J3M

Jornada de Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática

2018

CADERNO DE RESUMOS

CADERNO DE RESUMOS
J3M 2018 - 4° EDIÇÃO

Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática - UFPR
PET Matemática - UFPR

Tutor PET - Mat.: Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam

Organização:
Bianca E. Wiltuschnig
Bruno P. Oleiro
Cezar A. Glislere
Danielly A. P. Santos
Gabriel A. Lima
Gabriel F. D. Stella
João A. F. L. Thomé
João V. Silva
Juliana P. Rodrigues
Larissa M. Sydorak
Letícia R. Oliveira
Lucas N. Giacomin
Marcel T. A. Souza
Matheus D. G. Melo
Talia C. Schulz
Victor G. P. C. Zerger
Vinicius A. Santos
Vinicius M. P. Santos

Design Gráfico: Gustavo H. S. Sarturi

Data do Evento: 06 a 09 de Novembro de 2018
Local: Auditório Superior - Prédio da Engenharia Química,
Centro Politécnico - UFPR

Site: www.petmatematica.ufpr.br

Curitiba, 05 de Novembro de 2018

Apresentação

Prezado leitor,

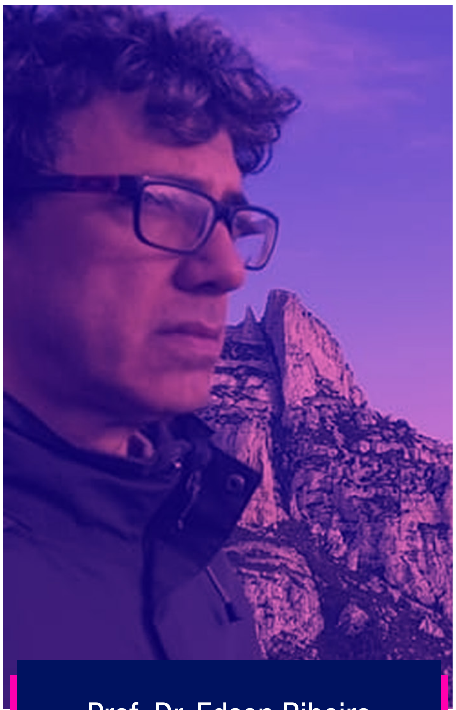
Com muita satisfação apresentamos o livro virtual de resumos da 4° Edição da J3M! Este é um evento idealizado, produzido e organizado pelos estudantes do Curso de Matemática que integram o grupo PET - Matemática (Programa de Educação Tutorial). A J3M nasceu do desejo de criar um ambiente adequado para apresentação dos trabalhos de Iniciação Científica desenvolvidos no âmbito do Departamento de Matemática da UFPR e tem se consolidade como um importante canal de comunicação do PET - Matemática com o Curso de Matemática da UFPR e demais universidades brasileiras.

Estão contempladas as áreas de Álgebra, Análise Matemática, Análise Numérica, Educação Matemática, Geometria, Otimização e Topologia. As bancas especializadas de avaliação são formadas por docentes e estudantes de pós-graduação. Como nas edições anteriores, serão concedidas distinções aos trabalhos que obtiveram as melhores avaliações por parte das bancas, como forma de incentivo aos participantes.

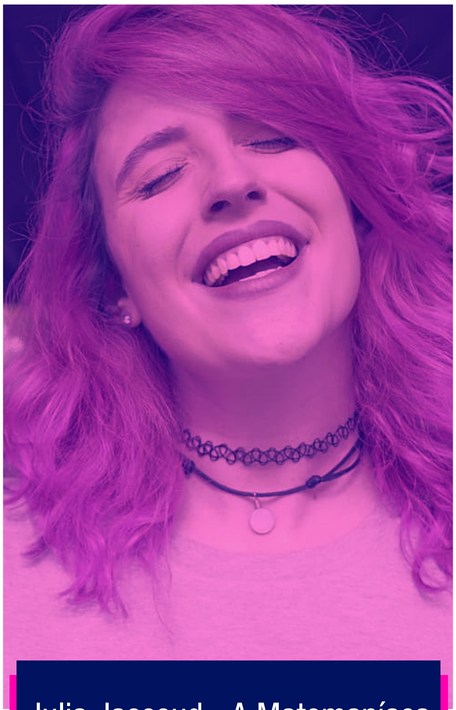
Registramos especiais agradecimentos aos integrantes do PET pela dedicação com a qual realizam todas as suas atividades e também aos docentes e estudantes de pós-graduação aos programas ligados ao DMAT pelo trabalho de excelência realizado nas bancas.

Prof. Dr. José Carlos Eidam
Tutor do PET - Matemática
Novembro/2018

Palestras



Prof. Dr. Edson Ribeiro



Julia Jaccoud - A Matemaníaca

Prof. Dra. Elisangela Campos

06 Nov.
Grothendieck e Bourbaki

08 Nov.
Matemática: Da formação à divulgação

09 Nov.
Qual profissional o curso de Licenciatura em Matemática da UFPR forma?

Programação

J3M 2018 - 1° DIA		
13:30	ABERTURA	
13:45	João Antonio Francisconi Lubanco	ÁLGEBRA A
14:00	Marcel Thadeu de Abreu e Souza	
14:15	Andrey Modtkoski Friedlaende	
14:30	Vitor Emanuel Gulisz	
14:45	Márcio Palmares Pinto de França	
15:00	Luiz Henrique Lara dos Santos	
15:15	Guilherme Barbosa dos Santos	
15:30	Pablo Patrick Silva Moraes	
15:45	Coffee Break	
16:15	Gabriel Alves de Lima	ÁLGEBRA B
16:30	Douglas Alves Gonzaga	
16:45	Karoline de Oliveira da Silva	
17:00	Rogério Otavio Mainardes da Silva	
17:15	Amanda Cristina Foetsch	
17:30	Gabriel Cordeiro Chileider	
17:45	Yasmim Adara Amorim	
18:00	Palestra: Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares	
19:00	Gabriel Felipe Dalla Stella	GEOM. & TOP.
19:15	João Vitor Parada Poletto	
19:30	Luna Rhaine Nascimento Oliveira	
19:45	Daniel José Schulmeiste	

