysés Lupion, na Cidade de Antonina, em turmas do Ensino Fundamental II, Ensino Médio e Magistério.

A história por trás do seu envolvimento com a Educação Matemática diz muito sobre o posicionamento dos professores durante a reformulação da disciplina com o movimento e também traz alguns elementos do próprio movimento no litoral do Paraná.

Segundo o professor José Augusto, com surgimento do M.M.M, um dos professores de Matemática que atuava no Colégio Moysés Lupion se recusou a frequentar os cursos necessários para atualizar suas aulas no modelo da Matemática Moderna e pediu afastamento do cargo. Portanto, ele assumiu a tarefa, com a indicação de um de seus professores, iniciou os estudos referentes à Matemática Moderna e os cursos que encaminharam ao seu primeiro contato com a prática docente.

Durante sua formação nos cursos de Matemática Moderna, o professor afirma ter encontrado dificuldades quanto a nova simbologia aplicada, na representação de funções e na própria Teoria dos Conjuntos. Mais tarde em sua carreira o professor se forma em Licenciatura Matemática pela Faculdade Estadual de Educação Ciências e Letras de Paranaguá (FAFIPAR), hoje Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) - *campus* Paranaguá. Concluiu o curso de graduação no ano de 1974.

Ao expor sua postura em sala de aula, o professor José Augusto divide sua metodologia nas seguintes etapas: exposição, organização, eliminação das dúvidas recorrentes, passar exercícios para casa, corrigir tais exercícios e finalizar retirando as dúvidas (caso ainda houvesse alguma). Além disso, utilizava como apoio em suas aulas principalmente livros de estudo dirigido.

Durante a entrevista foi citado o trabalho do escritor Osvaldo Sangiorgi, e devido à grande fama do escritor na época do movimento, o professor declara que era um dos livros mais utilizados por ele. O professor Sangiorgi se tornou um dos primeiros e principais agitadores do movimento no país, desenvolvendo obras renomadas e livros didáticos muito importantes como o "Matemática Moderna para o Ensino Secundário".

Outra questão interessante é seu comentário sobre pais de seus alunos, os quais exprimiram estranheza em relação aos conteúdos novos que se encontravam no caderno de seus filhos. Isso porque esses pais aprenderam uma Matemática muito mais prática em sua época de escola e não reconheciam a simbologia empregada após o M.M.M..

Já quanto aos alunos, o professor declara com firmeza que demonstraram facilidade na adaptação de aprendizagem. E remete esse sucesso a sua preparação durante a formação inicial que lhe foi oferecida.

Com este trabalho, por meio da voz de um participante do processo, entendeu-se que o Movimento da Matemática Moderna no Litoral do Paraná ocorreu em paralelo com o Movimento na capital do Estado Curitiba, e que os professores dessa região se atualizavam através dos cursos ofertados pelo grupo ou pelo Governo do Estado, ou ainda utilizando os materiais produzidos sobre o MMM que eram publicados por grandes nomes do período, como Osvaldo Sangiorgi. Esses cursos se davam normalmente nas capitais, e destaca-se aqui, que apesar dos obstáculos de locomoção e de episódios onde professores se recusaram a apoiar o movimento, houve um professor, fonte deste estudo, o senhor José Augusto Mendes, que se prontificou a estudar a Matemática Moderna e a repassar para seus alunos, em prol do avanço do ensino da Matemática nas regiões que encontrassem maior dificuldade em aderir ao M.M.M, colaborando e difundindo em sua prática docente as ideias e os pressupostos do Movimento.

Referências:

GOODSON, I. **Dar voz ao professor**: as histórias de vida dos professores e o seu desenvolvimento profissional. In: NÓVOA, António. Vidas de professores. Porto: Porto Editora, 1995.

GOODSON, I. Da história das disciplinas ao mundo do ensino: entrevista com Ivo Goodson. **Educação em Revista**. (45), p. 121-126, 2007.

WIELEWSKI, D. G. O Movimento da Matemática Moderna e a Formação de Grupos de Professores de Matemática no Brasil**. Associação de Professores de Matemática**, p. 1-10, 2008.

O ensino da matemática no curso de habilitação do magistério no Colégio Estadual Gabriel de Lara na década de 1990.

Maria Aline Ramos Batista[1]
Licenciatura em Matemática – UNESPAR/Campus Paranaguá
m.alinerb@gmail.co

Prof. Drª Mariliza Simonete Portela (Orientador)
Departamento de Matemática – UNESPAR/Campus Paranaguá
mariliza.portela@unespar.edu.br

Palavras-chave: Educação, história da educação matemática, formação de professores.

Resumo:

Esta pesquisa de Iniciação Cientifica busca, no âmbito histórico, compreender a formação dos professores que ensinavam a matemática no litoral paranaense na década de 1990. A motivação da pesquisa se deve ao fato de que até esse período, os professores que atuavam na cidade de Matinhos, litoral paranaense, não tinham formação específica ou eram formados em outras cidades. Em 1990, o Colégio Estadual Gabriel de Lara instituiu um curso de habilitação ao magistério. Assim nos intui saber como se constituiu esse curso. Que leis o amparavam? Quais as disciplinas o compunham? Que matemática era ensinada e como as práticas de ensino aconteciam? A pesquisa tem como pano de fundo os estudos da história cultural porque entendemos que todo o contexto deve ser estudado para que haja compreensão das práticas de ensino da matemática. Desse modo abordamos a sujeição do curso aos documentos prescritos; a formação dos sujeitos dentro da realidade social e política e a própria constituição do espaço da pesquisa. O trabalho em questão está sendo permeado: por leituras e discussões de produções abordando o conceito de história e de história cultural; pelo acesso à arquivos públicos e pessoais, nos quais serão observados o tratamento e manuseio de documentos históricos; pela leitura cuidadosa de fatos históricos, isenta de julgamento. Elementos que ofertam a possibilidade de elaboração do pensamento, reflexão das práticas de ensino e expressão escrita de relatórios, trabalhos e artigos científicos. Nesse contexto nos valemos de produções de autores como: Otaíza Romanelli (2008), Iran Abreu Mendes (2009), Maria Cristina Araujo de Oliveira (2016), Leonor Maria Tanuri (2000), entre outros discutidos dentro do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matematica da Universidade. As análises que fizemos até o momento nos levaram a considerar que o espaço de formação, atendendo as exigências do período, além de primar por uma sólida formação matemática, preocupava-se com os saberes matemáticos destinados ao ensino da matemática nos anos iniciais

[1] Bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - PIBIC

Referências:

MENDES, Iran Abreu. **Investigação Histórica no ensino da Matemática.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna. 2009.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de et al. A Matemática na Formação de Normalista: Minas Gerais, Rio Grande do Sul, Espírito Santo, Mato Grosso, Paraná e São Paulo, 1920-1945. In:

ROMANELLI, Otaíza. **História da Educação no Brasil.** 33 ed. Petrópolis, RJ: Vozes. 2008.

TANURI, Leonor Maria. História da Formação de Professores. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 14, p.61-88, ago. 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n14/n14a05>. Acesso em: 28 jun. 2019

Educação Matemática em conjunto com a Educação Ambiental por meio de Oficinas Temáticas

Davi Paula da Silva, Mayumi Kuriyama de Lima e Flávia Victória Antunes
Técnico em Meio Ambiente integrado ao Ensino Médio – IFPR
davipaulasilva@hotmail.com, mayumi-mi@hotmail.com, flavia-vic01@hotmail.com

Prof. Alessandra Assad Angieski
Departamento de Matemática – IFPR
alessandra.assad@ifpr.edu.br

Prof. Joana Rupprecht Zablonsky
Departamento de Recursos Naturais – IFPR
joana.zablosnky@ifpr.edu.br

Prof. Fernanda de Souza Sezerino
Departamento de Recursos Naturais – IFPR
fernanda.sezerino@ifpr.edu.br

Palavras-chave: Ensino-Aprendizagem, Expressão Gráfica, Política Nacional de Educação Ambiental.

Resumo:

A compreensão da Matemática e da Educação Ambiental (EA) é primordial para os tempos atuais, contudo as mesmas apresentam alguns fatores limitantes. Segundo Santos, França, Santos (2007) o ensino da matemática tem sido lecionado de forma mecânica, através de memorização e de forma descontextualizada, tornando difícil o processo de ensino-aprendizagem. Aliado à esta problemática, há ainda a pouca aplicação da Educação Ambiental como conceito transversal.

Segundo Salles (2013) alguns dos motivos que podem levar o professor a não abordar a EA nas salas de aula é a ausência de questões ambientais no livro didático, além de alguns professores não possuírem capacitações na temática, nem mesmo estimulados possuírem tais aprendizados nesta área.

Entretanto tais barreiras não devem impedir a aplicação desta temática, pois o direito à Educação Ambiental, está previsto na Política Nacional de Educação Ambiental (PNEA), instituída em 1999 pela Lei n.º9.795 que dispõe sobre a Educação Ambiental, além de dar outras providências, apresenta-a como um componente fundamental da educação, buscando a construção de valores, conhecimentos, habilidades para a preservação do meio ambiente e garantia de qualidade de vida e sustentabilidade.

Neste sentido, o presente trabalho almejou criar oportunidades de se abordar a Educação Ambiental nas aulas de matemática para os estudantes de Ensino Médio do Instituto Federal do Paraná – Campus Paranaguá, utilizando como metodologias as Oficinas Temáticas e a Expressão Gráfica.

Desta forma, utilizou-se das Oficinas Temáticas que, segundo Lima, Sousa, Silva (2012), é um instrumento facilitador para integração de diferentes áreas do conhecimento, neste caso entende-se ainda que a Educação Ambiental apresenta como característica a transversalidade, ou seja, a aplicação em diferentes áreas do conhecimento, conforme propõe a Figura 1 abaixo:

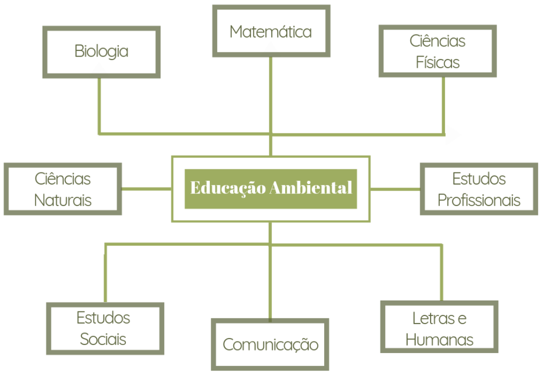


Figura 1 – Modelo de Programa de Educação Ambiental
Fonte: Hungerford, H. e Peyton, R. (1995) (Adaptado pelos autores)

A Expressão Gráfica, portanto, é utilizada como um campo de estudos, no qual usufrui de desenhos, imagens, modelos, materiais manipuláveis e recursos computacionais de forma a auxiliar na solução de problemas e na transmissão de ideias (GÓES, 2012). Neste sentido, adotou-se tal metodologia de forma a transformar as oficinas em espaços que atraíssem os estudantes, modificando o espaço tradicional composto por carteiras enfileiradas e um quadro negro, por uma sala repleta de jogos e brincadeiras, que estimulam a aprendizagem coletiva.

As atividades propostas no presente trabalho são cerne da pesquisa, tendo como foco elaborar práticas e vivências que contemplem a união da Educação Matemática com a Educação Ambiental, para isso criaram-se 5 oficinas temáticas: 1) Contabilização de resíduos sólidos recicláveis; 2) Circunferência na Natureza; 3) A investigação do valor aproximado de π a partir de embalagens recicláveis cilíndricas; 4) Consumo de água; 5) Trigonometria na Natureza.

As oficinas desenvolvidas abordaram questões ambientais como os Resíduos Sólidos, Consumo de Água e a Preservação da Natureza, e também conteúdos matemáticos, como as Operações Básicas, Trigonometria, Geometria e Porcentagem.

Como forma de se obter uma devolutiva por parte dos estudantes acerca do presente trabalho foi aplicado uma série de questionários, indagando-os sobre a aprendizagem dos mesmos ao término das oficinas, além de suas opiniões sobre a forma como os conteúdos foram abordados. Portanto, observou-se, que as oficinas tem incentivado os estudantes a obterem melhores resultados, desmistificando preconceitos em relação a esta disciplina, tornando-a mais dinâmica e prática. Além de trazer conscientização aos estudantes sobre temáticas que muitas vezes não possuem espaços nas disciplinas de núcleo comum.

Ademais, entende-se ainda que a aplicação dos conteúdos de EA em consonância com os conteúdos matemáticos tem tornado a aprendizagem dos estudantes com mais significado, pois sua abordagem é realizada com base na contextualização da matemática no cotidiano, e desta forma, fortalece tanto a aprendizagem da Matemática quanto a formação de indivíduos conscientes ambientalmente.

Referências:

______. **Lei n. 9.795**, de 27 de abril de 1999. Dispõe sobre a educação ambiental, institui a Política Nacional de Educação Ambiental e dá outras providências. Brasília, DF, 27 de abr. 1999. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9795.htm>. Acesso em: 10 ago. 2019.

GÓES, Heliza Colaço. **Expressão Gráfica: esboço de conceituação**. 2012. 123 f. Dissertação (Mestrado) –Universidade Federal do Paraná. Curitiba.

HUNGERFORD, H. e PEYTON, R. **Como construir un programa de Educación Ambiental**. Programa Internacional de Educación Ambiental. UNESCO-PNUMA. Bilbao: Editorial los Libros de la Catarana, 1993.

LIMA, J. D. F. V.; SOUSA, A. N.; SILVA, T. P. **OFICINAS TEMÁTICAS NO ENSINO DE QUÍMICA: DISCUTINDO UMA PROPOSTA DE TRABALHO PARA PROFESSORES NO ENSINO MÉDIO**. In: Djane de Fátima Oliveira; Wanda Izabel Monteiro de Lima Marsiglia; Verônica Evangelista de Lima; Weruska Brasileiro Ferreira. (Org.). EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA PARA O DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL. 6ed. Campina Grande-PB: REALIZE, 2012, v. 1, p. 1-12.

SALLES, C. 2013. **Meio ambiente e educação ambiental nas escolas públicas**. Disponível em: https://carollinasalle.jusbrasil.com.br/artigos/112172268/meio-ambiente-e-educacao-ambiental-nas-escolas-publicas. Acesso em 10 de agosto de 2019.

SANTOS, J. A.; FRANÇA, K. V.; SANTOS, L. S. B. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática**. (monografia) Centro Universitário Adventista de São Paulo – Curso de Licenciatura em Matemática, Brasília, 2007.

Matematicativa: a extensão compreendida na prática

Ana Flavia Lopes[1] e Nathalie Aparecida Felicetti Luvison[2]
Licenciatura em Matemática – UFPR
lopesbenites@gmail.com e nathalie.fluvison@gmail.com

Prof. Paula Rogeria Lima Couto (Orientadora)
Departamento de Matemática – UFPR
paulacouto@ufpr.br

Palavras-chave: Matematicativa, extensão, exposições.

Resumo:

Este trabalho é um relato de experiência da participação dos estudantes de graduação no projeto de extensão Matematicativa. Ele foi criado com a intenção de "proporcionar ao aluno do Ensino Básico, com ênfase no Ensino Médio, preferencialmente de escolas da rede pública de ensino, o contato com temas da matemática que são pouco ou não são explorados nas aulas de matemática da escola por motivos diversos, que possam incentivar o aprofundamento do que é aprendido em sala de aula ou a descoberta de abordagens diferentes da matemática, seja numa aplicação ou no desenvolvimento da própria matemática. Este contato com temas interessantes da matemática se dá através de palestras avulsas proferidas nas escolas por professores do Departamento de Matemática ou convidados e por uma exposição de trabalhos de alunos dos cursos de Matemática da UFPR" [1]. O presente trabalho abordará a parte das exposições, que é o contexto em que os alunos de graduação se inserem no projeto de maneira mais ativa, tornando-se também público alvo do projeto.

Durante o período de maio de 2017 a abril de 2019, diversos estudantes de graduação em Matemática da UFPR participaram do projeto em três condições: como bolsistas, com uma carga horária semanal de 12 horas de atividade, como voluntários permanentes com carga horária semanal também de 12 horas ou como voluntários esporádicos, que atuaram em alguma exposição, em uma ou mais escolas ou eventos, somente para a apresentação das atividades. A diferença entre as duas primeiras formas de participação e a última, foi a atuação na elaboração das exposições e na preparação dos voluntários esporádicos para a mesma. Nestes dois anos, o projeto visitou várias escolas de Ensino Médio da rede estadual de Curitiba, além de participar de vários eventos com público variado.

Este relato trata das contribuições da extensão na formação dos estudantes de graduação, como a experiência de comunicação com o público, a de atuar no futuro ambiente de trabalho, o ambiente escolar, ainda que fora da sala de aula. O objetivo é descrever alguns aspectos do desenvolvimento das várias etapas que envolveram as exposições, da preparação à execução, passando pela reflexão e avaliação das ações concretizadas. Pretende-se destacar pontos que podem ser levados em consideração na execução deste e de outros projetos de extensão em Matemática, como a questão da avaliação do impacto das atividades do projeto no público alvo.

1 Bolsista do projeto de extensão Matematicativa
2 Voluntária do projeto de extensão Matematicativa

Além das reflexões geradas das discussões em grupo dos participantes do projeto, alunos da graduação e coordenação, o relato também levará em conta o resultado de um questionário que todos os estudantes, que de alguma forma contribuíram com o projeto, foram convidados a responder ao final do mesmo. O resultado deste questionário propiciará uma análise tanto quantitativa quanto qualitativa, pois traz dados numéricos e explora as respostas de perguntas subjetivas do questionário aplicado. Espera-se compartilhar experiências sobre a vivência em um projeto de extensão, suas expectativas e seus desafios.

Ao longo dos dois anos iniciais, a atuação dos graduandos no projeto foi direcionada para a elaboração e a apresentação das atividades nas exposições. Foram feitas reuniões semanais entre os bolsistas e voluntários permanentes e seus orientadores, com o objetivo de desenvolver atividades atraentes, dinâmicas e apropriadas para o ambiente de uma exposição. O estudo da matemática dos tópicos abordados nas atividades também figuraram nesse processo. Além disso, reuniões gerais com todas as pessoas envolvidas eram realizadas com menor frequência. No início de cada ano, com o ingresso de novos alunos, diversos temas foram escolhidos para as atividades das exposições. As ideias para os objetos e atividades desenvolvidas no primeiro ano foram sugestões da coordenação e de colaboradores, na tentativa de utilizar os poucos materiais disponíveis para a execução da tarefa. No segundo ano, também os orientadores sugeriram as atividades, de forma a aproveitar o material adquirido através da participação do projeto na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia da UFPR, que foi uma chance de obter recurso para a compra de materiais. Com um acervo básico de atividades elaboradas, aconteceram as visitas nas escolas, em dias e locais agendados pela coordenação do projeto. As atividades eram expostas em várias “ilhas”, onde em volta delas os estudantes do Ensino Básico observavam e eram convidados pelos estudantes de graduação, os monitores da exposição, para interagirem com os objetos, manipulando quebra-cabeças geométricos, cortando e pintando para descobrir propriedades de objetos matemáticos, etc. Um questionário foi elaborado para saber a opinião do público depois da intervenção do projeto nas escolas, mas como nos primeiros anos, deixou-se para passar o questionário em um dia posterior à visita, não houve retorno das escolas em alguns casos, ou poucas pessoas responderam, o que tornou insignificante a amostra. Para os estudantes de graduação que participaram do projeto, também foi passado um questionário para avaliar o impacto dessa atividade de extensão em sua formação.

Do desenvolvimento exposto acima, observa-se que a dificuldade nos anos iniciais de se obter recursos materiais refletiu diretamente na execução do projeto, pois a atenção estava voltada para a construção de um acervo mínimo de atividades, desse modo ficou um pouco de lado o processo de avaliação dos trabalhos desenvolvidos na perspectiva do público alvo. Na verdade, a necessidade desse retorno é um grande desafio para o projeto. Uma avaliação positiva, mesmo que indireta, é o interesse das escolas em receber novamente o projeto no ano seguinte, o que tem ocorrido. Entretanto, uma das metas do projeto é construir um instrumento de avaliação desse impacto, com informações obtidas antes da ida do projeto na escola e após a realização da palestra e da exposição. Além disso, na nova edição do projeto o questionário já existente de avaliação para as escolas é aplicado nos momentos finais do evento, o que garante a captação de informações.