SCAN ME

Resumos

Programação

J3M 2018 - 2° DIA		
13:30	Miriane Souza Bueno	OTIMIZAÇÃO
13:45	Fillipe Rafael Bianek Pierin	
14:00	Gustavo Cordeiro Libe	
14:15	Thaiza Rafaele dos Santos Rievrs	
14:30	Renan Oclides Domingues	
14:45	Letícia do Rocio Oliveira	ANÁLISE NUM.
15:00	Gustavo Henrique Silva Sarturi	
15:15	Raquel Ayumi Aita	
15:30	Wilian de Oliveira	
15:45	Coffee Break	
16:15	Bianca Elena Wiltuschnig	ANÁLISE MAT. A
16:30	Maria Verônica Bartmeyer	
16:45	Emanuela Pinheiro Quirrenbach	
17:00	Edvaldo Bandeira da Silva	
17:15	Diogo Luis Simm Salles Vianna	
17:30	Lucas Matheus Sandeski	
17:45	Vinicius Medeiros Prantl dos Santos	ANÁLISE MAT. B
18:00	Fernanda Dartora Musha	
18:15	Elis Regina Halitski	
18:30	Bernardo Ramos de Godoy	
18:45	Eduardo Pelanda Amaro	
19:00	José Mauricio Finco Mendonça	

SCAN ME

Resumos

Programação

J3M 2018 - 3° DIA		
13:30	Letícia Ferreira Gomes	EDUCAÇÃO MAT. A
13:45	Yuri Farias Lima	
14:00	Guilherme Oliveira Santos	
14:15	Ana Beatriz de Oliveira	
14:30	Eduardo Henrique da Costa	
14:45	Lohana Caroline Cornelius	
15:00	Viviane Mauricio	
15:15	Jéssica Tomiko Araújo Mitsuuchi	
15:30	Coffee Break	
16:00	Palestra: Julia Jaccoud - A Matemaníaca	
17:00	Bianca Elena Wiltuschnig	EDUCAÇÃO MAT. B
17:15	João Victor Bezerra	
17:30	Elvira de Lourdes de Oliveira	
17:45	Higor Afonso Candido Pinto	
18:00	Eduarda de Almeida Gomes	
18:15	Isabella Menotti Sabchez	
18:30	Cristine Tokarski Lima	

Resumos

Programação

J3M 2018 - 4° DIA

13:30	Otto Eiglmeier Neto	EDUCAÇÃO MAT. C
13:45	Daiane Chitko de Souza	
14:00	Stephany de Oliveira Theodoro	
14:15	Pâmela Ribas de Castro	
14:30	Gabriel Cordeiro Chileider	
14:45	Amanda Pasinato Cruz	
15:00	Beatriz Rocha Saraiva	
15:15	Coffee Break	
15:45	Natalia Mota Oliveira	EDUCAÇÃO MAT. D
16:00	Neumar Regiane Machado Albertoni	
16:15	Matheus Vieira do Nascimento Cardos	
16:30	Deivison José Gouvea	
16:45	Nathalie Aparecida Felicetti Luvison	
17:00	Keith Gabriella Flenik Morais	
17:15	Amanda da Rocha Ribeiro	
17:30	Palestra: : Profª. Dra. Elisangela de Campos	
18:30	Encerramento	

Resumos

Membros das Bancas Avaliativas

Álgebra A
Prof. Maria Eugênia Martin
Prof. Mari Sano
Prof. Cléber Barreto dos Santos

Álgebra B
Prof. Tanise Carnieri Pierin
Prof. Franscismar Ferreira Lima
Prof. Cristian Schmidt

Análise Matemática e Equações Diferenciais A
Prof. Nara Bobko
Prof. Bruno de Lessa Victor
Prof. Alexandre Arias

Análise Matemática e Equações Diferenciais B
Prof. Alexandre Kirilov
Prof. André Vianna Filho
Prof. Wagner Moraes
Prof. Ricardo Paleari

Análise Numérica
Prof. Elias Gudiño Rojas
Prof. Denise Siqueira
Prof. Willian Lesinhovski

Educação Matemática A
Prof. Camille B. Botke
Prof. Elisangela Campos
Prof. Alessandra Hendi dos Santos

Educação Matemática B
Prof. Marcelli Behm Goulart
Prof. Fernanda Hillman Furlan
Prof. Juliana Melo
Profa. Tania Teresinha Bruns Zimer

Educação Matemática C
Prof. José Carlos Cifuentes
Prof. Willian Valverde

Educação Matemática D
Prof. Neila Agranionih
Prof. Bruno Teilor
Prof. Elisangela Campos

Sumário

Álgebra

Teorema da decomposição cíclica

Amanda Cristina Foetsch *
Licenciatura em Matemática - UFPR
amandafoetsch@gmail.com

Prof. Dr. Matheus Batagini Brito (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
mbrito@ufpr.br

Palavras-chave: decomposição cíclica, forma canônica racional, espaço T-cíclico.

Resumo:
Quando estudamos operadores lineares em um espaço vetorial de dimensão finita V buscamos uma base de V em relação a qual a matriz do operador seja a mais simples possível. No caso em que V é um espaço T-cíclico é possível obter tal base por meio de um vetor v e múltiplas aplicações de T em v. No caso mais geral, ainda que lidemos com um espaço vetorial que não pode ser gerado de forma cíclica, podemos decompô-lo em soma direta de subespaços cíclicos.

O objetivo do trabalho é demonstrar o Teorema da Decomposição Cíclica, o qual garante que, dado um espaço de dimensão finita V e um operador linear T, existem vetores $v_1, ..., v_k$ em V, não nulos, tais que V pode ser decomposto em uma soma direta de subespaços cíclicos da forma $\mathscr{C}_i = \{f(T)(v_i) | f \in \mathbb{K}[x]\}$, em que $i = 1, ..., k$, ou seja

$$V = \mathscr{C}_1 \oplus \mathscr{C}_2 \oplus ... \oplus \mathscr{C}_k,$$

de forma que os polinômios minimais das restrições de T a $\mathscr{C}_j$ satisfazem certas condições de divisibilidade. A matriz de T obtida através dessa decomposição é conhecida como a *Forma Canônica Racional* de T. Uma das vantagens de se decompor o subespaço desta forma é que quando buscamos classificar operadores lineares mediante relação de equivalência a decomposição cíclica independe do corpo no qual estamos trabalhando, ou seja, o corpo não necessariamente deve ser algebricamente fechado.

Referências

[1] BROWN, William C.. **A Second Course in Linear Algebra**. Published in United States simultaneously in Canada: Wiley Interscience, 1943.

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME.

O Anel de Grothendieck de Categorias Finitas

Andrey Modtkoski Friedlaender
Licenciatura em Matemática - UFPR
andreymod@gmail.com

Prof. Dr. Eduardo Outeiral Correa Hoefel (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
hoefel@ufpr.br

Palavras-chave: categorias, R-álgebras, anéis de Grothendieck.

Resumo:

Dados um anel comutativo R e uma categoria $\mathcal{C}$ podemos construir um R-módulo livre $R\langle\mathcal{C}\rangle$ sobre $\mathcal{C}$, considerando seus elementos como morfismos de $\mathcal{C}$ em R, isto é, $R\langle\mathcal{C}\rangle = \{f \mid f : \mathcal{C} \to R\}$. Neste R-módulo podemos definir uma multiplicação (que garantirá uma estrutura de R-álgebra a $R\langle\mathcal{C}\rangle$) através de convoluções. Se f e g são dois morfismos em $R\langle\mathcal{C}\rangle$, definimos a convolução $f * g$ da seguinte maneira:

$$(f * g)(h) := \sum_{i \circ j = h} f(i)g(j)$$

onde h é uma flecha em $\mathcal{C}$. A R-álgebra $R\langle\mathcal{C}\rangle$ recebe o nome de anel de Grothendieck sobre a categoria $\mathcal{C}$.

Veremos que esta construção apresenta propriedades interessantes, dentre as quais destacaremos:

- $R\langle\mathcal{C}_1\rangle \oplus R\langle\mathcal{C}_2\rangle \cong R\langle\mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2\rangle$, isto é, a soma direta da R-álgebra sobre a categoria $\mathcal{C}_1$ e a R-álgebra sobre $\mathcal{C}_2$ será isomorfa à R-álgebra sobre o coproduto $\mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2$;
- $R\langle\mathcal{C}_1\rangle \otimes R\langle\mathcal{C}_2\rangle \cong R\langle\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2\rangle$, isto é, o produto tensorial da R-álgebra sobre $\mathcal{C}_1$ com a R-álgebra sobre $\mathcal{C}_2$ será isomorfo à R-algebra sobre o produto $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$.

A partir da definição dada, podemos tentar “classificar” os diferentes casos de anéis de Grothendieck que podem ser obtidos a partir de categorias finitas. Ou seja, dada uma categoria finita específica, buscaremos saber quais serão as características de seu anel de Grothendieck resultante. Com a coleta dessas informações, esperamos poder gerar mais exemplos de anéis de Grothendieck, a fim de responder à seguinte questão: dada uma R-álgebra A, é possivel dizer que existe uma categoria finita $\mathcal{C}$ tal que A seja o anel de Grothendieck de $\mathcal{C}$?

Como exemplos serão vistos os anéis de Grothendieck para os casos de categorias finitas triviais, posets finitos, posets lineares finitos, árvores finitas e grupoides finitos, dentre outros.

Referências:

ROTMAN, J. J. **Advanced modern algebra**. 2 ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.

ROTMAN, J. J. **An introduction to homological algebra**. 2 ed. New York: Springer, 2008.

Simetrias e grupoides

Douglas Alves Gonzaga *
Bacharelado em Matemática Aplicada - UEPG
douglasagonzaga@hotmail.com

Prof. Marcos Calçada (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
mcalcada@uepg.br

Palavras-chave: simetrias, grupos, grupoides.

Resumo:

A noção de simetria é fundamental em Matemática e em várias ciências, notadamente em Física e Química. Várias leis físicas e químicas são consequências da presença de uma simetria no sistema estudado. Por exemplo, a lei de conservação de momento linear ocorre se o sistema físico possuir uma simetria por translações. De maneira mais geral, o celebrado teorema de Noether estabelece de forma precisa uma conexão entre leis de conservação e simetrias.

Simetrias são descritas matematicamente utilizando a noção de grupo, pelo menos assim pensa a maioria dos cientistas e mesmo matemáticos. Entretanto, mesmo que grupos sejam suficientes para entender e caracterizar estruturas homogêneas (usando um grupo de automorfismos), há vários objetos que exibem o que claramente reconheceríamos como simetria, mas que admitem nenhum ou poucos automorfismos não triviais. Ocorre então que a simetria desses objetos pode ser descrita algebricamente em termos da noção de grupoide e não de grupos.

O objetivo deste trabalho é mostrar através de exemplos a relevância do conceito de grupoides no estudo de simetrias. Estudamos, em particular, um exemplo bastante elementar e instrutivo: o ladrilhamento de uma porção finita do plano utilizando ladrilhos retangulares. Neste exemplo, a noção de grupo mostra-se inadequada e a noção de grupoide natural.

Verificamos que grupoides podem ser entendidos como uma generalização de grupos em que a operação binária de composição não está definida para todo par de elementos, ou seja, é parcial. Outra forma de definir grupoides é como sendo uma categoria em que todo morfismo possui inverso. Por fim, podemos entender grupoides como uma generalização de relações de equivalência: um grupoide nos diz não apenas quais elementos são equivalentes (ou isomorfos), mas também parametriza as diferentes formas (isomorfismos) em que dois elementos podem ser equivalentes.

*Bolsista PICME.

Referências:

[1]WEINSTEIN, A. **Groupoids: Unifying Internal and External Symmetry.** Notices of AMS, vol. 43, Number 7, 1996.
[2]HIGGINS, P. J. **Notes on Categories and Groupoids.** London: Van Nostrand Reinhold, 1971.
[3]PINTER, C. C. **A Book of Abstract Algebra.** New York: 2nd ed., Dover, 2010.

Classificação das álgebras de divisão sobre os reais

Gabriel Alves de Lima [*]
Licenciatura em Matemática - UFPR
gabalvesdelima@gmail.com

Prof. Maria Eugênia Martin (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
eugenia@ufpr.br

Palavras-chave: classificação de álgebras, álgebras de divisão, álgebras alternativas.

Resumo:

Classificar objetos de certa classe é um dos problemas fundamentais da matemática moderna. Uma coleção de grande interesse para a matemática é a coleção de sistemas numéricos munidos de uma noção de divisão. No contexto da álgebra moderna, tais objetos são conhecidos como álgebras de divisão.

Uma álgebra A sobre um corpo $\mathbb{K}$ é uma *álgebra de divisão* se para todo par de elementos $a, b \in A$ com $b \neq 0$, existe um único $x \in A$ tal que $a = bx$ e um único $y \in A$ tal que $a = yb$. No caso em que a álgebra em questão for associativa, a definição é equivalente à dizer que todo elemento não nulo em A possui um inverso multiplicativo.

Para álgebras associativas sobre $\mathbb{R}$, o exemplo mais trivial é o próprio corpo dos números reais. É sabido que o corpo dos complexos $\mathbb{C}$ é uma extensão de $\mathbb{R}$ com $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. Será possível definir um produto num espaço vetorial de dimensão 3 sobre os reais de modo que se verifiquem os axiomas de corpo? O matemático irlandês W. Hamilton por muitos anos buscou uma solução para tal problema, mas não parecia ser possível obter um produto que desse origem à noção de divisão. Em 1843 surge a ideia de ao invés de dimensão 3, estender a construção para uma álgebra de dimensão 4. Hamilton acabara de descobrir os números hoje conhecidos como quatérnios, que em sua homenagem levam a notação $\mathbb{H}$. Dessa forma, Hamilton conseguiu generalizar os complexos, entretanto, acabou perdendo a comutatividade da multiplicação.