A extensão é uma “ação da Universidade junto à comunidade que possibilita o compartilhamento, com o público externo, do conhecimento adquirido por meio do ensino e da pesquisa desenvolvidos na instituição. É a articulação do conhecimento científico advindo do ensino e da pesquisa com as necessidades da comunidade onde a universidade se insere, interagindo e transformando a realidade social” [2]. Assim, no momento em que saímos do nosso ambiente acadêmico, precisamos saber se cada passo que estamos dando é bem visto e, de forma direta, útil para a comunidade em que estamos inseridos. Consideramos que a inexperiência sobre as necessidade da extensão, entrelaçado com a burocracia universitária, fez com que o projeto ficasse com uma certa defasagem avaliativa na primeira edição. Entretanto, agora estamos em processo de elaboração de uma metodologia pré-teste e pós-teste, e intuitivamente sabemos que o objetivo do Matematicativa é extremamente válido e indispensável. Portanto, o próximo passo é analisar o projeto pela ótica da comunidade.

Referências:

[1] Visão geral do Projeto de extensão “Matematicativa: Edição 2019”. <https://intranet.ufpr.br/sigeu/public/projetoExtensao!view?projetoExtensao.id=144> Acesso em 19 set 2019.

[2] UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO (UFES. Pró-reitoria de extensão:O que é a extensão universitária? Vitória, 2013; <http://www.proex.ufes.br/o-que-%C3%A9-extens%C3%A3o-universit%C3%A1ria> Acesso em: 17 set 2019.

A MATEMÁTICA INTERDISCIPLINAR PRESENTE NAS OBRAS DE ESCHER

Gabriela Vieira de Almeida [1], Grazielle Tecla Palivoda Cieszynski [2] e Patrícia de Cássia Luquetta[3]
Licenciatura em Matemática – PUCPR
gabivdealmeida@hotmail.com, grazitecla@yahoo.com.br e pateluque@gmail.com

Prof. Dr. Eduardo Quadros da Silva
Escola de Educação e Humanidades – PUCPR
quadros.eduardo@gmail.com

Palavras-chave: PIBID, Formação acadêmica, matemática.

Resumo: O presente trabalho visa relatar a experiência das acadêmicas da licenciatura em Matemática – Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR), os quais possuem bolsa pelo Programa de Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), no Instituto de Educação do Paraná Professor Erasmo Pilotto (IEP). O trabalho no PIBID é realizado semanalmente, em busca de tornar mais real e mais prático aquilo que nós estudamos na universidade. Com o apoio da professora-supervisora que nos acompanha semanalmente no IEP, buscamos sempre aprender com os acompanhamentos em sala de aula, planejamentos semanais de aulas, projetos criados e aplicados em diferentes turmas do Ensino Fundamental II e Ensino Médio pelos bolsistas e a convivência com a realidade das escolas estaduais. Sendo assim é possível perceber o quanto agrega para o aprendizado e engrandecimento de cada universitário e futuro docente. Com o objetivo de trazer sentido a conceitos matemáticos para os alunos, foi feito um trabalho com os nonos anos, onde as licenciandas exploraram a interdisciplinaridade e os alunos do instituto de educação puderam sair da rotina e explorar a matemática de outra maneira.

INTRODUÇÃO

Dentro da iniciativa do PIBID e com o acompanhamento semanal dos bolsistas é possível aplicar e analisar e rever metodologias de ensino. A interdisciplinaridade na educação é de grande importância, pois, como diz Tavares (2008) ela abre o caminho de professores na busca conjunta de transformações significativas na medida em que propõem inovações em suas práticas, e, como visto

[1] Bolsista do Programa de Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID)
[2] Bolsista do Programa de Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID)
[3] Bolsista do Programa de Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID)

na execução da atividade descrita neste relatório, propõe um momento os alunos podem perceber relações entre disciplinas diferentes.

Segundo Nílson José Machado, temos que:

> “Já há algum tempo, no entanto, interdisciplinaridade tem sido uma palavra-chave na discussão da forma de organização do trabalho escolar ou acadêmico. (…) parece cada vez mais difícil o enquadramento de fenômenos que ocorrem fora da escola no âmbito de uma única disciplina. Hoje, a Física e a Química esmiúçam a estrutura da matéria, a entropia é um conceito fundamental na Termodinâmica, na Biologia e na Matemática da Comunicação, a Língua e a Matemática entrelaçam-se nos jornais diários, (…), para citar apenas alguns exemplos. Em consequência, a ideia de interdisciplinaridade tende a transformar-se em bandeira aglutinadora na busca de uma visão sintética, de uma reconstrução da unidade perdida, da interação e da complementariedade nas ações”. (MACHADO, 2016, p. 24)

A partir disso, temos a clara ideia de que a interdisciplinaridade hoje em dia é essencial nas escolas de Ensino Básico, por isso a ideia de encontrar uma atividade para aplicar durante o PIBID.

DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

A ideia da atividade surgiu em conjunto com a professora-supervisora, foi decidido que seria aplicado uma atividade em forma de oficina sobre os trabalhos do artista gráfico Maurits Cornelis Escher e sua relação com a geometria e simetria, assim também realizando um trabalho interdisciplinar entre as disciplinas de Matemática e Artes.

Para a aplicação desta atividade, foi necessário explicar para os estudantes que Escher foi um artista gráfico holandês reconhecido no século XX pelas suas obras de ilusão de ótica. Sendo assim, a partir do conhecimento de que o artista utilizava de recursos matemáticos para realizar suas obras, os estudantes foram levados para sala de artes e realizaram suas próprias obras, envolvendo seus conhecimentos matemáticos a respeito da Geometria – rotação, translação, reflexão, transferência de área e a criatividade artística

Foram necessários rolos vazios de papel higiênico para o corte do molde, folhas A4, tesoura, régua e materiais para pintura. Com o molde pronto, o mesmo foi colocado em cima do papel A4 para poder realizar o contorno com o lápis e, assim, acontecer a utilização da Geometria na atividade. O contorno foi repetido por todo o papel, de acordo com a imaginação de cada um. O trabalho logo era finalizado com a pintura dos desenhos e acréscimo de detalhes que respeitassem os conceitos geométricos e simetria.

Os alunos tiverem um ótimo desempenho no entendimento da atividade e na sua realização, e foi observado uma mudança no clima da sala, que ficou animada durante a execução. Muitos procuraram comparar seus trabalhos com o de seus colegas e tentar entender como certas formas haviam sido obtidas durante a etapa do contorno no papel. Essa interação curiosa referente à temática da aula as vezes é mais difícil de ocorrer quando o professor está à frente dos alunos, com um conteúdo mais abstrato, como muitos da matemática, e os alunos precisam copiar e realizar exercícios.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a realização da atividade, pode-se perceber que a disciplina vista em sala de aula pode ser trabalhada de diferentes formas na prática e em como o conhecimento adquirido é acumulativo e enriquecedor. Artes é a disciplina onde muitas vezes o aluno poderá explorar sua criatividade e conhecer elementos artísticos, e matemática exige maior concentração mental do aluno para a análise e entendimento de conceitos de números, equações, gráficos, entre outros, e foi muito interessante ver a interdisciplinaridade conectando essas duas disciplinas.

Também foi possível observar a sustentabilidade envolvida na atividade com os rolos de papel higiênico, que após a atividade foram guardados como material de artes, para posteriormente ser utilizado por outros estudantes em maquetes e outros projetos.

Projetos e atividades como esta enriquecem os bolsistas, bem como os estudantes do Ensino Básico, de conhecimento. Ajuda-os a entender melhor quais são as melhores maneiras para trabalhar com o Ensino Fundamental II e com o Ensino Médio a partir das diferentes realidades encontradas em uma escola. Assim, o objetivo do PIBID é alcançado pelos bolsistas: Iniciar à docência de forma plena e diferente, obtendo aprendizado a partir do conhecimento já obtido pelo professor-supervisor, a partir do que é visto no curso de licenciatura e também pelo o que é vivenciado semanalmente na escola básica.

REFERÊNCIAS

CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. **Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID***.* Disponível em: <http://www.capes.gov.br/educacao-basica/capespibid>. Acesso em: 28/05/2019.

MACHADO, Bruno. **Quem foi M.S. Escher?**. 2017. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/quem-foi-m-c-escher/>. Acesso em: 31/05/2019.

MACHADO, Nílson José. Interdisciplinaridade e Matemática. **Pro-Posições**. Campinas, v.4, n.1, p.24-26, mar. 1993. Disponível em: www.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/1756/10-artigos-machadonj.pdf. Acesso em: 31/05/2019.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro (2012). **A Matemática através da Arte de M. C. Escher.** Disponível em: < http://www.ipv.pt/millenium/Millenium42/4.pdf >. Acesso em: 31/05/2019.

TAVARES, Dirce Encarnacion. A interdisciplinaridade na contemporaneidade - qual o sentido?. In: FAZENDA, Ivani (Org.). **O Que é interdisciplinaridade?** São Paulo: Cortez, pg. 135-146, 2008

Brincando de Matemático: a experiência do PET Matemática na divulgação do conhecimento científico

Danielly Araujo Pereira dos Santos, Gabriel Alves de Lima, Matheus Daniel Galvão de Melo, Matheus Kinceski Pires
Matemática - UFPR
petmatufpr@gmail.com

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
zeca77@gmail.com

Palavras-chave: Brincando de Matemático, Extensão universitária, Divulgação científica.

Resumo:

O “Brincando de Matemático” é uma das atividades de extensão desenvolvidas pelo PET-Matemática desde 2005. O objetivo do evento é desenvolver junto aos alunos um tema que possa enriquecer sua formação matemática e ao mesmo tempo propiciar-lhes um contato direto com o ambiente acadêmico.

Atualmente está em sua décima quinta edição e o tema escolhido para esse ano foi ”O fantástico mundo das curvas”, o qual tinha como objetivo desenvolver com os alunos o conhecimento básico e suficiente para entender o funcionamento de curvas, esboçá-las e explorar suas propriedades matemáticas.

São ofertadas um conjunto de aulas e, ao final de cada dia, são realizadas brincadeiras que fixam o conteúdo matemático aprendido. Para não prejudicar o período letivo dos estudantes, o evento ocorre durante quatro dias no mês de julho (férias escolares).

As aulas são elaboradas pelos petianos, bem como o material didático utilizado na atividade, o qual consiste de apostila (ver Figura [1]) e outros equipamentos necessários para o desenvolvimento do tema. O conteúdo escrito passa por uma cuidadosa revisão de uma equipe formada por alunos do PET e pelo tutor do grupo. Também é oferecido um lanche aos alunos, visando proporcionar aos participantes uma maior convivência dentro do espaço da Universidade.

Figura 1: Material produzido pelos alunos do PET-Matemática

O “Brincando de Matemático” constitui-se em uma experiência especial tanto para o PET quanto para os alunos atendidos, já que promove um ambiente adequado para o desenvolvimento daqueles que apresentam um interesse maior pela matéria, e ao mesmo tempo divulga ideias matemáticas sofisticadas em uma linguagem mais acessível. Esta atividade aumentou a visibilidade do curso de Matemática entre os alunos dos estabelecimentos de ensino de Curitiba e Região Metropolitana.

As realizações do evento ano após ano notavelmente mostram resultados. Ao final do último dia, os alunos são incentivados à responder um feedback sobre as aulas e brincadeiras ministradas pelo PET. A despeito de detalhes técnicos, os comentários se mostram bastante positivos, um indicativo do sucesso do evento. Além disso, nota-se o crescente ingresso de alunos no curso de matemática motivados pelos eventos do PET, em especial o Brincando de Matemático, inclusive se nota o ingresso de alguns destes alunos no PET Matemática.

Após a realização deste evento, pudemos notar um sensível aumento na procura pelo curso de Matemática no vestibular UFPR. Sendo assim, percebemos que estas são atividades que incentivam o estudante dos últimos anos do ensino básico a conhecer melhor o que a UFPR tem a oferecer e, portanto, ajudam a Universidade a cumprir melhor seu papel de difusora de conhecimento.

Referências:

[1] **O fantástico mundo das curvas** - XV Brincando de Matemático. PET-Matemática, 2019. Acessado em:
⟨ http://www.petmatematica.ufpr.br/arquivos/15brincando.pdf ⟩.

POTI e OPRM: Contribuindo para a difusão do conhecimento matemático para alunos de ensino fundamental e médio

Bianca E. Wiltuschnig *, Bruno P. Oleiro *, Danielly A. P. Santos *, Gabriel A. Lima *, Iann T. Singo *, Isac M. Michelon *, João A. F. L. Thomé *, João V. Silva *, Larissa M. Sydorak * Leonardo G. Fischer *, Luana Bankersen *, Lucas C. Port *, Marcel T. A. Souza *, Marina S. Vieira *, Mateus Balotin *, Matheus D. G. Melo *, Matheus K. Pires *, Matheus M. Santos *, Monique B. Fragozo *, Priscilla P. Souza *, Talia C. Schulz *, Victor G. P. C. Zerger *, Vinicius M. P. Santos *
Matemática - UFPR
petmatufpr@gmail.com

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
eidam@ufpr.br

Palavras-chave: Matemática, Olimpíadas, Treinamento.

Resumo:
Com o intuito de oferecer um treinamento de qualidade para os estudantes de Curitiba e Região Metropolitana que desejam participar de Olimpíadas Matemáticas em geral, alguns professores do Departamento de Matemática da UFPR iniciaram em 2016 um Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI), nos mesmos moldes de outros polos que já funcionam em outras localidades brasileiras. Esta iniciativa é apoiada pela SBM – Sociedade Brasileira de Matemática e pelo IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Iremos retratar a experiência do PET-Matemática no POTI, cujas aulas ocorrem aos sábados pela manhã. Os alunos são divididos em 3 níveis, Nível 1: 6º e 7º anos, Nível 2: 8º e 9º anos e Nível 3: Ensino Médio. O material didático é fornecido pelo IMPA e pela OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática e pode ser acessado via internet livremente. Qualquer aluno da rede pública ou privada pode participar do POTI, sendo que as inscrições são online. Este ano o número de alunos inscritos foi aproximadamente de 249. O material a ser trabalhado é dividido em disciplinas adequadas em cada nível e o polo conta com a participação de professores voluntários, entre eles, alunos do PET-Matemática, alunos e ex-alunos do Curso de Matemática

*Integrantes do Programa PET-Matemática

(atuais professores de Ensino Fundamental). Esta atividade conta horas formativas para todos os estudantes de graduação envolvidos. Os alunos que recebem o treinamento participam periodicamente de simulados a fim de verificar seus conhecimentos e mensurar de maneira mais efetiva o conhecimento matemático que estão retendo. A OPRM - Olimpíada Paranaense de Matemática é uma competição matemática organizada e concebida por docentes do Departamento de Matemática e visa incentivar e estimular os estudantes paranaenses ao estudo da Matemática através de problemas desafiadores e instigantes, promovendo uma integração bastante saudável da UFPR (através do Departamento de Matemática) com a Escola Básica. O POTI impacta de maneira muito profunda a dinâmica da participação dos estudantes na OPRM, uma vez que permite que o conteúdo explorado neste tipo de competição fique mais próximo do cotidiano do estudante. A OPRM teve sua 1ª edição em 2016 e este ano está na sua 4ª edição. Também neste ano a prova da 1º fase da OPRM bateu o recorde de participantes, tendo aproximadamente 42000 alunos inscritos de todo o Estado do Paraná, sendo que desses 1160 foram selecionados para a 2ª fase.

Estes projetos são coordenados pelos professores Hudson Lima, Diego Otero e José Carlos Eidam, do DMAT-UFPR.

TOPMAT: Programa de Formação em Matemática Olímpica

Bianca E. Wiltuschnig*, Bruno P. Oleiro*, Gabriel A. Lima*, João A. F. L. Thomé*, Letícia F. Gomes*, Marcel T. A. Souza*, Priscilla P. Souza*, Raquel A. Aita *
Matemática e Engenharia Civil - UFPR
petmatufpr@gmail.com

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
zeca77@gmail.com

Palavras-chave: matemática, olimpíadas, treinamento.

Resumo:

A Matemática, como diversos outros ramos do conhecimento, possui várias portas de entrada. Alguns se interessam por sua aplicabilidade no dia a dia, outros pelos exercícios de raciocínio lógico, e há também aqueles cujo interesse principal é puramente enfrentar desafios. Para os dois últimos, existem as olimpíadas de matemática.

Internacionalmente o Brasil tem uma grande tradição olímpica e mesmo as versões regionais destas competições descobrem talentos escondidos em sala desom o objetivo de regionalizar a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBMEP e OBM), olhando com mais minúcia para o desempenho do aluno do Paraná. Ela vivencia em seu curto tempo de vida um aumento considerável de participantes. Em 2016 o número de inscritos foi de 1212, sendo que este quase quadruplicou em 2017 (4484 alunos). Comparando-se então ao número de alunos deste ano, que é 40 vezes superior ao de 2016 (mais de 42 mil estudantes), é mais que evidente o aumento de sua procura, a medida que os jovens têm um contato maior com a matemática olímpica. Contrariamente à esta tendência do aumento de inscrições, o ensino da matemática encontra-se inalterado nos últimos anos. Isto impede uma seleção justa dos participantes, já que muitos nunca tiveram contato com as técnicas usualmente utilizadas em olimpíadas.

Devido a esta assincronia existente entre o ensino tradicional e o ensino olímpico, o Departamento de Matemática da UFPR (DMAT), em parceria com a Secretaria de Educação do Estado do Paraná (SEED-PR), criou o TOPMAT - Programa de Formação em Matemática Olímpica. Este programa visa melhorar o desempenho dos alunos nas

*Bolsistas do TOPMAT, financeado com recursos da PROGRAD-UFPR.

olímpiadas, principalmente dos oriundos de escolas públicas. Objetivando o maior alcance possível no Estado, a sua primeira atividade foi a realização de uma capacitação presencial dos professores de matemática, que ocorreu simultaneamente em cinco cidades paranaenses - Curitiba, Cascavel, Londrina, Maringá e Ponta Grossa - no dia 24 de maio de 2019.

Figura 1: Treinamento em Curitiba - Fonte: do Autor

Com a ajuda do Núcleo Regional de Educação sediado em cada uma das cidades, foram convidados os professores de matemática dos colégios sob cada juridiscrição. Os alunos da UFPR envolvidos no projeto foram, em sua maioria, professores do Polo UFPR dos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI). Um dos grandes norteadores do projeto foi proporcionar a divulgação das experiências acumuladas nos últimos 4 anos de ensino da matemática olímpica no polo do POTI sediado na UFPR-Centro Politécnico. Assim, o objetivo foi mostrar a estes a dinâmica de uma aula típica do POTI. Diferente do ensino padrão, o treinamento olímpico foca em aperfeiçoar o uso da teoria de maneiras diferentes da usual. Então, a instrução é orientada à resolução de problemas retirados de provas antigas.

Para tal, os bolsistas do TOPMAT desenvolveram um material de apoio (Figura 2) rico em exercícios e exemplos, dividido em 4 disciplinas (Álgebra, Teoria de Números, Combinatória e Geometria), e este foi utilizado como texto-base em todas as cidades. Assim, a capacitação unificou-se no entorno dos mesmos exercícios, compondo ao fim 8 horas divididas igualmente entre cada uma das disciplinas.

A atividade foi muito bem-vinda pelos professores, que se mostraram solicitos em conhecer como são organizadas as aulas e quais são os problemas mais comuns no ensino. Em igual escala, também retornaram suas próprias experiências, sucedidas ou não, de se criar um grupo de estudos olímpicos. Isto proporcionou um igual aprendizado para ambas as partes, orientada ao objetivo final de preparar melhor os alunos para uma matemática diferente daquela ensinada no dia a dia.