Em 1877, o matemático alemão F. Frobenius provou que estes são os únicos exemplos de álgebras associativas com divisão, completando assim a classificação das mesmas. Este fato é conhecido na literatura como “Teorema de Frobenius”:

Teorema de Frobenius *(1877): As únicas álgebras com divisão sobre os reais são (a menos de isomorfismo) o corpo dos números reais, o corpo dos números complexos e a álgebra dos quatérnios reais.*

[*]Bolsista do Programa PET-Matemática

Deixando a hipótese de associatividade de lado, é possível estender a construção de Hamilton para dimensão 8 obtendo-se assim a álgebra dos octônios $\mathbb{O}$, a qual obedece uma forma mais fraca de associatividade, as chamadas leis alternativas: $x(xy) = x^2y$ e $(yx)x = yx^2$. De modo geral, álgebras que satisfazem tais leis são chamadas de *álgebras alternativas*

Generalizando o resultado de Frobenius, pode-se provar também que toda álgebra alternativa de divisão sobre $\mathbb{R}$ com dimensão finita é isomorfa aos reais, complexos, quatérnios ou octônios.

O objetivo principal deste trabalho é estudar a construção das álgebras de divisão reais, provar a impossibilidade de existência de uma álgebra de divisão real de dimensão 3 e além disso, apresentar as ferramentas necessárias para entender o teorema de Frobenius e sua generalização para o caso de álgebras alternativas.

Referências:

CURTIS, M.; PLACE, P. **Abstract Linear Algebra**. Universitext, Springer New York, 1990.

FELZENSZWALB, B. **Álgebras de Dimensão Finita**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

ONETO, A. **Alternative real division algebras of finite dimension**. Divulgaciones Matemáticas, 10 (2002), pp. 161–169.

O Teorema de Lindemann e a transcendência de e e π

Gabriel Cordeiro Chileider *
Licenciatura em Matemática - UFPR
gabriel.chileider@ufpr.br

Prof.Dr. Marcelo Muniz Silva Alves (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
marcelomsa@ufpr.br

Palavras-chave: Teorema de Lindemann, Números Transcendentes, Números Algébricos.

Resumo:

Os números naturais surgiram pela necessidade da contagem, números racionais estão ligados a mensuração e os números reais estão associados a problemas do dia a dia, já os números complexos apareceram como soluções de equações cúbicas e quárticas. No entanto, os números podem ser relacionados a equações algébricas, como por exemplo os números algébricos. Um número complexo é chamado *algébrico* se é raiz de um polinômio não nulo, com coeficientes racionais. Caso contrário, é chamado *transcendente.*

A palavra transcendente significa, segundo Euler, que esses números transcendem o poder das operações algébricas. Mesmo sendo uma definição do século XVIII, a existência de números transcendentes continuou aberta até 1844 quando Liouville estabeleceu que para todo número algébrico α de grau n existe uma constante $A > 0$ tal que $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{A}{q^n}; \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Assim, qualquer número que não satisfaz tal propriedade é transcendente. O próprio Liouville construiu esses números, por exemplo $\sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!}$, que mais tarde ficou conhecido como *Constante de Liouville* é e considerado históricamente o primeiro número transcendente.

Em 1873 Hermite provou que e é transcendente e um ano depois Cantor demonstrou que existem mais números transcendentes do que algébricos, porém é um grande desafio provar a transcendência de um número. Em 1884, Lindemann utilizou o método de Hermite para provar que π é transcendente, mais tarde, Lindemann mostrou que a transcendência de e e π são casos particulares de um teorema mais geral, este teorema, que será apresentado a seguir.

*Bolsista do Programa Licenciar

Teorema de Lindemann: *Se $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ são números algébricos distintos, então $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, ..., e^{\alpha_m}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$.*

O Teorema de Lindemann é considerado um dos teoremas mais importantes na Teoria de Números Transcendentes, pois nos permite demonstrar de maneira imediata a transcendência de e e π, além de outros números oriundos das funções exponencial, logaritmica e trigonométricas. Uma pequena amostra da importância do Teorema de Lindemann é o seguinte corolário:

Corolário *Seja α algébrico sobre $\mathbb{Q}$ não nulo. Então e^{α} e π são transcendentes.*

O objetivo deste trabalho é justamente apresentar uma prova do Teorema de Lindemann, a qual envolve Extensões Normais de Corpos, o Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos e Análise Matemática. A ideia da prova consiste em supor, por contradição, que existe uma dependência linear entre os elementos $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, ..., e^{\alpha_m}$ e, a partir disso, utilizar as "ferramentas" acima para construir uma equação algébrica relacionando duas expressões: a primeira é uma soma de inteiros que não é divisível por nenhum primo suficientemente grande, e portanto é um inteiro não nulo; por sua vez, a segunda é uma integral que pode ser estimada e tem limite 0 quando enviamos um primo p para infinito. Deste modo, chega-se a uma contradição.

O Teorema de Lindemann fornece várias outras famílias de números transcendentes. De fato, segue como consequência imediata a transcendência dos números lnα, arcsenα, arccosα e arctanα para α algébrico, $\alpha \notin \{0, 1\}$.

Referências:

[1] FIGUEIREDO, D. **Números Irracionais e Transcendentes**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM (Coleção de Iniciação Científica), 2002.

[2] MARQUES,D. **Teoria dos Números Transcendentes.**1.ed. Rio de Janeiro: SBM (Textos Universitários), 2013.p165-176

Classificação dos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos de peso irredutíveis

João Antonio Francisconi Lubanco Thomé*
Bacharelado em Matemática - UFPR
jolubanco@gmail.com

Prof. Dr. Matheus Batagini Brito (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
mbrito@ufpr.br

Palavras-chave: álgebras de Lie, representações, classificação dos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos.

Resumo

No estudo da álgebra abstrata, muitas vezes é importante e eficiente trabalhar com suas representações. Para o caso particular de álgebras de Lie semi-simples de dimensão finita, a teoria de representação de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ desempenha um papel crucial. Neste trabalho focamos no estudo das representações da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e classificamos todos os seus módulos de peso irredutíveis.

Diremos que um módulo sobre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, ou um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-*módulo*, é um espaço vetorial V com três operadores lineares fixados, E, F e H em V satisfazendo as seguintes relações:

(i) $EF - FE = H$

(ii) $HE - EH = 2E$

(iii) $HF - FH = -2F$

Além disso, utilizaremos duas classes importantes de módulos: os irredutíveis e os de peso. Diremos que um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo V é *irredutível* se os únicos submódulos de V são os triviais e um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo V é dito *módulo de peso* se

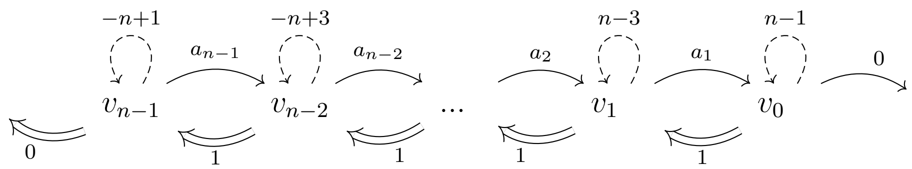
$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda$$

onde $V_\lambda = \{v \in V : H(v) = \lambda v\}$ para $\lambda \in \mathbb{C}$. Por fim, a classificação será dada a partir de quatro famílias de módulos, e para fazer suas construções definiremos as ações dos operadores E, F e H nos elementos da base, a partir dos diagramas abaixo, onde

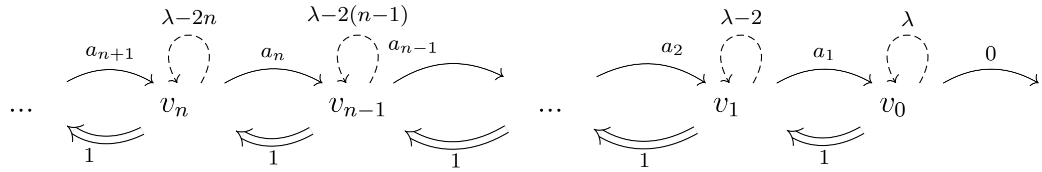
*Bolsista do Programa PET-Matemática.

as flechas simples representam as ações de E, as flechas duplas as ações de F e as pontilhadas as ações de H.

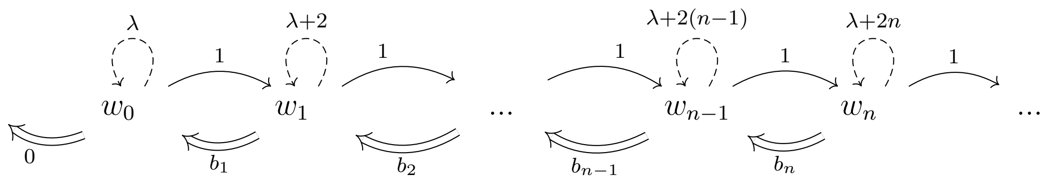
$V^{(n)}$: onde $a_i = i(n-i)$ com $n \in \mathbb{N}$



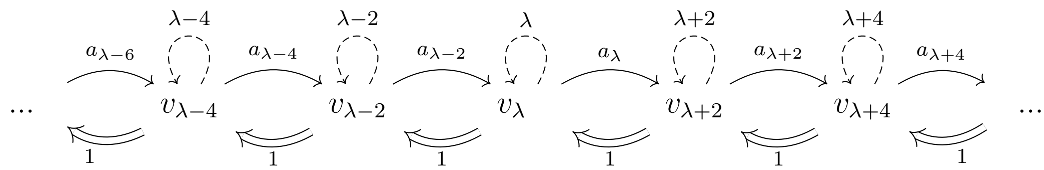
$M(\lambda)$: onde $a_i = i(\lambda - i + 1)$ com $\lambda \in \mathbb{C}$.



$\overline{M}(\lambda)$: onde $b_i = -i(\lambda + i - 1)$ com $\lambda \in \mathbb{C}$.



$V(\xi, \tau)$: onde $a_\lambda = \frac{1}{4}(\tau - (\lambda+1)^2)$ com $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$, $\lambda \in \xi$ e $\tau \in \mathbb{C}$.



Tais diagramas serão cruciais na classificação dos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos, pois analisaremos como os operadores E e F agem nos elementos da base de um módulo de peso V. Assim, a partir da construção destes módulos, temos o seguinte resultado de classificação.

Teorema 1 (Classificação dos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-Módulos de Peso Irredutíveis) *Cada $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo de peso irredutível é isomorfo a um dos seguintes módulos:*

(i) $V^{(n)}$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $M(\lambda)$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}_0$.

(iii) $\overline{M}(-\lambda)$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}_0$.

(iv) $V(\xi, \tau)$ *para algum* $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$ *e* $\tau \in \mathbb{C}$ *tal que* $\tau \neq (\mu+1)^2$ *para todo* $\mu \in \xi$.

Referências

[1] MAZORCHUK, V. **Lectures on $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-modules**. Imperial College Price, 2009.

[2] SAN MARTIN, L.A.B. **Álgebras de Lie**. 2. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2010.

[3] ROMAN, S. **Advanced Linear Algebra**. Springer-Verlag, 1992.

Transformações Geométricas e Álgebra vistas no Caleidoscópio

Karoline de Oliveira da Silva
Tecnologia em Design Gráfico - UTFPR
karoline.olisilva@gmail.com

Profª. Drª. Mari Sano (Orientadora)
Departamento Acadêmico de Matemática – UTFPR
marisano@utfpr.edu.br

Palavras-chave: caleidoscópio, teoria dos grupos, transformações geométricas, simetria.

Resumo:

O caleidoscópio é um instrumento óptico inventado pelo físico escocês David Brewster em 1817. Caracterizado pela forma cilíndrica, era composto por espelhos dispostos longitudinalmente no seu interior formando um prisma triangular. Numa das bases desse prisma, é colocado um recipiente translúcido contendo pequenos fragmentos coloridos que podem se mover e, na outra base, é feito um orifício de observação de modo tal que ao girar a estrutura os fragmentos refletidos pelos espelhos formam imagens múltiplas.

Os princípios físicos do caleidoscópio foram fundamentais para o desenvolvimento da óptica. No entanto, o caleidoscópio também é popularmente utilizado nas disciplinas de Ciências e Física devido às inúmeras representações, conceitos e propriedades geométricas que podem ser visualizados por meio dele. Ele ainda é uma maneira de apresentar a Matemática de uma forma lúdica. O caleidoscópio passou a ser usado como material didático por volta de 1950-1960 e com um formato diferenciado composto por um conjunto de espelhos planos (dois, três ou quatro), o que possibilita a obtenção repetida e perfeita de imagens. A imagem a seguir ilustra um modelo de caleidoscópio educativo.