Figura 2: Material de Apoio - Fonte: do Autor

Referências:

FEITOSA, S. Aula 5, Nível 2, Curso de Teoria de Números. **Congruências I**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

HOLANDA, B. Aula 7, Nível 2, Curso de Combinatória. **Princípio da Casa dos Pombos I**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

MENDES, M. Aula 2, Nível 2, Curso de Álgebra. **Equações e Sistemas**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

PINHEIRO, R. Aula 2, Nível 2, Curso de Geometria. **Congruência de Triângulos**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

Gente como a gente faz matemática

Rafael de Castro Bonfim[1] e Thalita Fernanda Tavares da Silva[1]
Licenciatura em Matemática – UTFPR
bonfimr@alunos.utfpr.edu.br thalitasilva@alunos.utfpr.edu.br

Profª. Dra. Maria Lucia Panossian
Departamento de Matemática – UTFPR
mlpanossian@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Classroom, história da matemática, grupos minoritários .

Resumo:
Ao acompanhar as aulas de matemática de três turmas de primeiro ano de ensino médio do Colégio Estadual do Paraná, vimos condições ideias para iniciar um trabalho junto com os alunos sobre a história de pessoas que contribuíram para o desenvolvimento da matemática. O trabalho foi concebido de forma que conciliasse o uso da tecnologia e a história da matemática, tendo como objetivo a criação de salas virtuais, para que houvesse uma aproximação dos alunos com a matemática e sua história através do tempo, reconhecendo nomes de matemáticas(os), que não tiveram tanta repercussão até os dias de hoje. As salas do ambiente virtual denominado Classroom, veio como facilitador na comunicação e orientação nas buscas dos alunos por história de pessoas pertencentes a grupos minoritários, que segundo Séguin e Rifiotis apud Carmo(2016) entende-se que são grupos que sofrem discriminação e sobre algumas condições que visam controle e homogeneidade podem resultar na perda de sua identidade. Sempre considerando que o grupo minoritário é identificado em relação ao meio que se encontra, levando em conta a cultura, a língua, as tradições, a religião, entre outros.
Ao relacionar uso da tecnologia para pesquisas de conteúdo, buscamos em Gomes(2002) suporte teórico, afirmando que "A tecnologia aliada a aprendizagem colaborativa pode potencializar as situações em que professores e alunos pesquisem, discutam e construam individualmente e coletivamente seus conhecimentos" (GOMES et al, 2002).
O fato de trabalharmos com grupos minoritários foi um critério fundamental para articular as discussões com alunos sobre as dificuldades que importantes pessoas tiveram em sua época para contribuir com o desenvolvimento científico.
Em um prazo de a cada duas semanas foi escolhida uma pessoa para apresentar aos alunos sua história e sua contribuição para a matemática. Era então organizado um material em forma de slides contendo a informações pessoais, profissionais, imagens, curiosidades e sugestão de outros materiais como filmes, livros, sites etc.
Ao final dos slides havia algumas questões para que os alunos respondessem e assim iniciássemos um debate na sala virtual.

[1] Bolsista do Programa de Iniciação à Docência (PIBID).

Nos primeiros dias a discussão em torno da ausência e a não visibilidade da mulher na história da matemática foi levantado para que os estudantes buscassem entender um pouco não só da problemática social, mas também localizassem na história mulheres com grandes feitos. Para Moutinho, "a família, a escola, a televisão, tudo que conforma a nossa sociedade, passa a ideia de que as mulheres não estão aptas para a matemática ou não têm compleição para as ciências que exigem raciocínio lógico mais forte" (MOUTINHO, 2014, p. 1).
Outro tema de discussão apresentado para os alunos é a temática racial, a não visibilidade de matemáticas e matemáticos negros, comparados a questões sociais possibilitou aos estudantes buscarem informações, nomes e curiosidades sobre outras culturas. Os grupos minoritários que até o momento não eram trabalhados na disciplina de matemática, agora passam a se adequar ao conteúdo tendo a história da matemática como metodologia
O projeto ainda está sendo executado, com previsão de se trabalhar mais questões sobre grupos minoritários, esperando que haja uma conscientização e assim gerar um vínculo maior dos alunos com a matemática.

Referências:

CARMO, Cláudio Márcio do. Grupos minoritários, grupos vulneráveis e o problema da (in)tolerân-cia: uma relação linguístico-discursiva e ideológica entre o desrespeito e a manifestação do ódio no contexto brasileiro. **Revista do Instituto de Estudos Brasileiros**, n. 64, p. 201-223, ago. 2016. Brasil
GOMES, Péricles Varella et al. Aprendizagem Colaborativa em ambientes virtuais de aprendizagem: a experiência inédita da PUC-PR. **Revista Diálogo Educacional**, v. 3, no 6, p. 11-27, maio/agosto, 2002. São Paulo
MIGUEL, A.; MIORIN, M. A. **A História na educação matemática: propostas e desafio**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004
MOUTINHO, Sofia. Participação desigual. **Instituto Ciência Hoje** – Disponível em:<http://cienciahoje.org.br/acervo/participacao-desigual/>. Acesso em: 22 set 2019
SCUISATO, Dione Aparecida Sanches. **Mídias na educação: uma proposta de potencialização e dinamização na prática docente com a utilização de ambientes virtuais de aprendizagem coletiva e colaborativa.** Disponível em:<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2500-8.pdf> Acesso em 27 de Julho de 2019

III MATEMATIZA

Luiz Felipe Vieira Haragushiku[1] e *Stefani Vicoski Marques*[2]
Licenciatura em Matemática – UFPR
luizfelipevh@gmail.com e svicoski@gmail.com

Prof. Elisângela Campos (Orientador)
Departamento de Matemática – UFPR
eliscamposmat@gmail.com

Palavras-chave: ensino aprendizagem, experiências matemáticas, fractais.

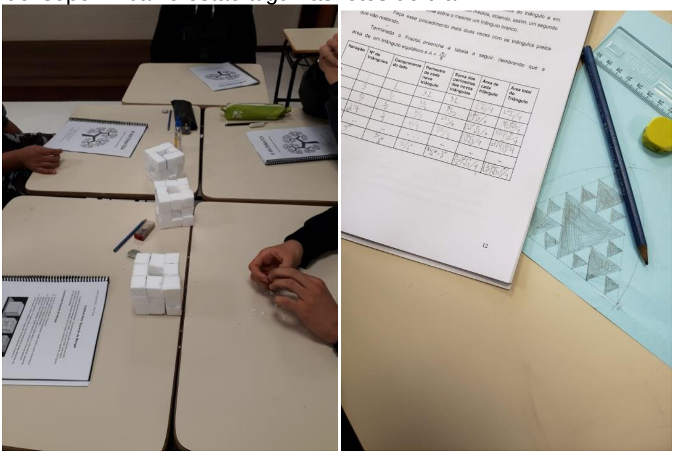
Resumo:

A Matemática é vista, em geral, como uma disciplina rígida e cheia de regras pelos alunos da escola. Acredita-se que nela não há espaço para a criatividade, experimentação e imaginação. No entanto existem vários conceitos e resultados matemáticos que podem ser tratados de forma concreta por meio de sua representação, como por exemplo, a representação um triângulo e a área de um quadrado podem ajudar os alunos a entenderem o Teorema de Pitágoras utilizando um quebra-cabeça. A ideia desse projeto é mostrar para alunos da escola básica, para professores e para licenciandos que a matemática pode ser divertida, que podemos dar significado a suas definições. Por isso o Projeto de Extensão MATEMATIZA tem por objetivo levar à experiências matemáticas por meio de atividades investigativas, jogos, materiais concretos ou objetos de aprendizagem virtuais. Estas atividades aconteceram em minicursos, nas oficinas e nas experiências no Laboratório de Ensino de Matemática para estudantes do ensino básico, para estudantes do curso de Matemática e para professores de Matemática. O primeiro minicurso ocorreu nos dias 18 e 19 de julho no campus Centro Politécnico e teve como tema a Geometria Fractal, o público alvo do evento eram alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental, mas na prática aceitamos também alunos do Ensino Médio. A Geometria Fractal, que pode ser considerada como a geometria da natureza, foi escolhida justamente por sua capacidade de modelar alguns elementos da natureza, como, por exemplo, montanhas, nuvens e o pulmão. A escolha desse tema se deu, também, pois é possível trabalhar os fractais geométricos com conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental, como área e perímetro de figuras planas, contagem, progressões e outros. No entanto este tema não é um assunto da matemática escolar, convergindo diretamente com a ideia de mudar a visão que os alunos do Ensino Básico têm sobre a Matemática. Para esse minicurso elaboramos uma apostila que foi baseada em uma atividade realizada pelo PIBID Matemática da UFPR.

O mini curso aconteceu em duas tardes, no primeiro dia com o intuito de provocar a imaginação dos alunos, propusemos um dos problemas que levou Benoit Mandelbrot a desenvolver a definição de Fractal, passada a definição, apresentamos exemplos encontrados na natureza e construímos com os alunos a Poeira de Cantor e o

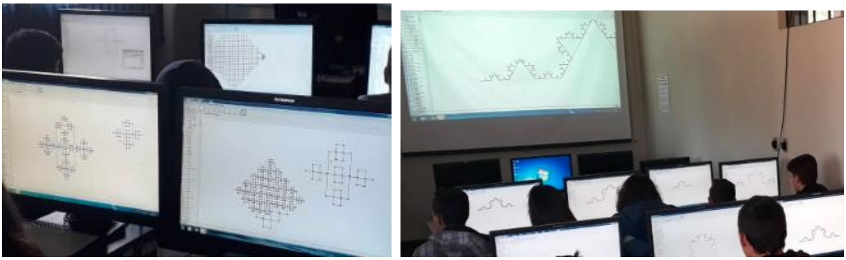
[1] Bolsista do Programa de Bolsa de Extensão ().
[2] Bolsista do Programa de Bolsa de Extensão ().

Triângulo de Sierpinski, utilizando a régua e compasso, e a Esponja de Menger com cubinhos de isopor. Abaixo estão algumas fotos do dia.



(Imagem I- Fonte: o Autor)

Já no segundo dia construímos a curva de Peano e a curva de Koch utilizando o software GeoGebra e trabalhamos o conceito de Dimensão Fractal, relembrando potenciação e introduzindo logaritmos, um conteúdo que só seria contemplado no Ensino Médio.



(Imagem II- Fonte: o Autor)

No início desse semestre aplicamos essa mesma atividade utilizando o software GeoGebra na disciplina de Fractais ofertada pela professora Elizabeth W. para alunos da graduação, o intuito fui mostrar a nossos colegas a construção de alguns Fractais e maneiras de utilizá-los em sala de aula.

O MATEMATIZA complementa a formação dos estudantes de Licenciatura em Matemática, proporcionando um ambiente de ensino diferenciado, onde os alunos estão ali, pois aceitam nosso convite para aprender e não para receber uma nota. Os recursos utilizados devem ir além do quadro e giz, nos incentivando a buscar outras opções de ensino que vão além da sala de aula.

Outro objetivo importante do projeto é a divulgação das atividades desenvolvidas, para isso criamos uma página no *Facebook* : MATEMATIZA UFPR. A forma como podemos trabalhar com a matemática tem muito a ver com o sentimento gerado em relação a ela. Acreditamos que mostrando para a comunidade que podemos dar significado e aplicabilidade aos conceitos matemáticos estamos contribuindo para a formação integral do cidadão.

Para o futuro estamos planejando um minicurso para professores e alunos da graduação sobre Investigação Matemática.

Referências:

SERRA, C. P.; KARAS, E. W. **Fractais gerados por Sistemas Dinâmicos Complexos**. 1.ed. Curitiba: Editora Universitária Champagnat,1997.

CAMPOS, E.; HARAGUSHIKU, L. F. V.; MARQUES, S. V. **Fractais a Geometria da Natureza.** Minicurso 8-9 de jul. de 2019. Notas de aula.

Maratona Tecnológica OBMEP: Uma Praxis Pedagógica com as Tecnologias Digitais

Tatiana Maciel Chenisz[1]
Licenciatura em Matemática – PUCPR
tatianchenisz@gmail.com

Prof. Cristian Schmidt (Orientador)
Departamento de Matemática – PUCPR
cristian.schmidt@pucpr.br

Palavras-chave: Matemática, Tecnologia, OBMEP.

Resumo:

As tecnologias digitais se fazem cada vez mais presentes no cotidiano da sociedade afeiçoando novos hábitos, formas de aprender e obter informações. Nesta perspectiva, o presente trabalho aborda a utilização de novas tecnologias na educação, partindo do pressuposto que sua presença é inerente ao mundo contemporâneo, pois "a escola, hoje, para dialogar com a sociedade da informação, precisa ser redesenhada e incluir a linguagem audiovisual e digital em seu espaço" ABREU (2001, p. 2).

A Maratona Tecnológica OBMEP foi idealizada pela Assessoria Pedagógica de Matemática da Editora Positivo, como parte integradora das atividades de estágio propostas pela instituição. O tema foi escolhido por conta de relatos mencionados pelos assessores de Matemática, que notam determinada resistência por parte dos professores que atuam em escolas conveniadas à Editora (Sistema de Ensino Aprende Brasil, Sistema Positivo de Ensino e Solução Educacional Conquista) em relação às novas tecnologias digitais, que são vistas por grande parte destes profissionais como um obstáculo, levando em consideração que alguns dos materiais didáticos fornecidos pela Editora integram os objetos educacionais digitais como complemento de estudo, sejam eles presentes por meio de QR Codes ou Realidade Aumentada.

Ao longo do desenvolvimento do projeto, teve-se como objetivo apresentar as possibilidades do uso das novas tecnologias digitais com o propósito de desenvolver

[1] Estagiária da Assessoria Pedagógica de Matemática da Editora Positivo.

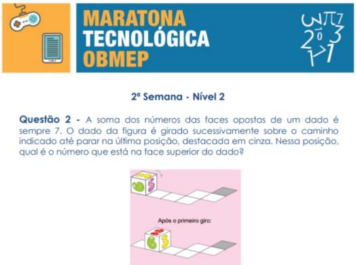
habilidades necessárias e suficientes para a compreensão e resolução das questões que compõe as provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP*)* e contou-se com a participação de 96 escolas inscritas. Como concepção inicial para o desenvolvimento das atividades, partiu-se da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), tendo em vista que uma de suas competências visa o desenvolvimento tecnológico do estudante, o que fica visível no momento que este documento normativo concebe que é necessário

> *(...) compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva". (BRASIL, 2017, p. 10)*

Na tentativa do desenvolvimento tecnológico dos estudantes, foram propostas ao longo do projeto questões com QR Code, em que o estudante, ao realizar a leitura, era direcionado para um recurso digital, e por meio deste, era possível manusear, visualizar e formar conjecturas matemáticas que o possibilitasse resolver as questões propostas pela OBMEP de forma mais atrativa. Segundo Borba e Villarrel (2005), isso se deve pelo fato de que ocorre uma interação estudante-tecnologia, possibilitando assim a construção do conhecimento matemático. Assim, acredita-se que o papel do professor é viabilizar um contexto no qual as tecnologias digitais sejam inseridas com o propósito de democratizar e socializar as ferramentas digitais, bem como oportunizar a construção de conhecimentos matemáticos e sua aplicabilidade. Neste viés, *Mizukami et al. (2003, p. 14), expressam que:*

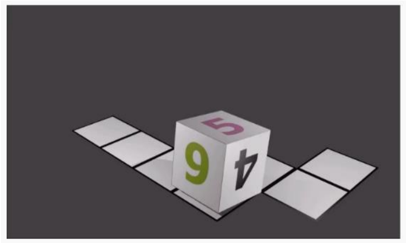
> *No Cotidiano da sala de aula o professor defronta-se com múltiplas situações divergentes, com as quais não aprende a lidar durante seu curso de formação. Essas situações, estão além dos referênciais teóricos e técnicos e, por isso, o professor não consegue apoio direto nos conhecimentos adquiridos no curso de formação para lidar com elas.*

Figura 1: Questão da OBMEP



Fonte: OBMEP, Nível 2, Fase 1, 2016.

Figura 2: Resolução da questão da OBMEP



Fonte: Vídeo no Youtube[2].

A partir da análise das devolutivas enviadas pelos professores, notamos o quão proveitoso pode ser o uso dos meios tecnológicos na educação Matemática, e além disso percebemos que a proposta apresentada nesta pesquisa pode ser representada como um importante instrumento de mediação. Logo, pudemos concluir que a assimilação do conteúdo por meio dos estudantes tornou-se mais prática, uma vez que o sentido, a objetivação e o foco na aplicação das situações propostas fizeram do aprendizado algo dinâmico e presente no cotidiano dos alunos. Portanto, chega-se à conclusão de que a fuga dos métodos tradicionais de ensino permite uma contextualização mais precisa e ponderada dessa área de estudo.

Referências:

ABREU, L. C. Da voz à tela: a nova linguagem docente. In: XXIV Congresso Brasileiro da Comunicação, p. 1-12. Anais... Campo Grande-MS, 2001.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

MIZUKAMI, M.G.N.; REALI, A.M.M.R., REYES, C.R., MARTUCCI, E.M., LIMA, E.F., TANCREDI, R.M.S., MELLO, R.R. Escola e aprendizagem da docência: processos de investigação e formação. São Carlos: EdUFSCar, 2003.

---

[2] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=maI32eaqA4Q>. Acesso em: 09 set. 2019.

Uma aula de investigação sobre sólidos geométricos

Thais Spannenberg Machado dos Passos[1]
Licenciatura em Matemática – UFPR
tatasmp10@gmail.com

Prof. Anderson Roges Teixeira Góes (Orientador)
Departamento de Expressão Gráfica – UFPR
artgoes@ufpr.br

Prof. Giancarlo de França Aguiar (Supervisor)
Departamento de Matemática – IFPR
giancarlo.aguiar@ifpr.edu.br

Prof. Celso Luiz Buiar (Supervisor)
Departamento de Matemática – IFPR
buiar@ifpr.edu.br

Palavras-chave: Matemática, Investigações matemáticas, Formas geométricas.

Resumo:

No início de 2019, o professor orientador do grupo de estudantes do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) de Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR) que exercem atividade no Instituto Federal do Paraná (IFPR) propôs a leitura do livro “Investigações Matemáticas na sala de aula”, de João Pedro da Ponte, Joana Brocado e Hélia Oliveira. Após a leitura, os estudantes deveriam formular aulas com base na metodologia estudada e aplicá-las às turmas acompanhadas no IFPR. A estudante envolvida no desenvolvimento da atividade relatada por este texto leu, também, os textos “Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas Utilizando o GeoGebra”, de Daniele Cristina Gonçalves e Frederico da Silva Reis e “O trabalho do professor numa aula de investigação matemática”, de João Pedro da Ponte, Hélia Oliveira, Lina Bruheira e José Manuel Varandas para adquirir mais conhecimentos para a idealização dessa atividade.

Essa prática docente foi desenvolvida e aplicada àturma do 2º ano do Curso Técnico Integrado de Mecânica do IFPR, Campus Curitiba. Foi decidido, após algumas conversas com o professor responsável pela disciplina de Matemática da turma, que, visando o cumprimento do planejamento já feito por ele, o momento mais oportuno para a aplicação de uma atividade investigativa seria junto ao conteúdo de geometria plana e espacial. Então, concluiu-se que a aula seria voltada para os sólidos geométricos que podem ser obtidos a partir de circunferências e círculos.

Tendo o conteúdo e a metodologia estabelecidos, a bolsista ID iniciou o planejamento da aula e a preparação do material necessário para sua realização, tendo a supervisão do coordenador do projeto, do supervisor da escola e do professor regente da turma. A ideia inicial foi de fazer a construção de sólidos

[1] Bolsista do Programa PIBID.

geométricos que podem ser criados ao se sobreporem círculos. Para ter novas ideias e saber o que poderia ser utilizado durante a aula, a bolsista ID visitou a sala dos professores de matemática e física do IFPR e a sala de materiais que o PIBID possui na UFPR. Foi, então, decidido que seriam utilizados três dos sólidos geométricos acrílicos disponíveis: um cilindro que, por ter altura e diâmetro iguais, tem uma esfera circunscrita em seu interior; e um cone e um cilindro de mesma altura.