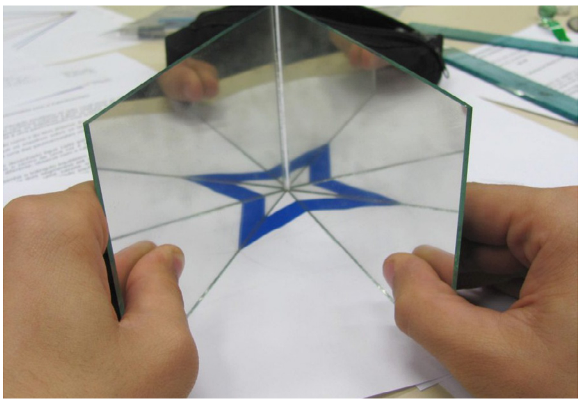


Figura 1: Caleidoscópio educativo.

Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivo utilizar o caleidoscópio para introduzir e entrelaçar conceitos básicos de transformações geométricas e teoria de grupos (em particular o grupo de simetrias). Para isso, foram estudadas as diferentes imagens formadas, variando conforme a quantidade e posição dos espelhos e, ainda, o comportamento destas imagens conforme os pontos e linhas de simetrias. Obtendo em alguns casos a reprodução de rosetas.

Referências:

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna. 4. ed.** São Paulo: Atual, 2003.

MARQUES, F. B. **Isometrias do plano e simetria**. 54 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) - Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2012.

NEVES, P. R. V. **O uso de caleidoscópios no ensino de grupos de simetria e tranformações geométricas**. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear. 2. ed.** São Paulo: Makron Books, 1987.

FIGURA 1: Caleidoscópio Educativo. Disponível em: <http://usp.br/semanact/2017/evento/matematica-dos-caleidoscopios-6/>. Acesso em: 16 ago. 2018

Teorema de Bézout para curvas algébricas

Luiz Henrique Lara dos Santos *
Bacharelado em Matemática - UFPR
luiz.lara@ufpr.com

Prof. Edson Ribeiro Alvares (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
rolo@ufpr.br

Palavras-chave: Curvas Algébricas, Teoria de Interseção, Teorema de Bézout.

Resumo: Em $\mathbb{R}^2$, polinômios do tipo $aX + bY$ (de grau 1) definem retas, assim como polinômios do tipo $aX^2 + bY^2 - c$ (de grau 2) definem circunferências ou elipses enquanto outras equações de grau 2 definem parábolas, hipérboles, etc. Todos esses são exemplos de curvas algébricas. Mais precisamente, uma curva algébrica sobre um corpo k, dada por um polinômio $F \in k[X, Y]$ é o conjunto

$$V(F) = \{(x, y) \in k^2 \mid F(x, y) = 0\}.$$

Estudando curvas algébricas sobre $\mathbb{R}$, notamos que uma reta e uma circunferência possuem no máximo dois pontos de interseção, uma circunferência e uma elipse possuem no máximo quatro pontos de interseção, e duas retas diferentes possuem no máximo um ponto apenas de interseção. É possível procurar uma relação entre o número de pontos de interseção de duas curvas com seus graus (em todos os exemplos o número de pontos era menor ou igual ao produto dos graus). Em geral obtemos uma desigualdade comparando a cardinalidade da interseção com o produto dos graus das curvas. Para uma igualdade, porém, em geral temos algumas dificuldades, como:

- em $\mathbb{R}^2$ nem sempre duas curvas se interceptam;
- alguns pares de curvas podem ter infinitos pontos de interseção. Como por exemplo as curvas definidas pelas equações $X = 0$ e $X(X - Y) = 0$ possuem toda a reta $X = 0$ em comum.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma linguagem adequada para lidar com os problemas acima, enunciando as hipóteses necessárias para que valha a igualdade. Sob tais hipóteses, apresentamos o teorema de Bézout, que garante que a cardinalidade da interseção de duas curvas algébricas é sempre igual ao produto dos graus das curvas, à menos de multiplicidades.

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica - PIBIC

Referências

[1] PERRIN, D. **Géométrie algébrique**: Une introduction. Paris: Université-Paris 11, 2001

[2] HARTSHORNE R. **Algebraic Geometry.** Berkeley: University of California, 1997

Teorema de estrutura para módulos sobre domínios

Marcel Thadeu de Abreu e Souza *
Bacharelado e Licenciatura em Matemática - UFPR
marcel.abreu@ufpr.br

Profa. Dra. Tanise Carnieri Pierin (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
tanise@ufpr.br

Palavras-chave: álgebra, módulo, domínio.

Resumo:

Neste trabalho apresentaremos o teorema dos divisores elementares, que conclui que todo módulo finitamente gerado sobre um domínio de ideais principais pode ser expresso como soma direta de cópias do anel e quocientes da forma $A/_{p_i^{r_{ij}}A}$. Mais precisamente, para um módulo M finitamente gerado sobre um domínio de ideais principais A, existem um inteiro $n \geq 0$, elementos irredutíveis $p_1, ..., p_s \in A$ e inteiros:

$$r_{11} \geq r_{12} \geq ... \geq r_{1t_1} > 0$$

$$\vdots$$

$$r_{s1} \geq r_{s2} \geq ... \geq r_{st_s} > 0$$

tais que:

$$M \cong A^{(n)} \oplus A/_{p_1^{r_{11}}A} \oplus ... \oplus A/_{p_1^{r_{1t_1}}A} \oplus ... \oplus A/_{p_s^{r_{s1}}A} \oplus ... \oplus A/_{p_s^{r_{st_s}}A},$$

onde os inteiros n, r_{ij}, $1 \leq j \leq t_i$, $1 \leq i \leq s$, e os ideais $p_i^{r_{ij}}A$ estão univocamente determinados pelas condições acima. Com o objetivo de demonstrar tal teorema, introduziremos conceitos preliminares da teoria de módulos.

Posteriormente, mostraremos uma aplicação deste teorema na teoria de grupos, mais especificamente na classificação dos grupos abelianos finitamente gerados. É possível, por exemplo, garantir que os grupos abelianos finitamente gerados de ordem 60 são:

$G_1 = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$
$G_2 = \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$

*Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET-Matemática)

Referências:

[1] POLCINO MILIES, F. C. **Anéis e Módulos.** São Paulo: Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1972.

Lema de Yoneda.
Significado e conexão
com o Teorema de Cayley.

Márcio Palmares Pinto de França
Licenciatura e Bacharelado em Matemática - UFPR
marciopalmares@gmail.com

Profa. Dra. Heily Wagner (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
heilywagner@ufpr.br

Palavras-chave: Lema de Yoneda, teoria de categorias, Teorema de Cayley.

Resumo:
O Lema de Yoneda é frequentemente considerado como um dos resultados mais importantes em Teoria de Categorias, não apenas por sua significação teórica, mas por dar origem a uma técnica que nos permite obter informações sobre determinada categoria transportando-a para uma categoria adequada de funtores (Imersão-Yoneda/*Yoneda Embedding*).

Neste trabalho discutiremos brevemente o significado do Lema de Yoneda (uma dentre outras possibilidades de interpretação) a partir das ideias expostas por Barry Mazur no artigo [1] e de alguns recursos de exposição de autoria de Tai-Danae Bradley, que discute o assunto em uma série de artigos em seu blog *Math3ma* [2]. Estabelecido o significado do lema, ilustraremos o caminho adotado para demonstrá-lo em nosso texto [3]. Em particular, analisaremos a seguinte

Proposição. *Para todo funtor $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set**, para todo objeto A de $\mathscr{C}$, e para todo elemento $a \in F(A)$, existe uma única transformação natural*

$$\gamma\colon \textit{Hom}(A,-) \longrightarrow F$$

satisfazendo $\gamma_A(1_A) = a$.

que apresentamos como generalização de resultados observados em uma categoria de funtores bem simples: a categoria das interpretações de um *loop* (grafo orientado) em conjuntos. O Lema de Yoneda aparece, em seguida, como um corolário da proposição anterior:

Corolário. (LEMA DE YONEDA.) *Para todo funtor $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set**, para todo objeto A de $\mathscr{C}$, a função:*

$$\psi\colon \textit{Nat}(\textit{Hom}(A,-),\, F) \longrightarrow F(A)$$

definida por

$$\psi(\beta) = \beta_A(1_A)$$

é uma bijeção.

Por fim, veremos um dos sentidos em que o Lema de Yoneda pode ser visto como uma generalização do Teorema de Cayley, mostrando de que modo usar o funtor Yoneda para demonstrar o Teorema de Cayley.

Referências:

[1] MAZUR, B. **When is one thing equal to some other thing?** Disponível em: <http://www.math.harvard.edu/~mazur/preprints/when_is_one.pdf>. Acesso em: 21 set. 2018.

[2] BLOG MATH3MA. **The Yoneda Perspective**. Não paginado. Disponível em: <https://www.math3ma.com/blog/the-yoneda-perspective>. Acesso em: 21 set. 2018.

[3] FRANÇA, M. P. P. **Lema de Yoneda. Uma introdução à Teoria de Categorias. (Guia auxiliar para iniciantes).** 140 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

Classificação de grupos abelianos finitamente gerados

Rogério Otavio Mainardes da Silva *
Bacharelado em Matemática - UFPR
r.otavioms@gmail.com

Prof. Dr. Matheus Batagini Brito (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
mbrito@ufpr.br

Palavras-chave: grupos abelianos finitamente gerados, classificação, grupos abelianos livres.

Resumo:

Em 1824, Niels Henrik Abel provou que para resolver equações polinomiais de grau maior ou igual a 5 não há fórmula geral envolvendo somente os coeficientes da função polinomial e operações elementares. Mas, tendo em vista que algumas poderiam ser revolvidas, a grande questão era como caracterizar estas últimas. O que foi respondido por Evariste Galois apresentando, pela primeira vez, um conceito de Grupo, o qual é conhecido como grupo de permutações atualmente. Nos dias de hoje, o conceito de Grupo é ainda mais geral.

Dentre tantas ramificações possíveis no estudo da Teoria de Grupos, uma de grande importância é a que se refere ao estudo dos grupos abelianos, onde a comutatividade é válida. Nesta, existem particularmente os grupos gerados por uma quantidade finita de elementos, isto é, finitamente gerados. Destes grupos é possível realizar a classificação, a menos de isomorfimos, de maneira a correspondê-los ao produto de cópias de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_n$, onde n é um inteiro positivo e $\mathbb{Z}_n$ é o grupo dos inteiros módulo n.

O teorema para classificação é dado da seguinte maneira: seja G um grupo abeliano finitamente gerado.

(i) Existe um único inteiro s não negativo tal que o número de grupos cíclicos infinitos sendo somados em qualquer decomposição de G como soma direta de grupos cíclicos é precisamente s;

(caso G tenha somente grupos cíclicos infinitos nessa decomposição em soma direta, isto é, caso $G \cong \mathbb{Z}^s$, dizemos que G é um grupo abeliano livre.)

*Bolsista do PET-Matemática

(ii) Ou G é abeliano livre, ou existe uma única lista de inteiros positivos (não necessariamente distintos) $m_1, \ldots, m_t$, $t \in \mathbb{N}$, tais que $m_1 > 1, m_1|m_2, m_2|m_3, \ldots, m_{t-1}|m_t$ e

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_t} \oplus F$$

onde F é abeliano livre;

(iii) Ou G é abeliano livre, ou existe uma lista de inteiros positivos $p_1^{s_1}, \ldots, p_k^{s_k}$, $k \in \mathbb{N}$, dos quais são únicos a menos de ordem e tais que $p_1, \ldots, p_k$ são primos (não necessariamente distintos) e $s_1, \ldots, s_k$ são inteiros positivos (não necessariamente distintos) e

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}} \oplus F$$

onde F é abeliano livre.

Referências:

Hungerford, T. W., Algebra. Nova Iorque: Springer, 1974.

Teorema do Homomorfismo: uma versão geral

Vitor Emanuel Gulisz *
Bacharelado em Matemática - UFPR
vitorgulisz@gmail.com

Professora Heily Wagner (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
heilywagner@ufpr.br

Palavras-chave: álgebra universal, teorema do homomorfismo, estrutura algébrica.

Resumo:

O Teorema do Homomorfismo possui muitas versões, cada uma delas adaptadas a um contexto diferente. Por exemplo, existem suas versões nas Teorias de Grupos, Anéis e Módulos. Este é um dos teoremas mais importantes e fundamentais para o desenvolvimento de teorias de estruturas algébricas. Essencialmente, o teorema enuncia que a imagem de um homomorfismo é isomorfa ao domínio deste homomorfismo quocientado pelo seu núcleo. Neste trabalho apresentaremos o Teorema do Homomorfismo e sua demonstração em uma versão geral, que independe de qual estrutura algébrica estamos considerando. Faremos isso no contexto da Álgebra Universal.

Com o início em 1933-1935, marcado pela publicação de artigos de Garrett Birkhoff, a Álgebra Universal é o campo da Matemática que estuda propriedades comuns a estruturas algébricas, e que busca dar generalizações a estas.