Por acreditar que os estudantes não se interessariam pela investigação, foi formulada, pela bolsista ID, uma lista de perguntas composta por questionamentos, textos norteadores e imagens que visavam estimular e instigar os estudantes durante a atividade. A lista de perguntas foi composta por cinco partes: perguntas iniciais, a respeito de círculos e circunferências; pensando no plano R^3; montando os sólidos com EVA; perguntas finais, que levavam o estudante a encontrar equações gerais para calcular as áreas e volumes dos sólidos encontrados; e pergunta extra, que instigava os estudantes a encontrarem alguma relação entre os volumes dos dois sólidos. Além disso, a prática docente foi pensada em quatro momentos: a explicação inicial; a resolução dos exercícios e a construção dos sólidos; a discussão sobre os resultados obtidos; e a apresentação dos sólidos de acrílico.

Na aula anterior à aplicação da investigação, foi solicitado aos alunos que trouxessem alguns dos materiais que seriam utilizados durante a atividade, como tesouras e cola. Na semana seguinte, no início da aula, foi realizada uma breve explicação do processo pelo qual a bolsista havia passado, ou seja, a participação no PIBID e o porquê daquela aula diferenciada. Para a aplicação da prática, os estudantes foram divididos em grupos de cinco ou seis participantes, cada um desses grupos escolheu uma das folhas de EVA colorido (um tipo de borracha comumente utilizada em escolas) disponível e recebeu duas folhas de questões (uma para ser respondida e entregue e uma auxiliar). Depois do alvoroço causado pela divisão dos grupos e da distribuição do material, os estudantes tiveram uma aula e meia para desenvolverem os exercícios propostos e construírem os sólidos de EVA.

Como o esperado, alguns grupos tiveram mais dificuldades que outros, mas, aparentemente, durante a resolução das questões, não foram encontrados grandes obstáculos. Quando todas as equipes terminaram, foi dado início a discussão das questões desenvolvidas. Foi perguntado se algum dos grupos tinha o interesse de contar o que havia encontrado, mas não houve manifestações. Então, a bolsista ID levantou algumas questões sobre os sólidos que os estudantes deveriam ter encontrado como, por exemplo, se haviam conseguido construí-los com o EVA e como o fizeram. Quando a abordagem chegou às perguntas mais algébricas, sobre as áreas e volumes dos sólidos, um dos estudantes se sentiu à vontade e foi até o quadro demonstrar para os colegas a maneira pela qual chegou às respostas.

Ao final da aula, foi solicitado aos grupos que deixassem as folhas de resolução e os sólidos construídos em cima da mesa do professor. Todos entregaram as atividades escritas para a correção, mas, das seis equipes, apenas quatro entregaram os sólidos confeccionados.

A correção das atividades foi feita, pela bolsista ID, que a iniciou de maneira livre, analisando se o que havia sido respondido estava certo ou errado. No entanto, foi entendido que essa abordagem não daria certo, era necessário considerar outros aspectos apresentados pelos grupos. Por esse motivo, foram aplicados dez critérios de correção:

1. Diferenciou corretamente o círculo e a circunferência?

2. Apresentou a relação dos pontos de uma circunferência?
3. Utilizou as fórmulas corretamente?
4. Ambos os sólidos foram identificados?
5. Os dois sólidos foram construídos?
6. Os sólidos montados são identificáveis?
7. Os sólidos foram montados com circunferências?
8. Foi identificada a diferença entre as circunferências utilizadas nos sólidos?
9. Foram construídas suposições/linhas de pensamento sobre as áreas e volumes?
10. Foram obtidas fórmulas para calcular as áreas e os volumes de cilindros e cones quaisquer?

Para cada um deles foi atribuído um valor e, com isso, dois grupos se destacaram ficando com notas próximas a totalidade. Durante a entrega das correções, pode-se notar que, por ter sido uma atividade diferenciada, alguns alunos conhecidos por seu bom desempenho (sobretudo em aulas expositivas em que há a necessidade de memorizar fórmulas e algoritmos) acabaram com notas mais baixas. Esse tipo de caso e acontecimentos opostos a ele levaram os estudantes a perceberem que diferentes abordagens de uma mesma disciplina levam a resultados (em relação à nota e à compreensão da matéria) diferentes.

O objetivo do desenvolvimento e aplicação dessa aula era mostrar aos alunos participantes do PIBID que existem diversas maneiras de se ministrar aulas e que diferentes abordagens trazem diferentes resultados e requerem diferentes planejamentos. Após todo o processo, podemos refletir melhor sobre os fatores relacionados à vida docente. A bolsista ID relata: “Foi muito bom continuar acompanhando a turma, ouvir elogios sobre a aula e conseguir observar, durante a realização de exercícios posteriores sobre o assunto, que eles recordavam da atividade proposta ao usar as fórmulas das áreas e volumes do cilindro e do cone”.

Concluímos, então, que a aula poderia ter alguns de seus aspectos melhorados, mas, ao saber do entendimento do conteúdo trabalhado, do aproveitamento da atividade proposta e dos “feedbacks” positivos dos estudantes, a atividade foi entendida como algo de grande valia para o processo de ensino e aprendizagem de todas as partes envolvidas. Isso demonstra que o PIBID está fazendo seu papel de melhorar a qualidade da educação, mostrando aos futuros professores diferentes formas de trabalho na sala de aula.

Referências:

DA PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

GONÇALVES, Daniele Cristina; REIS, Frederico da Silva. Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas Utilizando o GeoGebra. 2012.

DA PONTE, João Pedro; OLIVEIRA, Hélia; BRUNHEIRA, Lina; VARANDAS, José Manuel. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências e Centro de Investigação em Educação.

A TORRE DE HANÓI PARA APROFUNDAR O RACIOCÍNIO LÓGICO MATEMÁTICO

Vanessa dos Santos
Licenciatura em Matemática – PUCPR
vaness.ds.santos@gmail.com

Prof. Eduardo Quadros da Silva (Orientador)
Departamento de Matemática – PUCPR
quadros.eduardo@gmail.com

Palavras-chave: Matemática, Torre de Hanói, PIBID.

Resumo

Na matemática o uso de metodologias ativas pode contribuir com o desenvolvimento de uma aula inovadora e atrativa ao público-alvo, possibilitando que os estudantes sejam autônomos do seu próprio conhecimento, pois como defende Oliveira e Pontes (2013), a principal característica das metodologias ativas é atribuir ao estudante uma posição de principal responsável pela sua aprendizagem. Atendendo a isso, surgiram formas diversas para modificar as aulas tradicionais nas escolas, sendo uma delas, a aplicação de jogos matemáticos visando contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos.

Logo é possível perceber a importância dos jogos na matemática quando ao abordar essa metodologia, em sala, percebe-se que o aluno se torna capaz de dar significado e atribuir sentido aos princípios matemáticos e, o professor tem a função de orientar nesse processo. SMOLE (2007) aborda estritamente essa importância nas aulas de matemática, enfatizando a modificação do ensino tradicional:

> Em se tratando de aulas de Matemática, o uso de jogos implica uma mudança significativa nos processos de ensino e aprendizagem, que permite alterar o modelo tradicional de ensino que, muitas vezes, tem no livro e em exercícios padronizados seu principal recurso didático", (SMOLE et al., 2007, p 09).

Por meio dessa perspectiva, esse projeto tem como objetivo relatar uma prática através do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), no qual optou-se realizar uma experiência utilizando o jogo Torre de Hanói com o 1º ano do ensino médio para proporcionar a interação dos alunos e potencializar o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático. O objetivo da aplicação do jogo é

estimular o aluno, incentivando a sua autonomia em pensar, raciocinar e criar estratégias, desenvolvendo a sua coordenação motora, noção de maior e menor, ordem crescente e decrescente e conhecimento sobre função exponencial.

O Desafio consiste em passar todos os discos de um pino para outro, sendo que existem apenas três pinos postos sobre uma base, no qual um dos pinos contém inicialmente todos os discos empilhados, de forma crescente de diâmetro, de cima para baixo. Assim o jogador deve passar somente um disco de cada vez, obedecendo as regras de que o maior nunca pode ser posto sobre o disco menor, e que não é permitido movimentar uma peça que esteja embaixo de outra.

Utilizando a fórmula $f(n) = 2^n - 1$ em que "n" é o número de discos, é possível descobrir o número mínimo de movimentos possíveis para concluir o jogo. Portanto para cada quantidade de discos existe um determinado número de jogadas mínimas:

Número de discos (n)	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127

Fonte: Tabela do Excel.

A torre de Hanói exige certos movimentos e padrões repetitivos, quanto mais discos colocados, mais difícil o jogo fica. Os alunos tiveram essa experiência e perceberam que o jogo não era simples em seu objetivo que consiste em encontrar o mínimo de jogadas possíveis para quantidade de discos.

Para a realização da prática a sala foi dividida em cinco equipes e os integrantes de cada uma delas deveriam ajudar uns aos outros na construção da Torre, visando a conclusão com menor número de movimentos possíveis, sem o conhecimento prévio em relação à fórmula e o mínimo possível de jogadas. De início foi proposto o desafio com apenas três discos e todas as equipes tiveram facilidade em terminar o desafio fazendo uso de sete movimentos. Em seguida foram dispostos quatro discos, e foi perceptível a dificuldades dos grupos para fazer o mínimo de jogadas possíveis. Durante a prática foi feito a construção de uma tabela para saber qual grupo terminaria primeiro, fato que instigou os estudantes na conclusão do desafio os deixando angustiados, pois sem a fórmula eles não sabiam se durante o jogo já tinham passado da quantidade necessária de movimentos.

Assim, houve uma grande dedicação na tentativa da criação de uma conjectura para a conclusão do desafio seguindo todas as regras, logo a maior parte das equipes concluíram o jogo fazendo o uso de 5 discos, e só ao final foi feita a construção e a demonstração da fórmula com base naquilo que os estudantes puderam observar durante a prática resultando em uma surpresa por parte dos alunos ao perceber que a matemática pode parecer complexa, mas muitas de suas subáreas possuem aplicações pertinentes ao aprendizado e também ao cotidiano. Então se permitiu com essa vivência em sala de aula, uma visão diferente, onde o aluno é o protagonista de seu aprendizado e o professor é o mediador desse conhecimento.

Referências

OLIVEIRA, M. G.; PONTES, L. **Metodologia ativa no processo de aprendizado do conceito de cuidar: um relato de experiência**. X Congresso Nacional de Educação – EDUCERE, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2011. Disponível em: <https://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/5889_3479.pdf> Acesso em 10 de Outubro de 2019.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; MILANI, Estela. **Jogos de Matemática de 6º ao 9º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

PIBID DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ – A MATEMÁTICA DO CONCRETO AO ABSTRATO

Júlio César Fagundes, Victor Teixeira da Silva e Nelson Ivo S. Ferreira
Licenciatura em Matemática – UFPR
juliocesar9804@hotmail.com, Vito1998silva@gmail.com, nelsonferrera@gmail.com

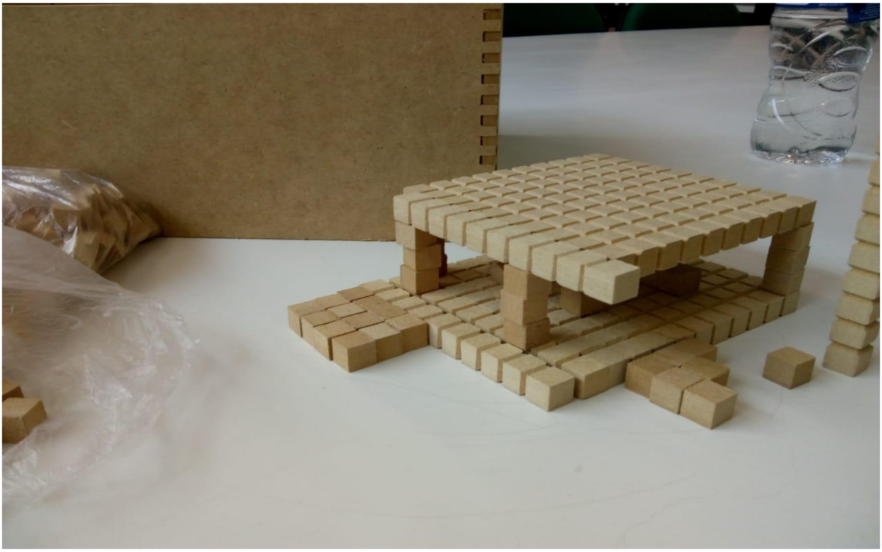
Prof. Tânia T. Bruns Zimer (Orientador)
Setor de Educação, UFPR, taniatbz@gmail.com
Prof. Sandra A. Martins (Orientador)
Colégio Estadual do Paraná, sandramartins105@gmail.com

Palavras-chave: concreto, jogos, método.

Resumo:

Neste início de 2019, deu-se início “aos projetos do concreto ao abstrato” e “Jogos no recreio”, desenvolvidos por alunos bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência, o PIBID de Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR). No primeiro caso, os alunos bolsistas abordaram matérias em geral já vistas pelos alunos, mas utilizando uma metodologia diferente. A proposta é ir do concreto ao abstrato, sendo desenvolvidos a partir de 7 aulas de 1h30min os seguintes temas: sistema métrico; perímetros; áreas; produtos notáveis; funções de segundo grau. Sendo assim, a partir de sistemas métricos foram trabalhados os conteúdos de perímetros e áreas, que foram úteis na mostra da forma geométrica de produtos notáveis, estes que nos ajudaram a mostrar aos alunos a dedução da fórmula de Bháskara, entre outras deduções. Ou seja, todo conteúdo está relacionado de modo que cada conhecimento novo adquirido faça com que o aluno revise o conteúdo anterior. Dentro do curso sempre trabalhamos com formas geométricas, materiais didáticos de forma que o ensino-aprendizagem saia do básico ensinado em sala de aula, como mostra a figura abaixo.

Figura 1: Confecção de uma casa com material dourado



Fonte: Acervo próprio

Na Figura 1 é possível ver a utilização do material dourado na confecção de uma casa a qual os pibidianos pediram que os alunos confeccionassem para, então, medirem as áreas de cada pavimento. Ficou evidente a motivação que os alunos sentiram ao manipularem as peças, pois era uma atividade fora da rotina da sala de aula. O feedback dos alunos foi extremamente positivo, participando da aula e trazendo resoluções para os problemas propostos durante todo o projeto, inclusive pedindo para propormos mais problemas durante as aulas. Ao concluir cada aula, refletíamos sobre os resultados obtidos com o trabalho desenvolvido, considerando o que tínhamos planejado e o que tínhamos executado. Em geral todas as aulas foram conforme o planejado, embora em alguns momentos tenha sido necessário retomar conteúdos da matemática básica como soma de frações, igualdade e propriedades da multiplicação/divisão. Ao final do curso os alunos apresentaram uma notória melhora não só na matemática básica, mas também na interpretação de problemas, tendo em vista que o nosso método valoriza a criatividade, a visualização dos problemas e a mudança de abordagem conforme o necessário, o que notoriamente os ajudou na resolução de problemas, além de que no final de cada aula resolvemos sempre uma ou duas questões do vestibular UFPR ou do ENEM, visando a fixação/aplicação do conhecimento adquirido. O projeto “jogos no recreio” visa trazer a matemática de uma forma completamente descontraída, onde os alunos se divertem e trabalham a matemática. Em geral eram jogos que trabalhavam com raciocínio lógico e a matemática básica, este onde percebemos uma grande dificuldade dos alunos com multiplicação e divisão. Em geral eram alunos do primeiro ano do ensino médio que participavam. Um grande ponto positivo o qual já era esperado e realmente se realizou durante o projeto, foi o ambiente descontraído, onde os alunos levavam a matemática como uma brincadeira, mas também trabalhavam com os números de modo a deixar operações mais básicas como a multiplicação, divisão, soma, subtração e até algumas potenciações e radiciações mais claras, como deve ser. Ou seja, trazer a matemática de um modo mais descontraído e divertido é uma ótima alternativa para se trabalhar conteúdos como raciocínio lógico e matemática básica, principalmente em casos onde se vê uma defasagem de aprendizado por parte dos alunos nestes conteúdos.

Referências:

LORENZATO, Sérgio. O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Coleção – Formação de professores. Campinas-SP: Autores Associados, 2006

MACEDO, Lino de; PETTY, Ana Lúcia Sicoli e PASSOS, Norimar Christe. Aprender com jogos e situações-problema. 1a. ed. Porto Alegre: Artmed, 2000.

A Educação Financeira aplicada na sala de aula

Ana Karoliny Nascimento de Oliveira, Elvira de Lourdes de Oliveira, Kátia Pinheiro Fernandes, Stephany de Oliveira Theodoro e Wictória Wisniewski
Licenciatura em Matemática – UNESPAR – Campus Paranaguá
oliveira.ana3107@gmail.com; elviraoliveira0109@hotmail.com; katiamarquesfernandes@gmail.com; stephany.oliveiratheo@gmail.com; wictoria10@hotmail.com

Profa. Ms Solange Maria Gomes dos Santos (Orientadora)
Colegiado de Matemática - UNESPAR – Campus Paranaguá
solange.santos@unespar.edu.br

Palavras-chave: Educação Financeira, Supermercado da Matemática, PIBID, Práticas Pedagógicas.

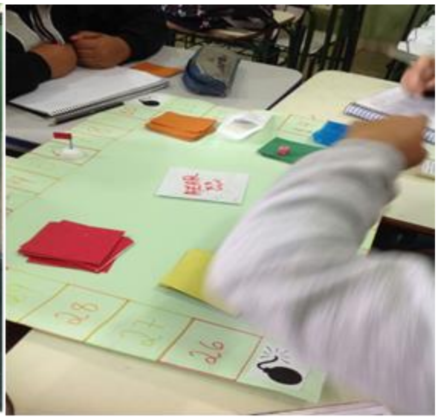
Resumo: Tendo em vista que a Educação Financeira tem ocupado um espaço importante na vida da sociedade, como uma ferramenta para que os alunos possam conhecer a organização de um orçamento familiar, dos termos financeiros que fazem parte do seu dia-a-dia, de como aprender a comprar com economia, e com base no Documento de Orientações para Educação Financeira nas Escolas (Estratégia Nacional de Educação Financeira/2010 (ENEF), é que vemos a Educação Matemática presente com os cálculos e resolução de problemas envolvendo situações do contexto financeiro. Sendo assim foi desenvolvido um projeto de Educação Financeira na educação Básica do 6º ao 9º ano das escolas estaduais de Paranaguá que participam do PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência, buscando uma aprendizagem significativa e participativa. Sobre essa questão, segundo Demo (2011, 41):

> "Cabe ao professor competente conduzir essa aprendizagem significativa, orientando o aluno permanentemente para expressar-se de maneira fundamentada, exercitar o questionamento e formulação própria, reconstruir autores e teorias e cotidianizar a pesquisa.
> Particularmente importante é a incorporação, na Educação Matemática, de uma preocupação com o ambiente. Embora haja, muito progresso nessa direção e se notem boas pesquisas e boas propostas curriculares visando a essa incorporação, a sua plena aceitação na Educação Matemática ainda é um problema".

Este projeto possibilitou aos alunos compreenderem o uso correto do dinheiro, das operações financeiras básicas, do orçamento familiar, com as aplicações da matemática. Ele foi desenvolvido em três momentos: no primeiro momento, foram explanados textos sobre o sistema monetário ao longo do tempo e a importância do planejamento mensal familiar, fazendo uso da linguagem financeira para a elaboração de uma planilha de custos (rendimentos, gastos, saldos) chamada pelos alunos de “Saúde Financeira” onde eles preencheram em casa com seus pais.

No segundo momento, foram elaboradas atividades que relacionaram conteúdos matemáticos com as temáticas financeiras: análise das planilhas de custos preenchidas pelos alunos comparando os tipos de gastos entre as famílias através de gráficos estatísticos e o jogo “BOOM das finanças”.

Figura 1 e 2: Gráficos Estatísticos e Jogo “BOOM das Finanças”

Fonte: Autoras, 2017.

E no terceiro momento, foi organizado um “Supermercado da Matemática” onde os alunos aplicaram os conhecimentos aprendidos.

Figura 3 e 4: Supermercado da Matemática

Fonte: Autoras, 2017.

A realização do Projeto de Educação Financeira contribuiu para o aluno identificar como funcionam as questões que envolvem um orçamento familiar e o mercado financeiro, os problemas que surgem com a falta de conhecimento de como usar o dinheiro de maneira irresponsável, situações estas, presentes nos livros didáticos e no currículo de matemática E principalmente, possibilitou a conscientização dos alunos do seu papel na construção de uma sociedade mais justa.

Referências:

DEMO, Pedro. **Educar pela pesquisa.** 7. ed. Campinas: Autores Associados, 2011.

A Matemática Ambiental aplicada na sala de aula

Ana Karoliny Nascimento de Oliveira, Elvira de Lourdes de Oliveira, Kátia Pinheiro Fernandes, Stephany de Oliveira Theodoro e Wictória Wisniewski
Licenciatura em Matemática – UNESPAR – Campus Paranaguá
oliveira.ana3107@gmail.com; elviraoliveira0109@hotmail.com; katiamarquesfernandes@gmail.com; stephany.oliveiratheo@gmail.com; wictoria10@hotmail.com

Profa. Ms Solange Maria Gomes dos Santos (Orientadora)
Colegiado de Matemática - UNESPAR – Campus Paranaguá
solange.santos@unespar.edu.br

Palavras-chave: Questões Ambientais, Matemática Ambiental, PIBID, Práticas Pedagógicas.

Resumo: Considerando que a Matemática, assim como as outras áreas do conhecimento, nasceu da necessidade que o homem teve de transformar a natureza para resolver seus problemas do cotidiano, que, de acordo com a Lei Federal nº 9.795/99, em seu Art. 5º sobre a Política Nacional de Educação Ambiental cita a inclusão da Educação Ambiental em todos os níveis de ensino é obrigatória, que, as Diretrizes Curriculares Nacionais no CNE/2007 Resolução CNE/MEC 15/06/2012 – Artigo 2º, destaca:

> "A Educação Ambiental é uma dimensão da educação, é uma atividade intencional da prática social, que deve imprimir ao desenvolvimento individual um caráter social em sua relação com a natureza e com os outros seres humanos, visando potencializar essa atividade humana com a finalidade de torná-la plena de prática social e de ética ambiental. "

e observando-se a integração da educação ambiental de maneira interdisciplinar, e que segundo Sato (2002, p. 24): *"A Educação Ambiental sustenta todas as atividades e impulsiona os aspectos físicos, biológicos, sociais e culturais dos seres humanos",* é que este projeto de Matemática Ambiental , através do tema transversal Meio Ambiente, mostrar de que forma é possível inserir as temáticas ambientais, como: sustentabilidade, o uso racional da água, as queimadas, o encaminhamento correto do lixo, a conscientização sobre a preservação do meio ambiente no contexto matemático das operações no conjunto dos números Naturais e sistemas de medidas, operações com

números decimais e estatística. O projeto foi desenvolvido na Educação Básica do 6º ao 9º ano das escolas estaduais de Paranaguá que participam do PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência, com o objetivo de levantar discussões em sala de aula dos problemas que afetam o meio ambiente no qual os alunos estão inseridos, ou seja na sua comunidade, mostrando a importância da conscientização da preservação do mesmo. A importância de relacionar os conteúdos de Matemática com as questões ambientais é salientada por D'Ambrósio (1996, p. 87):

> "Particularmente importante é a incorporação, na Educação Matemática, de uma preocupação com o ambiente. Embora haja, muito progresso nessa direção e se notem boas pesquisas e boas propostas curriculares visando a essa incorporação, a sua plena aceitação na Educação Matemática ainda é um problema".

Nota-se que em muitas escolas a questão ambiental é trabalhada puramente em seus aspectos naturais ou em práticas resumidas a datas comemorativas como, por exemplo, o Dia da Água, o Dia do Meio Ambiente, o Dia da Árvore, entre outros. E este projeto veio mostrar da possibilidade da interação do meio ambiente com as aplicações da matemática. Para tal foram elaboradas diversas atividades que relacionam conteúdos matemáticos com a temática ambiental como: apresentação das políticas e parâmetros curriculares e diretrizes nacionais para a educação ambiental; leitura dos textos "Planeta terra: lar, doce lar! herói redondo!", "Matemática e desmatamento", "Matemática da sustentabilidade", "Matemática da sustentabilidade", "Matemática da reciclagem; Música: EARTH SONG/ som da terra/Michael Jackson.

Colégio Estadual São Francisco	**Escola Estadual Dr. Roque Vernalha**
 	 
Conscientização dos prejuízos e males causados pelo lixo	**Reutilização do óleo de cozinha e uso consciente da água**

Colégio Estadual Helena Viana Sundim		
		
CONFECÇÃO DE SABÃO A PARTIR DO ÓLEO DE COZINHA		

Colégio Estadual Helena Viana Sundim		
		
COMPOSTAGEM		

A realização dos projetos escolares possibilitou aprendizagens significativas, permitindo aos acadêmicos ampliar a compreensão de conteúdos inseridos nos temas da Educação Ambiental, e, aos alunos, descobrir os conteúdos matemáticos através das experiências vivenciadas na realização da investigação.

Referências:

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: Reflexões sobre educação e matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1996.

Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Ambiental. CNE/2007 Resolução CNE/MEC 15/06/2012 – Artigo 2º

Lei Federal nº 9.795/99, que institui a Política Nacional de Educação Ambiental, Art. 5º e 10.

SATO, M. **Educação Ambiental.** São Carlos: Rima, 2003.

Geometria e Topologia

Banca Avaliadora:

Prof. Carlos Durán (DMAT/UFPR)
Prof. Llohann Dallagnol Sperança (UNIFESP)
Luciano Luzzi Junior (PPGM/UFPR)

A geometria da Relatividade Geral e Restrita

Gabriel Felipe Dalla Stella
Bacharelado em Matemática - UFPR
gabrielstella28@gmail.com

Prof. Diego Otero (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
otero.ufpr@gmail.com

Palavras-chave: Relatividade Restrita, Relatividade Geral, Geometria diferencial.

Resumo: Esse trabalho se dedica a fazer uma breve apresentação da relatividade geral, principalmente na dedução das equações de campo de Einstein. Para isso, também é necessário recorrer a alguns conceitos da relatividade especial, em particular a relação entre a massa-energia e momento.

A relatividade especial de Einstein foi uma generalização da mecânica clássica de modo que esta generalização fosse consistente com a teoria do eletromagnetismo. A relatividade especial introduz inicialmente os dois postulados: (i) as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais; (ii) a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais. Isso deu origem a uma teoria consistente e com resultados bastante inesperados. Inesperados, pois são imperceptíveis nas velocidades que conseguimos ver no cotidiano. Além disso, na relatividade pensamos no espaço e no tempo conectados, com isso chamamos a coleção de todos os eventos no espaço e no tempo de espaço-tempo.

Porém, apesar de conciliar a mecânica com o eletromagnetismo, ainda há uma força fundamental que não estava inclusa nesta teoria: a gravidade. Com a introdução da gravidade, Einstein previu que o tempo passa mais lentamente conforme aumenta o campo gravitacional. Uma consequência disso é que se emitirmos um feixe de luz da base de uma torre em direção ao topo com uma certa frequência f em um referencial em repouso com relação à Terra, medindo a frequência f' do feixe no topo, então devemos ter $f < f'$. Este efeito foi confirmado em 1959 com o experimento de Pound-Rebka.

Com o esse experimento podemos concluir que um referencial em repouso com relação à Terra não é um referencial inercial (mesmo desconsiderando a rotação da Terra), logo as leis que regem a relatividade especial não podem ser aplicadas neste referencial. Porém, Einstein percebeu que nas proximidades da origem deste referencial valem as leis da relatividade especial em referenciais em queda livre sob a ação da gravidade, onde a proximidade depende da variação do campo gravitacional.

Esta é uma das implicações do que veio a ser chamado de Princípio da Equivalência de Einstein. Este princípio, juntamente com a inspiração na geometria Riemanniana, deu origem aos postulados do que hoje chamamos de Teoria Métrica da Gravitação, que são os seguintes:

- O espaço-tempo possui uma métrica g.
- Corpos em queda livre seguem a trajetória de uma geodésica com respeito a esta métrica.
- Localmente valem as leis da relatividade especial em referenciais em queda livre sob a ação da gravidade.

Esta nova forma de pensar deu origem à Geometria Semi-Riemanniana e funciona como a ponte entre a geometria diferencial e a física da relatividade. Além disso, neste novo sentido, a gravidade deixa de gerar energia potencial gravitacional e passa a fazer parte da métrica.

Para determinar a métrica deste espaço, desenvolveu-se as equações de Einstein da Relatividade Geral. Estas equações formam basicamente uma generalização da Lei de Gauss da Gravitação, que é equivalente à Lei da Gravitação Universal de Newton assumindo a simetria esférica do campo gravitacional gerado por uma massa pontual. A Lei de Gauss da Gravitação é a seguinte:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho,$$

onde, φ é a energia potencial gravitacional, Δ é o operador Laplaciano, G é a constante gravitacional e ρ é a distribuição de massa. Com algumas considerações físicas como a conservação de energia e identificando os dois lados da equação na nova teoria chegamos às equações:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Sg_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi}{c^4}T_{ij},$$

onde R_{ij}, g_{ij} e T_{ij} são as componentes da curvatura de Ricci, da métrica e do tensor de energia-momento (*stress-energy*, em inglês), respectivamente. Este sistema de equações é chamado de equações de Einstein.

Com as soluções desta equação, os postulados da Teoria Métrica da Gravitação e assumindo as condições de validade da mecânica Newtoniana podemos recuperar a lei da Gravitação Universal, como uma boa generalização de uma teoria já aceita.

Referências

[1] FRISCH, M. **Inconsistency in Classical Electrodynamics**. Philosophy of Science, v. 71, n. 4, p. 525 - 549, out. 2004.

[2] O'NEILL, B. **Semi-Remannian Geometry**. London: Academic Press, 1983.

[3] EINSTEIN, A. **The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 2, The Swiss Years: Writings, 1900-1909**. New Jersey: Princeton University Press , 1989.

[4] EINSTEIN, A. **The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 6, The Berlin Years: Writings, 1914-1917**. New Jersey: Princeton University Press , 1997.

[5] SCHUTZ, B. **A First Course in General Relativity**. New York: Cambridge University Press, 2009.

Semelhança, uma visão analítica

Ghabriel Alcantara Paulo da Silva
Licenciatura em Matemática - UTFPR
ghabriel_paulo@hotmail.com

Prof. Neusa Nogas Tocha
Departamento de Matemática - UTFPR
neusatocha@utfpr.edu.br

Palavras-chave: semelhança, isometria, homeomorfismo.

Resumo:

O conceito de semelhança entre figuras é de fundamental importância em matemática. Em se tratando de triângulos, por exemplo, é discutida logo durante os anos iniciais do ensino fundamental. Sua utilização é vasta, não apenas na geometria (a trigonometria, o estudo de funções, entre outros, resgatam a semelhança entre triângulos em vários momentos), mas também em outras áreas do conhecimento; tomando um exemplo da Física, na Ótica, todo os estudo da relação entre imagens reais e virtuais se dá em termos de figuras semelhantes, razões de semelhança, etc.

Na busca por uma descrição mais rigorosa do conceito, no correr da história, a semelhança passou a ser abordada como uma função; uma bijeção entre duas figuras do espaço euclidiano. Desse ponto de vista, é razoável pensar ser possível estabelecer uma visão analítica sobre o tema, ou seja, valer-se da estrutura teórica da análise matemática, ou mesmo da topologia, afim de refinar, no sentido matemático, esse conceito tão interessante, uma vez que a analise matemática é uma área dedicada a funções e suas propriedades.

Ao discutir semelhança entre figuras, o autor Elon Lages Lima (2009) faz uso da definição a seguir: "Sejam F e F' figuras, do plano ou do espaço, e r um número real positivo. Diz-se que F e F' são *semelhantes*, com *razão de semelhança* r, quando existe uma correspondência biunívoca $\sigma\colon F \to F'$, entre os pontos de F e os pontos de F', com a seguinte propriedade: *se* X, Y *são pontos quaisquer de* F *e* $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$ *são seus correspondentes em* F' *então* $d(X', Y') = r \cdot d(X, Y)$ [onde d é a aplicação distância usual]. A correspondência biunívoca $\sigma\colon F \to F'$ com esta propriedade de multiplicar distâncias pelo fator constante r, chama-se uma *semelhança*

de razão r entre F e F'. Se $X' = \sigma(X)$, diz-se que os pontos X e X' são *homólogos*" (LIMA, 2009; adaptado). O autor, nessa obra (referência [1]), apresenta um foco iminentemente geométrico – o que faz muito sentido dados seus objetivos. As demonstrações pouco enfocam a semelhança como função. Não obstante, em alguns momentos, Lima deixa transparecer a possibilidade de uma abordagem mais analítica sobre o que seja semelhança.

O objetivo aqui é explorar essa possibilidade vislumbrada no livro de Elon Lages Lima, buscando um tratamento analítico para função semelhança, caracterizando-a. Noutras palavras, se pretende estudar as propriedades geométricas da semelhança por meio da análise matemática e sua estrutura teórica. Dada um aplicação s, semelhança de razão $r > 0$, o objetivo é estabelecer o modo pelo qual s associa diretamente um dado ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de uma figura $F \subset \mathbb{R}^2$ com seu homólogo em $s(F) \in \mathbb{R}^2$ semelhante a F; isso porque a definição acima apresentada exige ao menos dois pontos para que seja verificada a semelhança.

Para tanto, dado $t \in \mathbb{R}$, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} f_t \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (t \cdot x, t \cdot y). \end{aligned}$$

Sejam $F, F' \subset \mathbb{R}^2$ figuras semelhantes, com razão de semelhança $r > 0$. Então, existe $s \colon F \to F'$ correspondência biunívoca, tal que $F' = s(F)$. Nesse caso, vale o que segue.

Definição "Uma aplicação $f \colon M \to N$, de um espaço métrico M num espaço métrico N, chama-se uma *imersão isométrica* quando

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

quaisquer que sejam $x, y \in M$. Se, além disso, f é uma aplicação de M *sobre* N, então diz-se que f é uma isometria de M sobre N, ou uma isometria entre M e N" (LIMA, 2014).

Teorema 1 *A aplicação s é da forma $s = I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$, em que I é uma isometria.*

Esse teorema possibilita caracterizar a semelhança, ou seja, dado $(a, b) \in F$, pode-se calcular diretamente $s(a, b) = I(f_r|_F^{f_r(F)}(a, b))$ homólogo a (a, b) em F'. Mas, principalmente, ele garante que para se estudar as propriedades relativas a semelhança entre figuras, basta fazê-lo em $f_r|_F^{f_r(F)}(F)$, posto que, como o que diferencia $f_r|_F^{f_r(F)}(F)$ de F' é uma isometria, mantêm-se as propriedades topológicas e geométricas de uma figura para a outra.

Definição "Sejam O um ponto do plano Π (ou do espaço E) e r um número real positivo. A *homotetia* de centro O e raio r é a função $\sigma \colon \Pi \to \Pi$ (ou $\sigma \colon E \to E$) definida do seguinte modo: $\sigma(O) = O$ e, para todo ponto $x \neq O$, $\sigma(X) = X'$ é o ponto da semi-reta OX tal que $d(O, X') = r \cdot d(O, X)$" (LIMA, 2009; adaptado).

Teorema 2 *A aplicação f_r é uma homotetia de centro $O = (0, 0)$ e razão r.*

O teorema 2 estrutura uma interpretação geométrica para a caracterização de s.

Definição "Um *homeomorfismo* é uma aplicação contínua e biunívoca $f \colon M \to N$ de um espaço métrico M sobre um espaço métrico N, tal que sua inversa $f^{-1} \colon N \to M$ também é contínua. Neste caso, f^{-1} ainda é um homeomorfismo" (LIMA, 2014).

Teorema 3 *A aplicação s é um homeomorfismo entre F e F'.*

Por fim, este último teorema inicia uma abordagem em relação ao comportamento topológico da semelhança entre figuras.

O presente trabalho é composto pelos resultados iniciais do Trabalho de Conclusão de Curso do autor. O objetivo principal do trabalho é dar um tratamento analítico para o estudo de semelhança contido na referência [1]; nesse sentido, a teoria aqui apresentada inicia esse tratamento.

Referências:

[1] LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria**: Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[2] ________. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

Aspectos Topológicos e Algébricos de Circuitos Elétricos

Luna Rhaine Nascimento Oliveira *
Bacharelado em Física - UEPG
lunarhaineoliveira@gmail.com

Prof. Marcos Calçada (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
mcalcada@uepg.br

Palavras-chave: Circuitos Elétricos, Método de Weyl, Método de Kirchhoff, 1-complexo, Equação de Poisson.

Resumo:

Circuitos elétricos são uma coleção de componentes elétricas – tais como resistores e capacitores, que, matematicamente, equivalem a grafos com ramos orientados. Desse modo, o conjunto de nós e o conjunto de fios correspondem, respectivamente, aos conjuntos de vértices e de arestas de um 1-complexo [3]. Esses conjuntos geram espaços vetoriais, 0-cadeias e 1-cadeias, que são empregados para fornecer a topologia do complexo.

Podemos definir operadores, como o operador de fronteira, que são aplicações lineares entre esses espaços fundamentais e também entre os espaços duais 0-cocadeias e 1-cocadeias. Um operador essencial nesse caso será o laplaciano, o qual é um caso especial dos Laplacianos de Hodge [2]. A representação matricial dos operadores é usada para resolver circuitos elétricos, ou seja, para extrair informações como o comportamento da corrente em cada fio. Isso pode ser feito pela aplicação de diversos métodos, dentre eles os métodos de Weyl e de Kirchhoff, para circuitos puramente resistivos, e os métodos de Maxwell e pela inversão do operador de Laplace, para circuitos capacitivos [3].

O método de Weyl dispõe do fato que a matriz relacionada às resistências define um produto interno no espaço das 1-cadeias, sendo possível definir o conceito de projeção ortogonal, que define um operador auto-adjunto (def. ver [4]), e será usado para determinar as correntes e as voltagens do circuito. Esse operador pode ser encontrado pelo método de Kirchhoff, que utiliza as árvores maximais do complexo, ou pelo processo de Gram-Schmidt.

Do estudo de circuitos capacitivos podemos derivar equações conhecidas do eletromagnetismo, como a lei de Gauss e a equação de Poisson. Uma vez que na eletrostática a maioria dos problemas têm condições de fronteira com potencial nulo,

*Bolsista PICME.

resolver tais circuitos se torna uma superposição de dois problemas: um problema de Dirichlet para os vértices interiores do circuito e um problema da equação de Poisson para os vértices de fronteira [3]. Ambos problemas podem ser resolvidos com os métodos que envolvem projeção ortogonal ou com as chamadas funções de Green.

Referências:
[1] OLVER, P. J.; SHAKIBAN, C. **Applied Linear Algebra.** Springer, 2018. Ebook. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.10072F978-3-319-91041-3>. Acesso em: 14 jun. 2018.

[2] LIM, L. Hodge Laplacians on Graphs. **Conell University**, 20 juho 2015. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1507.05379>. Acesso em: 9 mar. 2018.

[3] BAMBERG, P.; STERNBERG, S. **A Course in Mathematics for Students of Physics 2.** Cambridge University Press, 1991.

[4] AXLER, S. **Linear Algebra Done Right.** Springer, 2015. Ebook. Disponível em: <https://www.springer.com/br/book/9783319110790>. Acesso em: 11 jul. 2018.

O Teorema de Serre-Swan e Classificação de Fibrados

Marcel Thadeu de Abreu e Souza *
Bacharelado e Licenciatura em Matemática – UFPR
marcel.abreu@ufpr.br

Prof. Dr. Diego Mano Otero (Orientador)
Departamento de Matemática – UFPR
otero@ufpr.br

Palavras-chave: fibrado vetorial, módulo projetivo, Grassmaniana, funções clutching.

Resumo:

Neste trabalho apresentaremos a correspondência de Serre-Swan e uma outra classificação de fibrados vetoriais que pode ser obtida através do fibrado universal. Mostraremos também uma maneira de construir e classificar fibrados vetoriais em algumas esferas $\mathbb{S}^k$.

Se X é um espaço topológico, dizemos que um fibrado vetorial real V de posto k é uma família de espaços vetoriais reais V_p de dimensão k, com $p \in X$ variando continuamente em p. Uma seção de V é uma função da forma $X \ni p \mapsto v_p \in V_p$. Um módulo é, informalmente, uma generalização de um espaço vetorial, em que o conjunto dos escalares necessita ser apenas um anel com unidade, ao invés de um corpo. Se A é um anel, dizemos que um A-módulo P é projetivo se existe um A-módulo Q tal que $P \bigoplus Q$ é um A-módulo livre, ou seja, um módulo que admite uma base. Um módulo é dito finitamente gerado se for gerado por um conjunto finito.

O Teorema de Serre-Swan estabelece uma ponte entre a álgebra e a geometria, ao relacionar o conceito algébrico de módulos projetivos finitamente gerados com a noção geométrica de fibrados vetoriais. Informalmente, esse teorema nos permite dizer que módulos projetivos finitamente gerados sobre anéis comutativos podem ser vistos como fibrados vetoriais em espaços topológicos compactos. Esse teorema classifica fibrados vetoriais ao afirmar que existe uma bijeção entre as classes de fibrados e as classes das seções de fibrados:

$$\mathcal{F} : \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}(X) \to C^{\infty}(X)\text{–}\mathsf{Mod}_{\,\text{f.g.p.}}$$
$$[E] \mapsto [\Gamma(E)]$$

Uma outra classificação de fibrados vetoriais pode ser obtida através do fibrado universal. O fibrado universal, por definição, é dado pelo fibrado tautológico na Grassmaniana infinita, que é construído usando a estrutura das Grassmanianas, onde em

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET-Matemática) cada ponto associamos o mesmo ponto, ou seja, o mesmo espaço vetorial. A Grassmaniana $Gr_n(V)$ é o espaço que parametriza todos os subespaços vetoriais de dimensão n do espaço vetorial V. Por exemplo, $Gr_1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}P^1$, ou seja, é o espaço das retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^2$. A Grassmaniana infinita é dada por

$$Gr_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Gr_n(\mathbb{R}^k).$$

Denotamos por $[X, Gr_n]$ as classes de equivalência de homotopia da base com a Grassmaniana infinita. Duas funções contínuas f e g entre espaços topológicos são ditas homotópicas se uma puder ser deformada continuamente na outra. Tal deformação é chamada de homotopia entre f e g. Teremos então que, para um espaço topológico X paracompacto, a aplicação $\Phi : [X, Gr_n] \to \text{Vect}^n(X)$, $[f] \mapsto f^*(E_n)$ é uma bijeção, onde $E_n(\mathbb{R}^k) = \{(\ell, v);\ \ell \in Gr_n(\mathbb{R}^k),\ v \in \ell\}$ e $f^*(E_n)$ é o fibrado pullback sobre Gr_n, de tal forma que o diagrama a seguir seja comutativo.

$$\begin{tikzcd}
f^*(E_n) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & E_n \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"] & Gr_n
\end{tikzcd}$$

Um caso particular de classificações de fibrados vetoriais nas esferas $\mathbb{S}^k$ pode ser obtido através das funções *clutching*, onde podemos relacionar também o espaço $\text{Vect}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^k)$ com $[\mathbb{S}^{k-1}, GL_n(\mathbb{C})]$. Sejam D^k_+ e D^k_- os hemisférios fechados norte e sul da esfera $\mathbb{S}^k$, respectivamente. Então temos que $D^k_+ \cap D^k_- = \mathbb{S}^{k-1}$. Seja $f : \mathbb{S}^{k-1} \to GL_n(\mathbb{R})$ uma função e defina $E_f = (D^k_+ \times \mathbb{R}^n \cup D^k_- \times \mathbb{R}^n)/\sim$, onde $\sim$ é a relação de equivalência gerada por $\partial D^k_- \times \mathbb{R}^n \ni (x, v) \sim (x, f(x)(v)) \in \partial D^k_+ \times \mathbb{R}^n$. Dizemos que f é uma função *clutching*. É possível mostrar que a aplicação $\Phi : [\mathbb{S}^{k-1}, GL_n(\mathbb{C})] \to \text{Vect}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^k)$, que leva as classes de homotopia de uma função *clutching* f até as classes de isomorfismos de um fibrado vetorial E_f, é bijetora. Esse resultado é possível pois $GL_n(\mathbb{C})$ é conexo por caminhos. Um resultado análogo ocorre nas matrizes invertíveis de determinante positivo, em que pode-se mostrar que $\Psi : [\mathbb{S}^{k-1}, GL^+_n(\mathbb{R})] \to \text{Vect}^n_+(\mathbb{S}^k)$ é uma bijeção, onde $\text{Vect}^n_+(\mathbb{S}^k)$ são as classes de fibrados vetoriais reais de dimensão n sobre $\mathbb{S}^k$, tais que as mudanças de cartas preservam orientação. Algumas consequências desses resultados são as seguintes bijeções: $\text{Vect}^n(\mathbb{S}^1) \approx \mathbb{Z}_2$, $\text{Vect}^2_+(\mathbb{S}^2) \approx \mathbb{Z}$, $\text{Vect}^2(\mathbb{S}^2) \approx \mathbb{Z}^{\geq 0}$ e $\text{Vect}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^2) \approx \mathbb{Z}$.

Referências:

[1] HATCHER, A. **Vector Bundles and K-Theory.** Disponível em: <`http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf`>.

[2] KLEIN, R. **Swan's Theorem.** 38 f. Thesis (Bachelor of Mathematics) – Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen, Rijksuniversiteit Groningen, Groningen, 2013.

[3] LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds.** Seattle: Springer, 2003.

[4] HUSEMÖLLER, D.; JOACHIM, M.; JURCO, B.; SCHOTTENLOHER, M. **Basic Bundle Theory and K-cohomology Invariants.** Lecture Notes in Physics 726. Berlin: Springer, 2008.

[5] ATIYAH, M. **K-Theory.** New York: Benjamin, 1967.

O Grupo Fundamental do Círculo

Otávio Dittrich Moreira *
Bacharelado em Matemática - UFPR
otaviodittrich@gmail.com

Prof. Hudson do Nascimento Lima (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
hudsonlima@ufpr.br

Palavras-chave: Topologia Algébrica, Grupo Fundamental, Caminhos fechados, Homotopia de caminhos.

Resumo:

A Topologia Algébrica pode ser definida como o estudo de imagens algébricas de espaços topológicos por funtores. Um exemplo disso é o *grupo fundamental*, devido ao matemático francês Henri Poincaré (1854-1912), que associa um espaço topológico X e um ponto base $x_0 \in X$ a um grupo $\pi(X, x_0)$, cujos elementos são *caminhos fechados módulo homotopia de caminho*, isto é, as funções contínuas $a : [0,1] \to X$ com $a(0) = a(1) = x_0$, quocientadas pela relação de equivalência:

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists H : [0,1] \times [0,1] \to X \text{ contínua};$$

$$H(s,0) = a(s), H(s,1) = b(s), H(0,t) = H(1,t) = x_0 \ \ \forall s,t \in [0,1]$$

Intuitivamente, o parâmetro t pode ser imaginado como sendo o tempo. A homotopia é então pensada como um processo de deformação contínua do caminho a até o caminho b, como na Figura 1.

O produto $\overline{a} * \overline{b}$ é a classe do caminho formado pela concatenação $\overline{a * b}$, onde

$$(a*b)(x) = \begin{cases} a(2x) & \text{se} \quad x \in [0, 1/2] \\ b(2x-1) & \text{se} \quad x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Neste caso, o inverso $\overline{a}^{-1}$ é a classe $\overline{b}$ onde b faz o caminho inverso de a, ou seja, $b(s) = a(1-s)$, e a identidade é a classe $\overline{e}$, onde e é o caminho constante $e(s) = x_0$.

Tomando $X = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $x_0 = (1,0)$, prova-se que, para cada $a : [0,1] \to S^1$, existe uma única função contínua $\theta_a : [0,1] \to \mathbb{R}$, tal que $a(s) = (cos(\theta_a(s)), sen(\theta_a(s)))$

*Voluntário do Programa PICME

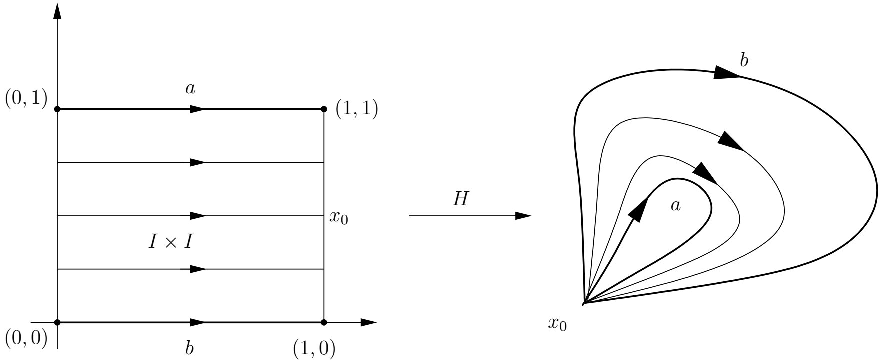


Figura 1: Homotopia entre a e b

e $\theta_a(0) = 0$, ou seja, $a = \xi \circ \theta_a$, onde $\xi(x) = (cos(x), sen(x))$.A função θ_a é chamada *função ângulo* de a Nesse sentido, cada caminho a pode ser associado ao inteiro

$$n'(a) = \frac{\theta_a(1) - \theta_a(0)}{2\pi}$$

que corresponde ao *número líquido de voltas que a dá em S^1*, isto é, ao número de voltas no sentido anti-horário menos o número de voltas no sentido horário. Desse modo, prova-se que dois caminhos são homotópicos se, e somente se, o número líquido de voltas é o mesmo. Logo, a função n' induz uma função

$$\begin{array}{rccc} n: & \pi(X, x_0) & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ & \overline{a} & \mapsto & n'(a) \end{array}$$

que é um isomorfismo de grupos. Pode-se usar esse isomofismo, por exemplo, para provar o Teorema de Borsuk-Ulam: para toda aplicação contínua $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ existe $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$. Uma interpretação desse teorema é que, a cada instante, existem sobre a face da Terra dois pontos antípodas nos quais a temperatura e pressão atmosféricas são iguais.

Referências:

[1] HATCHER, A. **Algebraic Topology**, Cambridge University Press, 2002.

[2] LIMA, E. L. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento**, 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

Cálculo das Variações: Aplicações de Máximos e Mínimos

Rogério Otavio Mainardes da Silva
Licenciando em Matemática - UFPR
r.otavioms@gmail.com

Prof. Dr. Diego Otero (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
otero.ufpr@gmail.com

Palavras-chave: Cálculo das Variações, Máximos e Mínimos, Geodésicas, Superfícies Mínimas.

Resumo:

Podendo ser visto como uma teoria que generaliza o que é estudado nos cursos padrões de Cálculo, o Cálculo Variacional é um campo da matemática que estuda as variações em funcionais buscando seus máximos e mínimos. Para estudar pontos de máximos e mínimos de funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ primeiramente calculamos os pontos críticos que são dados pela condição $df(x) = 0$. Posteriormente, condições suficientes para máximos e mínimos são dadas pelo estudo de uma forma quadrática associada a função f no ponto x, dada pela Hessiana $d^2f(x)$. Análogamente podemos definir estes conceitos no Cálculo das Variações para funcionais.

Funcionais são funções que dependem de funções. Essencialmente, relacionamos um conjunto de funções com um conjunto de números reais, e para isso, frequentemente os funcionais envolvem alguma integração das funções e suas derivadas de um conjunto pré-definido de funções. Por exemplo, considerando a família de funções reais continuamente diferenciáveis $C^1([a, b])$ no intervalo fechado $[a, b]$ podemos definir um funcional J por

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

onde $F(x, y, y') = F[x, y(x), y'(x)]$ é uma função contínua de três variáveis chamada de Lagrangiano e $y(x)$ percorre o conjunto de todas as funções contínuas diferenciaveis definidas no intervalo $[a, b]$.

Condições necessárias para os máximos e mínimos são dadas pelos pontos críticos. Um ponto y é dito um ponto crítico de J se satisfizer $\delta^1 J[y] = 0$, onde $\delta^1 J$ é a derivada do funcional J. A condição de ser ponto crítico é equivalente a condição de y satisfizer a equação de Euler-Lagrange:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Além disso, realizando um estudo acerca a segunda derivada do funcional, obtemos ainda resultados que garantem uma condição suficiente para se obter o mínimo do mesmo. No caso de J, a segunda derivada é um funcional quadrático da forma

$$\delta^2 J[y](h) = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx$$

onde,

$$P = P(x) = F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)), Q = Q(x) = F_{yy}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}(F_{y'y}(x, y(x), y'(x))$$

e $y = y(x)$ é um ponto crítico do funcional. A equação anterior diz que uma condição suficiente para o funcional J apresentar um mínimo em y é que

$$P(x) \geqslant 0, \forall x \in [a, b]$$

e que não hajam pontos do tipo $t^* \in (a, b]$ tais que exista $w(a) = w(t^*) = 0$ onde $w \not\equiv 0$ satisfaz $Q(x)w = \frac{d}{dx}(P(x)w')$, chamada de equação de Jacobi. Esses pontos t^* são chamados de Instantes Conjugados.

Tendo em vista tais conceitos apresentados, neste trabalho visa-se a aplicação do Cálculo das Variações para a resolução de alguns problemas clássicos, tais como:

- A Curva de menor Distância em diferentes superfícies:
    1. Plano;
    2. Cilindro;
    3. Esfera.
- O Problema Isoperimétrico:
    - Consiste em determinar uma figura no plano que possui a maior área possível tal que a fronteira tem um perímetro fixo pré-determinado.
- A Braquistócrona:
    - Determinar a trajetória que leva menos tempo possível para o deslocamento de uma partícula sob um determinado campo gravitacional constante, entre dois pontos fixos A e B.
- A superfície de revolução de menor área:
    - Dentre todas as superfícies de revolução com mesma fronteira, encontrar aquela que possui a menor área.

Referências:

Fomin, S. V.; Gelfand, I. M.; **Calculus of Variation**. Moscow State University. Prentice-Hall, Inc., 1963.

Schättler, H.; Ledzewicz, U.; **Geometric Optimal Control**: Theory, Methods and Examples. Nova Iorque: Springer, 2012.

Otimização

Banca Avaliadora:

Profa. Mael Sachine (DMAT/UFPR)
Emerson Butyn (PPGM/UFPR)
Evelin Heringer Manoel Krulikovski (PPGM/UFPR)
Juliana Gomes Da Silva (PPGM/UFPR)

Aplicação do Método Simplex com Geração de Colunas para o Problema de Corte Unidimensional

Daniel José Schulmeister *
Bacharelado em Matemática Aplicada - UEPG
danielschul18@gmail.com

Profª. Sheila Valechenski Biehl (Orientadora)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
svbiehl@uepg.br

Palavras-chave: otimização linear, corte de peças unidimensional, método de geração de colunas.

Resumo:

O problema de corte de estoque unidimensional é um problema bastante estudado na área da Matemática Aplicada e de grande importância para o planejamento da produção em diversas indústrias, tais como indústrias de papel, de móveis, metalúrgica, têxtil, entre outras. O problema de corte consiste basicamente em cortar objetos maiores de comprimento definido, disponíveis em estoque, em objetos menores para atender a uma demanda de itens, com larguras especificadas. O objetivo é encontrar a melhor opção dentre todas as combinações possíveis de corte, de modo a suprir a demanda e minimizar o desperdício de material.

Utilizando conceitos básicos de álgebra linear, podemos facilmente modelar um problema de corte de peças em um sistema do tipo $Ax = b$, onde cada coluna da matriz A será um padrão de corte possível, o vetor coluna x indicará as quantidades a serem cortadas de cada padrão e, finalmente, o vetor coluna b expressará a demanda por cada tamanho de corte.

Introduzido o modelo matemático, o objetivo do trabalho é a apresentação do método de geração de colunas. Diferentemente do método Simplex, no qual já nos são fornecidas as possíveis colunas que irão compor a Matriz Básica, a geração de colunas, como o próprio nome sugere, nos permite *construir* as colunas da Matriz Básica, por meio da resolução de um subproblema, frequentemente estudado na otimização discreta, conhecido como problema da mochila.

Essas colunas possuem um custo reduzido negativo (são ditas, *colunas atrativas*), por isso, ao serem introduzidas na matriz básica, reduzem a função objetivo, o que significa, no contexto do problema de corte, a redução da quantidade de material

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME.

utilizado no processo. Utilizando alguns passos do Simplex, detectamos a coluna que irá *sair* da base para que a coluna atrativa possa entrar.

Toda a construção matemática do problema poderá ser acompanhada por meio de uma aplicação numérica do método. O algoritmo se encerra quando o custo reduzido da nova coluna gerada for igual a 1, acusando a não alteração da função da objetivo. Embora a solução encontrada não possua todas as componentes inteiras, uma excelente aproximação é feita pelo arredondamento para o seu inteiro superior, quando se trata de um problema de grandes proporções, como será o caso exibido.

Por fim, serão apontados alguns caminhos futuros para continuidade dos estudos, como por exemplo, a utilização do método de pontos interiores, que tem mostrado uma convergência mais rápida até a solução ótima, a análise das k melhores colunas geradas pelo subproblema, ao invés de apenas uma e também a inspeção dos problemas de corte bidimensional, que têm uma complexidade maior.

Referências:

ARENALES, M et al. Pesquisa Operacional, Elsevier, 2015.

LUENBERGER, D. G., Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

NOCEDAL, J. and WRIGHT, S., Numerical Optimization, Springer, 1998.

Minimização de Função Real
Pelo Método da Razão Áurea

Amanda Maciel de Oliveira *, Danielly Araujo Pereira dos Santos †,
João Victor da Silva e Talia Correia Schulz ‡
Bacharelado/Licenciatura em Matemática - UFPR
amandamac0912@gmail.com; daniellyaps97@gmail.com; josilva602@gmail.com e taliacshulz@gmail.com

Prof. Dr. Abel Soares Siqueira (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
abelsiqueira@ufpr.br

Palavras-chave: razão áurea, minimização, otimização.

Resumo:

Neste trabalho iremos abordar um dos métodos para minimizar funções unimodais, denominado método da Razão Áurea. Este consiste em estreitar um intervalo inicial de um certo modo que a distância entre os intervalos divididos respeitem a razão áurea. Após a implementação do algoritmo será feita uma comparação com métodos semelhantes, onde iremos realizar uma análise dos resultados obtidos.

Para implementação do método utilizaremos um tipo específico de função, denominada unimodal. Uma função contínua $\rho : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é dita unimodal quando admite um conjunto de minimizadores $[x_1, x_2]$, é estritamente decrescente em $[0, x_1]$ e estritamente crescente em $[x_2, \infty)$.

Gostaríamos de particionar um intervalo em busca do minimizador, para isso procuramos uma proporção que seja eficiente. Para tal, temos uma definição que nos diz: *um ponto divide o intervalo $[a, b]$ na razão áurea, quando a razão entre o maior segmento e o segmento todo é igual à razão entre o menor e o maior dos segmentos.*

Assim, ao manipular tais razões em busca da proporção ideal obtemos $u = a + \theta_1(b - a)$ e $v = a + \theta_2(b - a)$, onde $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$ são as proporções que desejamos encontrar.

Fazendo as devidas manipulações obtemos

$$\theta_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,382 \qquad \text{e} \qquad \theta_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618.$$

*Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

†Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET Matemática)

‡Alunos Pesquisadores no Grupo Ciência de Dados, Aprendizagem de Máquina e Otimização (CiDAMO)

Com isso podemos definir o método. A primeira parte consiste em definir um intervalo $[a, b] \subset [0, \infty)$, a partir de um intervalo $[0, 2s]$, para $s > 0$, de modo que $[a, b]$ contenha o minimizador ξ.

Algorithm 1 Seção Áurea Parte 1: Encontra o intervalo [a,b]

Entrada: $\varphi(x), \alpha > 0$
$a \leftarrow 0$
$s \leftarrow \alpha$
$b \leftarrow 2\alpha$
while $\varphi(b) < \varphi(s)$ **do**
    $a \leftarrow s$
    $s \leftarrow b$
    $b \leftarrow 2b$
end while
Saída a, b

Figura 1: Algoritmo parte 1

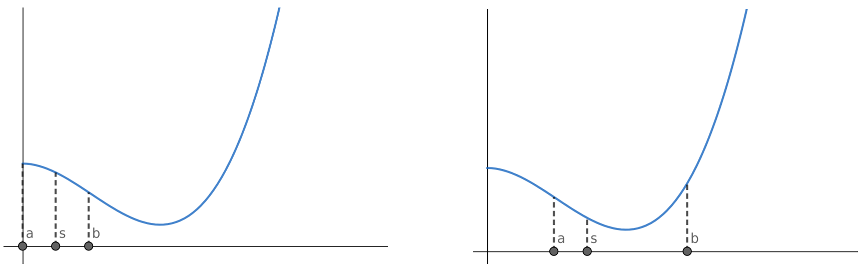


Figura 2: Primeira e última iterações da parte 1

Para encontrar o minimizador, agora com a proporção áurea, restringimos $[a, b]$ em subintervalos até que um intervalo de tamanho ϵ seja alcançado, usando o seguinte resultado: considerando φ uma função unimodal

(i) se $\varphi(v) \leq \varphi(u)$ e o intervalo $[a, u)$ é descartado, então o intervalo que sobrou $[u, b]$ contém pelo menos um minimizador.

(ii) se $\varphi(v) \geq \varphi(u)$ e o intervalo $(v, b]$ é descartado, então o intervalo que sobrou $[a, v]$ contém pelo menos um minimizador.

Disso temos ainda

- No método da razão áurea se $(v, b]$ é descartado então, $v_+ = u$.
- No método da razão áurea se $[a, u)$ é descartado então, $u_+ = v$.

Algorithm 2 Seção Áurea Parte 2: Encontra o minimizador

Entrada: $\epsilon > 0, \theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \theta_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \varphi(x), a, b$
$u \leftarrow a + \theta_1(b - a)$
$v \leftarrow a + \theta_2(b - a)$
while $|b - a| > \epsilon$ **do**
    if $\varphi(u) < \varphi(v)$ **then**
        $b \leftarrow v$
        $v \leftarrow u$
        $u \leftarrow a + \theta_1(b - a)$
    else
        $a \leftarrow u$
        $u \leftarrow v$
        $v \leftarrow a + \theta_2(b - a)$
    end if
end while
Saída: x correspondente ao menor entre $\varphi(a), \varphi(u), \varphi(v), \varphi(b)$

Figura 3: Algoritmo parte 2

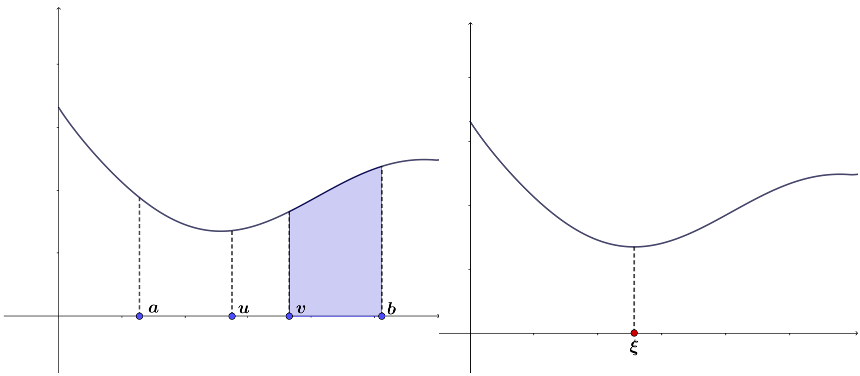


Figura 4: Primeira e última iterações da parte 2

Faremos comparações usando proporções diferentes, com o intuito de apresentar a eficiência do método da razão áurea. Essas comparações serão apresentadas no evento.

Referências

[1] FERNANDES, F. M. **Velocidade de convergência de métodos de otimização e irrestrita**. UFPR, 2010.

[2] KARAS, E.W. e RIBEIRO, A. A. **Otimização contínua: Aspectos teóricos e computacionais**, São Paulo: Cengage Learning, 2017.

Um algoritmo recursivo para o problema não rotulado de geometria de distâncias

Gustavo Café de Miranda *
Bacharelado em Física - UFSC
cafe.gustavo@gmail.com

Prof. Douglas S. Gonçalves (Orientador)
Departamento de Matemática - UFSC
douglas.goncalves@ufsc.br

Palavras-chave: Geometria de distâncias, Grafos, Algoritmos Build-up, estruturas homométricas, nanoestruturas.

Resumo: O estudo de geometria de distâncias tem uma longa trajetória na história da matemática, mas seu tratamento sistemático é recente. A primeira formulação explícita do problema fundamental (rotulado) de geometria de distâncias (PGD) é de 1978, e o primeiro livro integralmente dedicado ao seu estudo só foi publicado em 2013, segundo [3, pg.1]. O interesse no estudo de geometria de distâncias tem aumentado nos últimos anos com o desenvolvimento de nanotecnologias e nanoestruturas. Pois que muitas das propriedades de materiais nanoestruturados ou de moléculas complexas são determinadas pelas suas estruturas atômicas [2]. Experimentalmente, são utilizadas técnicas de cristalografia (espectroscopia) capazes de medir no material as distâncias interatômicas, mas não as posições dos átomos.

De maneira mais abstrata, trataremos o problema como sendo de vértices e arestas (isto é, nosso objeto é um grafo). De fato, não estaremos preocupados aqui com as aplicações do estudo, mesmo sendo diversas, mas sim com seu desenvolvimento por si só.

Imagine, então, que conhecemos uma *lista de distâncias* $D = (l_1, l_2, ..., l_m)$ de uma certa estrutura, e sabemos a quais pares de vértices cada distância está associada. O PGD clássico (ou rotulado) consiste em determinar, com estas informações, qual é a estrutura original. Neste estudo, trataremos de uma generalização deste problema, o problema *não-rotulado* de geometria de distâncias. Com "não-rotulado" queremos dizer que não sabemos a qual par de vértices cada distância está associada. Deste modo, temos que descobrir simultaneamente o *grafo* e uma *realização* para o mesmo.

Formalmente, podemos enunciar o PGD não rotulado da seguinte forma: dados $k \in \mathbb{Z}_+,\ J = \{1, ..., m\}$ e uma lista de distâncias $D = (l_1, l_2, ..., l_m)$, determine uma função injetiva $\alpha : J \to V \times V$, e uma realização $x : V \to \mathbb{R}^k$ tal que:

$$\forall \{u, v\} \in \alpha(J) : \quad \|x_u - x_v\| = l_{\alpha^{-1}(\{u,v\})}. \tag{1}$$

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica PIBIC/CNPq.

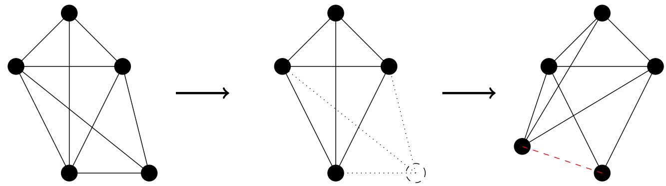


Figura 1: Caminho falso, e nova tentativa.

Neste caso, para $j \in J$, escrevemos $l_j = l_{\alpha^{-1}(\{u,v\})}$, pois $\alpha^{-1}(\{u,v\}) = j$. Assim, resolver o PGD não rotulado significa encontrar α^{-1} que associe os pares de vértices certos às distâncias dadas, de forma que a estrutura final, um par grafo e realização (G,x), denominado *estrutura*, seja condizente com a nossa lista de distâncias. Note que, dado um *assinalamento (ou atribuição)* α, o nosso problema se reduz a um PGD rotulado.

Para o PGD rotulado, os algoritmos mais estudados na literatura são do tipo *Build-up* [1]: inicialmente é construída uma subestrutura rígida, chamada *Core*. A seguir, os demais vértices/átomos são adicionados um por vez, usando *trilateração*, de modo a garantir que a estrutura parcial continue redundantemente rígida [1]. Neste estudo, consideramos uma adaptação de um algoritmo Build-up para o caso não rotulado.

No PGD não rotulado, como não sabemos a associação entre distâncias e arestas, tanto na construção do *Core*, quanto na trilateração, precisamos considerar todas as combinações de distâncias remanescentes. Além disso, diferentemente do caso rotulado, uma *validação cruzada* é necessária após o posicionamento de cada novo vértice. Consideramos então um algoritmo recursivo e exaustivo (que no pior dos casos testa todas as permutações de distâncias em D). Nossos experimentos foram restritos a $\mathbb{R}^2$ e para grafos *completos*, isto é, com $m = n(n-2)/2$ distâncias[1].

Sendo o algoritmo recursivo, o mesmo procura construir a estrutura e o assinalamento em paralelo e, quando não é bem sucedido em alguma etapa, retorna a etapa anterior e busca uma nova atribuição, como exemplificado na Figura 1.

Tal algoritmo pode ter vantagem sobre aqueles que buscam listar todas as atribuições primeiro para depois testar uma a uma pois, como resolve a atribuição e a construção paralelamente, então pode encontrar a estrutura desejada em alguma iteração intermediária. Infelizmente, no pior dos casos, é necessário testar todas as $m!$ atribuições.

O algoritmo descrito acima foi implementado em Octave, versão 5.1.0, e os testes realizados em um computador pessoal com Processador Intel Core i5-8250U 1.6Ghz, 8GB de RAM, e sistema operacional Ubuntu 18.04 .

A fim de verificar na prática o custo computacional, foram geradas instâncias aleatórias do PGD não rotulado da seguinte maneira. Consideramos n pontos gerados aleatoriamente no quadrado unitário $[0,1] \times [0,1]$, calculamos *todas* as distâncias entre pares de pontos e então geramos a lista D embaralhando tais distâncias.

A Tabela 1 apresenta os tempos médios (em segundos) para encontrar *uma* solução do PGD não rotulado. Foram consideradas 10 instâncias para cada n. Notamos que mesmo para encontrar apenas uma atribuição/realização o custo computacional cresce exponencialmente.

[1] Aqui n indica o número de vértices do nosso grafo.

n	m	tempo (s)
5	10	0.2
6	15	0.86
10	45	10.5
15	105	67.2
20	190	525
25	300	4761

Tabela 1: Resultados computacionais para instâncias com poucos vértices.

Nestes testes, o algoritmo foi interrompido ao se encontrar o primeiro par *atribuição*, *estrutura* compatível com a lista de distâncias. No entanto, diferentemente do PGD rotulado, o conhecimento de todas as $n(n-1)/2$ distâncias não implica em solução única no caso não rotulado. Podem existir estruturas, provenientes de diferentes atribuições, que sejam compatíveis com a mesma lista de distâncias, mas que não são *congruentes* (uma não pode ser transformada na outra por movimentos rígidos). A Figura 2 apresenta um exemplo de tais estruturas, chamadas de *fracamente homométricas*.

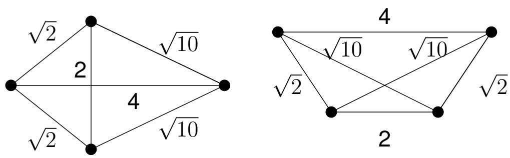


Figura 2: Estruturas fracamente homométricas.

O algoritmo sequencial para o PGD não rotulado aqui estudado é apenas uma proposta inicial de adaptação dos algoritmos de Build-up para o PGD clássico. Muita pesquisa ainda é necessária para desenvolver métodos eficientes para o problema não rotulado, sobretudo em situações práticas nas quais, em geral, os dados são incompletos e com ruído.

Referências

[1] BILLINGE, S. J. L., DUXBURY, P.M., GONÇALVES, D.S., LAVOR, C., MUCHERINO, A. Recent results on assigned and unassigned distance geometry with applications to protein molecules and nanostructures. **Annals of Operations Research**, 271, 161–203, 2018.

[2] DUXBURY, P.M., GRANLUND L., GUJARATHI, S.R., JUHAS, P., BILLINGE, S.J.L. The unassigned distance geometry problem. **Discrete Applied Mathematics**, v. 204, p. 117–132, 2016.

[3] LAVOR, C., LIBERTI, L. Um convite à Geometria de Distâncias. São Carlos, SP:SBMAC, 2014.

Método de Nelder-Mead com Reinício Orientado

João Luis Ribeiro Okimoto
Bacharelado em Ciência Da Computação - UFPR
joaoluisok@gmail.com

Prof. Abel Soares Siqueira (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
abel.s.siqueira@gmail.com

Palavras-chave: Otimização, Sem derivadas, Nelder-Mead.

Resumo:

Em problemas de Otimização, nem sempre é possível obter informações sobre as derivadas da função avaliada. A função que deseja-se minimizar, por diversas razões, pode não ser contínua, diferencíavel ou exige alto custo computacional. É neste contexto que a Otimização sem derivadas busca soluções e algoritmos que permitem minimizar tais funções. Neste trabalho, o método sem derivadas de interesse é o de Nelder-Mead, um método clássico e bastante utilizado pela sua simplicidade e performance, além de sua variante com reinício orientado.

Abordaremos o problema de Otimização da forma

$$\text{Minimizar } f(x)$$
$$\text{Sujeito a } x \in \Omega.$$

No qual $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$, o que torna o problema irrestrito. O objetivo deste trabalho é expor como o método de Nelder-Mead busca solucionar o problema, e como é possível através de um critério de reinício, melhorar sua convergência.

O método de Nelder-Mead consiste na manipulação de um simplex

$$\mathrm{V_k} = (x_1^k, x_2^k, .., x_{n+1}^k)$$

com $n + 1$ vértices na k-ésima iteração do algoritmo, no qual cada vértice corresponde a um ponto $x_i \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. O simplex é gerado de forma que

$$f(x_1^k) \leq f(x_2^k) \leq ... \leq f(x_{n+1}^k).$$

A partir disso, o algoritmo utiliza operações de reflexão, expansão, contração e encolhimento para substituir o ponto com maior valor de função x_{n+1}^k em cada iteração, reordenando o simplex.

O método possui uma variação, a adição de um critério de parada adotado por C.T Kelley em [4], e como é possível a partir deste critério, reiniciar o algoritmo de forma a

melhorar sua convergência. O critério de Kelley é análogo ao critério de Armijo, porém, não utiliza o gradiente da função avaliada. Ele exige que a iteração $k+1$ satisfaça

$$f(x_1^{k+1}) - f(x_1^k) < -c\,\|g(V_k)\|^2,$$

no qual $c > 0$ e $g(V_k)$ é o gradiente simplex associado ao simplex V_k, definido como

$$g(V_k) = D(V_k)^{-T}\delta(V_k),$$

dado que

$$D(v_k) = (x_2^k - x_1^k,\ \dots, x_{n+1}^k - x_1^k),$$

e

$$\delta(V_k) = (f(x_2^k) - f(x_1^k),\ \dots, f(x_{n+1}^k) - f(x_1^k))^T.$$

Neste estudo, também serão feitas implementações do método com e sem reinício orientado, de modo a compará-los em relação ao tempo de execução e convergência. A implementação será feita na linguagem Julia, enquanto que a criação do perfil de desempenho de cada variação será baseada na biblioteca de problemas CUTEst.

Referências

[1] FRIEDLANDER, A. **Elementos de Programação Não-Linear**. Campinas : Pontes. 1994.

[2] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. New York: Springer. 2006.

[3] BAUDIN, M. **Nelder-Mead User's Manual**. Consortium Scilab - Digiteo. 2010

[4] KELLEY, C.T. **Iterative Methods for Optimization**. SIAM : Philadelphia. 1999.

Programação semidefinida aplicada a completamento de matrizes

Kevin Voigt *
Bacharelado em Física - UFSC
kevin.voigt.53@gmail.com

Prof. Douglas Gonçalves
Departamento de Matemática - UFSC
douglas.goncalves@ufsc.br

Palavras-chave: Otimização, completamento de matrizes, recuperação de imagens.

Resumo:

No problema de completamento de matrizes nos é dado um subconjunto aleatório de entradas de uma dada matriz, e é do nosso interesse preencher as entradas faltantes tal que a matriz resultante tenha o menor posto possível. Esse problema tem aplicações em cenários de aprendizado de máquina, onde nos é dado um número limitado de amostras de um processo cuja matriz de covariância tem posto pequeno e nos interessa estimar os dados faltantes [1].

De forma geral, o problema é descrito como: dadas apenas algumas entradas $(i, j) \in \Omega \subset \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ de uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, resolva

$$\begin{aligned} \min_{X} \quad & \text{rank}(X) \\ \text{s.a} \quad & X_{ij} = M_{ij}, \ \forall (i, j) \in \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

em que rank(X) denota o posto da matriz X.

Em [2, Seção 3] o conceito de isometria restrita (RIP), importante no contexto de *compressed sensing*, é generalizado para o problema de completamento de matrizes. Com isso é possível mostrar que, se (1) satisfaz RIP, o problema é equivalente a:

$$\begin{aligned} \min_{X} \quad & \|X\|_* \\ \text{s.a} \quad & X_{ij} = M_{ij}, \ \forall (i, j) \in \Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

em que $\|X\|_*$ denota a *norma nuclear* da matriz X, que corresponde a soma de seus valores singulares.

Usando uma caracterização da norma nuclear em termos de programação semidefinida e explorando a teoria de dualidade, podemos reescrever o problema (2) como o seguinte problema de programação semidefinida:

*Bolsista IC/CNPq – Processos 167333/2017-8 e 167992/2018-0.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,(W_1) + \mathrm{tr}\,(W_2)) \\
\text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} W_1 & X \\ X^T & W_2 \end{bmatrix} \succeq 0 \\
& \mathcal{A}(X) = b,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

em que $\mathcal{A}$ é um operador linear que nos permite escrever as restrições $X_{ij} = M_{ij}$, $\forall(i,j) \in \Omega$ na forma $\mathcal{A}(X) = b$, $\mathrm{tr}\,(.)$ denota o traço de uma matriz e $Y \succeq$ significa que Y deve ser simétrica positiva semidefinida.

Para resolução de (3) utilizamos o ambiente MATLAB, e pacote SeDuMi [3], que é um solver para problemas de otimização sobre cones convexos auto-duais. Para a modelagem, utilizamos a ferramenta YALMIP [4], que nos permite de forma simples, descrever um problema de programação semidefinida. A seguir o YALMIP coloca o problema na forma padrão antes de passar os dados para o solver.

Como caso de estudo, resolvemos trabalhar com a recuperação de imagens com pixels faltantes. Enxergaremos nossa imagem inicial como uma matriz M, onde apenas conhecemos as entradas $M_{ij},\ \forall(i,j) \in \Omega$. Assumindo que M tem posto pequeno, queremos então encontrar uma matriz X tal que esta recupere de forma razoável os pixels não definidos para a matriz M.

Para testar a formulação (3) e verificar a influência do número de entradas faltantes e do posto da imagem original, geramos uma matriz M para a qual conhecemos todas as entradas, e então, de forma aleatória, retiramos parte das entradas. A seguir tentamos reconstruir a imagem de posto baixo resolvendo (3).

A imagem utilizada está na Figura 1, junto com nosso resultado de recuperação da imagem com 55% de dados removidos. Para avaliar a qualidade da solução consideramos dois tipos de erros distintos: o erro absoluto nas entradas $\|M - X\|_F$ e o erro relativo no posto $\|(rank(M) - rank(X))\| / (rank(X))$.

Figura 1: Exemplo de completamento com 55% dos dados removidos

Rodando nosso algoritmo de forma sistemática para várias porcentagens de fornecimento de dados, conseguimos gerar dois gráficos dos erros em função da quantidade de dados fornecidos, como mostra a Figura 2.

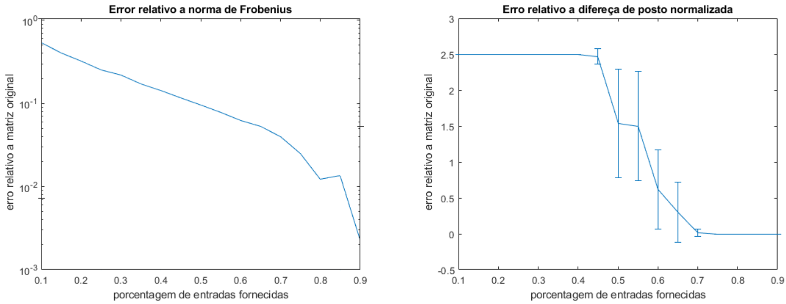


Figura 2: Erro de Frobenius pela % de dados fornecidos (esquerda). Erro do posto pela % de dados fornecidos (direita).

Analisando os resultados vemos que, para este estudo de caso, a abordagem é satisfatória na recuperação da imagem desde que uma quantidade suficiente de dados seja fornecida. Observamos também que existe um limiar a partir do qual o erro passa a decair mais rapidamente, ponto esse que coincidiu com o momento onde conseguimos recuperar o posto da matriz completa através de nosso método.

Apesar de tratarmos da recuperação de imagens, este método pode ser usado para completamento de matrizes de posto baixo arbitrárias, desde que a propriedade de isometria restrita seja satisfeita.

Referências

[1] Candès, E. J.; Plan, Y. Matrix completion with noise. **In Proceedings of the IEEE**, v. 98, n. 6, p. 925–936, 2010.

[2] Recht, B.; Fazel, M.; Parrilo, P. A. Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization. **SIAM Review**, v. 52, n. 3, p. 471–501, 2010.

[3] Sturm, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization oversymmetric cones. **Optimization Methods and Software**, v. 11, p. 625–653, 1999.

[4] Lofberg, J. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. **In Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation**, New Orleans, LA, p. 284-289, 2004.

Programação Quadrática Sequencial com Região de Confiança

Rodrigo Souza Garcia Redondo
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
rodrigoredondo0@gmail.com

Prof. Abel Soares Siqueira (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
abelsiqueira@ufpr.br

Palavras-chave: Programação Quadrática Sequencial, Otimização com Restrições, Julia.

Resumo:

O método de **Programação Quadrática Sequencial** (**PQS**) é um método iterativo para resolver problemas de otimização com restrições. Nesse projeto trabalharemos apenas com restrições de igualdade, ou seja,

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.a.} \quad c(x) = 0, \tag{1}$$

onde f, c_i: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, m$ e $c(x) = (c_1(x), \ldots, c_m(x))$ são duas vezes continuamente diferenciáveis.

O método **PQS** consiste em resolver uma sequência de problemas quadráticos da forma

$$\min_{d\in\mathbb{R}^n} \tfrac{1}{2}d^TW_kd + g_k^Td \quad \text{s.a.} \quad A_kd + c_k = 0, \tag{2}$$

com $c_k = c(x_k)$, $g_k = \nabla f(x_k)$, $A_k = J_c(x_k)$ (a matriz jacobiana de c) e

$$W_k = \nabla^2 f(x_k) - \sum_{i=1}^{m}(\lambda_k)_i \nabla^2 c_i(x_k).$$

Geramos, a partir de x_0 e λ_0 dados, as sequências $x_{k+1} = x_k + d_k$ e $\lambda_{k+1} = \mu_k$, em que d_k e μ_k são, respectitivamente, a solução e o multiplicador de Lagrange ótimos do k-ésimo problema dado em (2).

Considerando algumas hipóteses a respeito das matrizes W_k e A_k, pode se mostrar que a sequência $\{(x_k, \lambda_k)\}$ converge quadraticamente para a solução e o multiplicador de Lagrange ótimos de (1), quando x_0 e λ_0 estão suficientemente próximos da solução.

Uma maneira de globalizar o método, como visto em (Lalee et al. [1]), é considerar um controle de passo, nesse projeto iremos usar o método de **Região de Confiança** considerando a nova sequêcia de problemas

$$\begin{aligned} \min_{d\in\mathbb{R}^n} \quad & \tfrac{1}{2}d^T W_k d + g_k^T d \\ \text{s.a.} \quad & A_k d + c_k = 0 \\ & \|d\| \leq \Delta_k, \end{aligned} \tag{3}$$

onde Δ_k representa o tamanho da região de busca do passo d_k.

Os problemas na forma de (3) podem ser infactíveis, assim no lugar de resolvê-los diretamente, vamos, para cada problema, resolver dois subproblemas. Para isso vamos quebrar o passo em dois passos $d_k = v_k + w_k$.

O primeiro passo v_k tenta aproximar uma solução do sistema linear $A_k v = -c_k$ usando **Quadrados Mínimos** com **Restrição de Caixa**. Para manter espaço para a direção w_k, exigimos que $\|v\| \leq \alpha\Delta_k$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Dessa forma definimos o subproblema **Normal** por

$$\begin{aligned} \min_{v\in\mathbb{R}^n} \quad & \tfrac{1}{2}\|A_k v + c_k\|^2 \\ \text{s.a.} \quad & \|v\| \leq \alpha\Delta_k. \end{aligned}$$

Já o passo w_k é escolhido minimizando a função objetivo de (3), exigindo que ele não “atrapalhe” a solução do passo Normal. Para tanto, forçamos que $A_k d_k = A_k v_k$, ou seja $A_k w_k = 0$. Daí, se Z_k é a matriz cujas colunas formam uma base para o núcleo de A_k, então $w_k = Z_k u_k$, onde u_k resolve o seguinte subproblema que chamamos de **Tangente**:

$$\begin{aligned} \min_{u\in\mathbb{R}^{n-m}} \quad & \tfrac{1}{2}u^T Z_k^T W_k Z_k u + (W_k v_k + g_k)^T Z_k u \\ \text{s.a.} \quad & \|Z_k u\| \leq \sqrt{\Delta_k^2 - \|v_k\|^2}. \end{aligned}$$

Assim, o passo de PQS com região de confiança fica definido como $d_k = v_k + Z_k u_k$. Nesse processo perdemos a atualização de λ_k, por isso o aproximamos resolvendo o problema de quadrados mínimos

$$\min_{\lambda\in\mathbb{R}^m} \tfrac{1}{2}\left\|A_k^T\lambda + g_k\right\|^2,$$

referente à uma das condições necessárias de **KKT**. Implementamos o método na linguagem Julia.

Além do artigo de Lalee et al. [1] usamos também os livros de Nocedal and Wright [2] e Ribeiro and Karas [3].

Referências

[1] M. Lalee, J. Nocedal, and T. Plantenga. On the implementation of an algorithm for large-scale equality constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 8(3): 682–706, 1998. doi: 10.1137/s1052623493262993.

[2] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer New York, 2006. doi: 10.1007/978-0-387-40065-5.

[3] A. A. Ribeiro and E. W. Karas. *Otimização Contínus: Aspectos Teóricos e Computacionais*. Cengage Learning, 2013.

Árvores de Decisão e Aplicações

João Victor da Silva e Talia Correia Schulz *
Bacharelado em Matemática - UFPR
josilva602@gmail.com e taliacschulz@gmail.com

Prof. Dr. Lucas Garcia Pedroso (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
lucaspedroso@ufpr.br

Palavras-chave: árvore de decisão, machine learning, florestas aleatórias.

Resumo

Neste trabalho estudamos os métodos que utilizam árvores de decisão. As árvores de decisão (*Decision Trees*) são modelos de classificação ou regressão no grupo de apredizado de máquinas supervionado. Um dos motivos de se utilizar esse método é que os resultados são simples de serem convertidos em decisões práticas.

A estrutura de uma árvore de decisão (Figura 1) consiste basicamente em um nó raiz, os nós internos e as folhas. O nó raiz é a melhor divisão binária inicial que podemos fazer, já os nós internos são subdivisões que dependem dos nós superiores, e por fim temos as folhas ou regiões que são as predições.

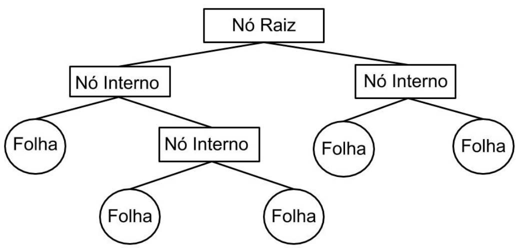


Figura 1: Estrutura de uma árvore de decisão.

Em teoria as regiões não têm nenhuma forma definida, entretanto escolhemos caixas para simplificar a interpretação dos resultados. Na classificação, para fazer tais separações utilizamos critérios baseados na impureza dos dados, ou seja, medidas

*Alunos Pesquisadores no Grupo Ciência de Dados, Aprendizagem de Máquina e Otimização (CiDAMO) que associam o grau de incertezas a respeito de um determinado conjunto. Alguns desses critérios são a entropia (D) e o índice de Gini (G), que são definidos como,

$$G = \sum_{k=1}^{K} \hat{p}_{mk}(1 - \hat{p}_{mk})$$

$$D = -\sum_{k=1}^{K} \hat{p}_{mk} \ln(\hat{p}_{mk})$$

onde, $\hat{p}_{mk}$ é a proporção das observações no treino na m-ésima região que pertence à k-ésima classe.

Já para a regressão, as regiões $R_1, \cdots, R_J$ são construidas com o intuito de minimizar a soma dos resíduos quadrados (SRQ), dada por,

$$SRQ = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i \in R_j} (y_i - \hat{y}_{R_j})$$

no qual, $\hat{y}_{R_j}$ é a média dos valores em R_j e y_i é o valor real das observações.

O processo descrito acima pode nos levar ao *overfitting*, isto é, um subreajuste no conjunto de dados, por isso algumas técnicas podem ser implementadas. Uma árvore menor pode nos levar a uma previsão melhor do conjuto de dados. Uma alternativa é cultivar uma árvore muito grande T_0, e depois podá-la para obtermos uma subárvore.

A poda de complexidade de custo (poda de elos mais fracos) nos dá uma maneira de fazer exatamente isso, em vez de considerar todas as subárvores possíveis, consideramos uma sequência de árvores indexadas por um parâmetro de penalidade α. Cada valor de α corresponde a uma subárvore $T \subset T_0$ que é tão pequena quanto possível, onde queremos determinar o melhor α que minimiza a seguinte expressão,

$$\sum_{m=1}^{|T|} \sum_{i: x_i \in R_j} (y_i - \hat{y}_{R_j})^2 + \alpha|T| \tag{1}$$

e denotamos aqui o número de folhas como $|T|$, e R_j é a região j. Quando $\alpha = 0$ então $T = T_0$. Quando α aumenta, há um preço a pagar por ter uma árvore com muitas folhas, e assim a quantidade (1) tenderá a ser minimizada.

As árvores são modelos com alta variância. Uma solução para este problema é utilizar o método da Floresta Aleatória (*Random Forest*), no qual criaremos vários conjuntos de dados, onde os dados podem ser repetidos dentro de cada conjunto, o que é chamado de agregação *bootstrap*. Para cada conjunto *bootstrap* gerado, contruiremos uma árvore onde em cada nó apenas uma parte desse conjunto é utilizado, o que gera uma descorrelação entre as árvores.

Referências:

FRIEDMAN, J.; HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R.**The Elements of Statistical Learning**: Data Mining, Inference, and Prediction. 2. ed. New York: Springer, 2009.

JAMES, G.; WITTEN, D.; HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R. **An Introduction to Statistical Learning**: With Applicaton in R. 1. ed. New York: Springer, 2013.

Método do gradiente espectral projetado aplicado na determinação de estruturas proteicas.

Vinícius D. Cerutti *
Bacharelado em Matemática - UFSC
vinicius.douglas.cerutti9@gmail.com

Prof. Dr. Douglas S. Gonçalves (Orientador)
Departamento de Matemática - UFSC
douglas.goncalves@ufsc.br

Palavras-chave: Geometria de Distâncias, gradiente espectral projetado, busca linear não monótona, estruturas moleculares.

Resumo: O problema fundamental de Geometria de Distâncias (PGD) é um problema inverso que consiste em determinar posições $X_i \in \mathbb{R}^K$ para objetos em um conjunto V a partir de distâncias $d_{i,j}$, indexadas por $\{i,j\} \in E \subset V \times V$, entre alguns pares de objetos [**?**]. Tal problema pode ser formulado como um sistema de equações não-lineares:

$$\|X_i - X_j\|^2 = d_{i,j}^2, \quad \forall \{i,j\} \in E. \tag{1}$$

Esse problema encontra aplicações em diversas áreas da ciência e engenharias, por exemplo, na determinação de estruturas de proteínas com base em dados experimentais [**?**].

No entanto, os experimentos não são capazes de fornecer distâncias exatas, mas apenas um intervalo que contém a distância correta: $d_{i,j} \in [l_{i,j}, u_{i,j}]$.

Nesse contexto surge o que chamamos de *Problema de Geometria de Distâncias Intervalar* [**?**]: encontre (se possível) uma função $X : V \to \mathbb{R}^K$ tal que

$$l_{i,j}^2 \leq \|X_i - X_j\|^2 \leq u_{i,j}^2, \quad \forall \{i,j\} \in E, \tag{2}$$

em que $\|.\|$ denota a norma Euclidiana e $X_i := X(i)$. É conhecido da literatura que tal problema é NP-Difícil [**?**].

Neste trabalho, baseado em [**?**], reformulamos (**??**) como o problema de minimizar as violações nas restrições das distâncias:

$$\begin{aligned} \underset{X,y}{\text{Minimizar}} \quad & \sum_{\{i,j\} \in E} (\|X_i - X_j\| - y_{i,j})^2 := \sigma(X,y) \\ \text{sujeito a} \quad & l_{i,j} \leq y_{i,j} \leq u_{i,j}, \ \ \forall \{i,j\} \in E. \end{aligned} \tag{3}$$

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica PIBIC/CNPq.

A função objetivo $\sigma(X, y)$ de (**??**) é um caso particular de uma função conhecida na literatura como função $STRESS$ [**?**].

Sabe-se que σ é diferenciável se e somente se $\|X_i - X_j\| > 0$ para todo $\{i, j\} \in E$ tal que $y_{i,j} > 0$, o que é comum em problemas de determinação de estruturas de proteínas [**?**], foco deste trabalho.

Temos então o problema de minimizar $\sigma(X, y)$ restrita ao conjunto viável

$$\Omega = \{(X, y) \in M_{n\times 3}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{|E|} \mid l_{i,j} \le y_{i,j} \le u_{i,j}, \forall \{i, j\} \in E\}.$$

Usando a notação $Z = (X, y)$, não é difícil ver que a projeção de Z em Ω é dada por $P_\Omega(Z) = \overline{Z} = (X, \overline{y})$ em que $\overline{y}_{i,j} = \min \{u_{i,j}, \max \{l_{i,j}, y_{i,j}\}\}, \forall \{i, j\} \in E$.

Assim, para resolver (**??**) consideramos o Método do Gradiente Espectral Projetado discutido em detalhes em [**?**], com uma estratégia de busca linear não monótona [**?**]. Basicamente, dado um iterado Z_k, determina-se um ponto intermediário através do método do gradiente com passo de Barzilai-Borwein. Em seguida, esse ponto é projetado sobre o conjunto viável, obtendo $\bar{Z}_k \in \Omega$, e definimos o novo iterado como $Z_{k+1} = Z_k + t_k(\bar{Z}_k - Z_k)$, em que $t_k > 0$ é um tamanho de passo adequado.

O método foi implementado em Python e para os experimentos numéricos consideramos instâncias geradas artificialmente a partir de estruturas de proteínas disponíveis no PDB [**?**]. As distâncias intervalares foram geradas de modo a simular resultados experimentais.

Em todas as instâncias, usamos como ponto inicial a solução conhecida acrescida de uma ligeira perturbação nas suas coordenadas. Mais especificamente, acrescentamos um ruído Gaussiano em cada uma de suas coordenadas.

Para medir a qualidade das soluções obtidas, usamos as seguintes medidas de erro [**?**]:

1. RMSD (*Root Mean Square Deviation*): Raiz quadrada do erro médio entre as posições ponto a ponto de duas estruturas, centralizadas e alinhadas.

2. MDE (*Mean Distance Error*): Média das violações das distâncias.

A Tabela **??** apresenta o PDB-id de cada proteína considerada, seu número total de átomos N_a e o número de distâncias $|E|$. Para cada instância apresentamos os valores funcionais, RMSDs e MDEs iniciais e finais, número de iterações k, total de *Backtrackings* (Bck) e tempo computacional t em segundos.

Podemos notar uma redução considerável no valor da função STRESS, bem como uma melhoria significativa nas medidas de erro RMSD e MDE, o que fica evidenciado na Figura **??**.

Concluímos que a abordagem proposta para o problema de Geometria de Distâncias Intervalar apresentou resultados satisfatórios. Uma limitação é o caráter local do método de gradiente espectral projetado, o que torna os resultados bastante dependentes do ponto inicial adotado. Em trabalhos futuros, pretendemos estudar métodos alternativos para determinar pontos iniciais adequados para então aplicar o método aqui proposto. Uma possibilidade é considerar uma relaxação convexa para o problema (**??**) via programação semidefinida.

Proteína	N_a	$\|E\|$	σ_i	$RMDS_i$	MDE_i	σ_f	$RMSD_f$	MDE_f	k	Bck	t
2Y2A	52	508	392.9	0.580	0.285	$3.0 \cdot 10^{-5}$	0.041	$1.4 \cdot 10^{-3}$	106	12	3.12
IKYJ	69	963	698.8	0.583	0.245	$5.9 \cdot 10^{-2}$	0.035	$7.4 \cdot 10^{-4}$	206	52	3.45
2JMY	282	7884	5948.3	0.467	0.220	$6.3 \cdot 10^{-4}$	0.030	$1.6 \cdot 10^{-4}$	374	111	55.46
6CT4	335	8589	5982.9	0.431	0.255	$4.0 \cdot 10^{-4}$	0.015	$7.6 \cdot 10^{-5}$	283	71	41.33
5V0Y	349	9033	5880.0	0.420	0.218	$1.9 \cdot 10^{-4}$	0.024	$2.2 \cdot 10^{-4}$	404	144	64.25
6GNZ	419	11130	7326.7	0.387	0.241	$3.4 \cdot 10^{-4}$	0.014	$3.0 \cdot 10^{-5}$	468	165	94.73
5LM0	471	12928	9451.0	0.428	0.227	$5.0 \cdot 10^{-4}$	0.029	$1.6 \cdot 10^{-4}$	426	167	96.41
1DT4	514	9399	6047.9	0.357	0.200	$1.5 \cdot 10^{-4}$	0.019	$1.3 \cdot 10^{-4}$	264	81	42.29
6J12	520	13291	9345.4	0.405	0.214	$3.1 \cdot 10^{-4}$	0.031	$6.7 \cdot 10^{-5}$	359	124	82.07
6ITH	572	15305	10260.0	0.367	0.256	$3.6 \cdot 10^{-4}$	0.023	$7.6 \cdot 10^{-5}$	371	122	93.53

Tabela 1: Resultados numéricos.

image1.png

(a) Antes.

image2.png

(b) Depois.

Figura 1: Estrutura conhecida (em verde), aproximação inicial (em vermelho) e estrutura encontrada pelo método proposto (em azul). Proteína 6ITH.

Referências

[1] BIRGIN, E.G.; MARTÍNEZ, J.M.; RAYDAN, M. Spectral Projected Gradient Methods: Review and Perspectives, **Journal of Statistical Software**, v. 60, n. 3, p. 1–21, 2014.

[2] GLUNT, W.; HAYDEN, T.L.; RAYDAN, M. Molecular Conformation from Distance Matrices, **Journal of Computational Chemistry**, v. 14, p. 114–120, 1993.

[3] GONÇALVES, D. S. , MUCHERINO, A., LAVOR, C., LIBERTI, L. Recent advances on the interval distance geometry problem. **Journal of Global Optimization**, v. 69, n. 3, p. 525–545, 2017.

[4] GRIPPO, L., LAMPARIELLO, F., LUCIDI, S. A nonmonotone line search technique for Newton's method. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 23, p. 707–716, 1986.

[5] LIBERTI, L., LAVOR, C., MACULAN, N., MUCHERINO, A. Euclidean distance geometry and applications. **SIAM Review** v. 56, p. 3–69, 2014.

[6] DE LEEUW, J. Differentiability of Kruskal's stress at a local minimum, **Psychometrika**, v. 49, n. 1, p. 111–113, 1984.

[7] RCSB - Protein Data Bank, Dísponivel em: `http://www.rcsb.org/`, Acesso em: ago. 2019.