Assim, neste contexto, define-se o que é uma álgebra (ou estrutura algébrica) em um sentido mais amplo: é um conjunto A munido de algumas funções (operações) que levam elementos de $A \times \cdots \times A$ em elementos de A. Um homomorfismo é, portanto, uma função entre duas álgebras que preserva suas respectivas operações. Para a definição de álgebra quociente e do núcleo de um homomorfismo (que estão presentes no Teorema do Homomorfismo), é preciso recorrer ao conceito de congruências, que são relações de equivalência compatíveis com as operações da álgebra. Com isso, temos os requisitos para enunciar e provar uma versão geral do Teorema do Homomorfismo.

Referências:

*Bolsista do Programa PET-Matemática

[1] BIRKHOFF, G. On the combination of subalgebras. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. V. 29, n. 4, p. 441-464. 1933.

[2] BIRKHOFF, G. On the structure of abstract algebras. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. V.31, n. 4, p. 433-454. 1935.

[3] BURRIS, S.; SANKAPPANAVAR, H. P. **A Course in Universal Algebra**. New York: Springer-Verlag, 1981.

[4] MCKENZIE, R. N.; MCNULTY, G. F.; TAYLOR, W. F. **Algebras, Lattices, Varieties:** volume 1. Monterey: Wadsworth and Brooks/Cole, 1987.

Uma relação entre sistema de raízes e álgebra cluster

Yasmim Adara Amorim
Licenciatura e Bacharelado em Matemática - UFPR
yasmim.amorim@ufpr.br

Profa. Dra. Heily Wagner (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
heilywagner@ufpr.br

Palavras-chave: cluster, raízes, mutação.

Resumo:

As álgebras cluster foram introduzidas por Fomin e Zelevinsky no ano de 2002 como uma $\mathbb{Z}$-subálgebra do corpo $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. A partir do conjunto inicial de variáveis $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ construímos novas variáveis, chamadas *variáveis cluster*, utilizando uma regra que é chamada de *mutação* de variáveis. Para defini-la, utilizamos um quiver (grafo orientado) com n vértices, sem 2-ciclo e sem laço e um algoritmo chamado de mutação de quiver. Por exemplo, se o quiver for $1 \leftarrow 2$ e $X = \{x_1, x_2\}$, então todas as variáveis cluster obtidas serão

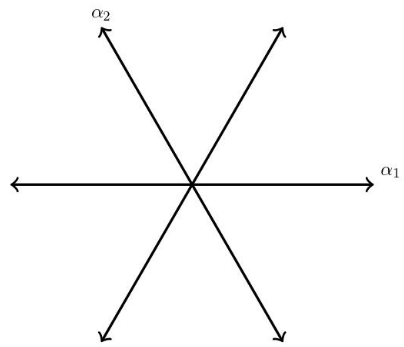
$$\left\{x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right\}$$

E esse conjunto de variáveis gera a álgebra cluster.

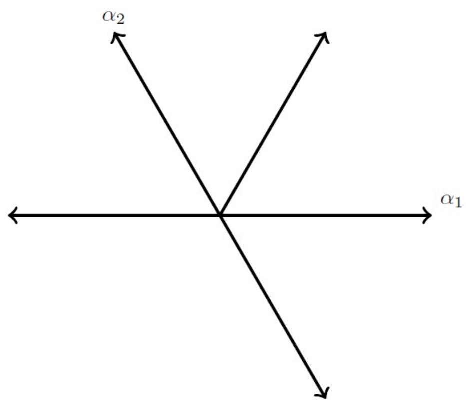
No caso desse quiver ser Dynkin tal processo de mutação é finito e, nessa situação, essa teoria se relaciona com sistema de raízes.

Um sistema de raízes é um subconjunto finito gerador de um espaço euclidiano (espaço vetorial com produto interno real usual) que satisfaz as seguintes propriedades: se α é raiz, o único múltiplo de α no sistema de raízes é $-\alpha$ e a reflexão sobre α deixa tal subconjunto invariante.

Ainda em relação ao exemplo acima dado, as variáveis cluster do exemplo acima estão relacionadas com o seguinte sistema de raízes A_2



O objetivo deste trabalho é mostrar uma relação entre as variáveis cluster e as raízes do sistema de raízes: os denominadores das variáveis cluster correspondem às raízes simples do sistema de raízes. E podemos dispor as variáveis cluster relacionadas às raízes na seguinte figura



Referências

[1] CARTER, R. Cluster Algebras, **Textos de Matemática**, Portugal, 2006.

[2] FOMIN, S., ZELEVINSKY, A. Cluster algebras I: Foundations, **J. Amer. Math. Soc.**, v.15, p 497-529, 2002.

[3] HUMPHREYS, James. **Introduction to Lie Algebras and Representation Theory**. 3^a impressão, 1980.

[4] KELLER, B. Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories. arXiv:0807.1960v11 [math.RT], 19 Mar 2010.

[5] NGUEFACK, B. Introduction aux algèbres amassés: définitions et exemples. Université de Sherbrooke, Canadá, 2006. Notas de seminário.

[6] ZELEVINSKY, A. What is a cluster algebra?, **Notices of the AMS**, v.54, n.11, p.1494-1495, 2007.

Métodos Espectrais de Partição de Grafos

Guilherme Barbosa dos Santos
Licenciatura em Matemática - UTFPR
guilhermebds360@gmail.com

Prof. João Luis Gonçalves
Departamento Acadêmico de Matemática - UTFPR
jlgoncalves@utfpr.edu.br

Palavras-chave: grafos, comunidades, partição.

Resumo:

A Teoria de Grafos tem grande potencial para a descrição e modelagem matemática de fenômenos associados a redes. Em problemas dessa natureza uma dificuldade recorrente é o tamanho da rede, ou seja o número de vértices e arestas. Para contornar essas dificuldades uma alternativa é decompor o grafo associado ao problema, ou ainda agrupar os vértices com propriedades semelhantes, gerando assim um novo grafo com menos vértices mas que ainda representa bem o fenômeno. Esses agrupamentos de vértices chamaremos de comunidades.

Outro aspecto que não pode ser negligenciado é a boa apresentação dos dados que os grafos oferecem. Nesse sentido a detecção de comunidades tem papel de sintetizar ainda mais essas informações.

Contudo a detecção de comunidades raramente pode ser feita empiricamente, principalmente para grafos grandes. Portanto, faz-se necessário um tratamento analítico do grafo, com rigor matemático. Um tratamento matematicamente rigoroso é um ponto positivo pois exigirá o uso de teorias mais desenvolvidas, como a álgebra linear por exemplo. Assim teremos uma quantidade maior de ferramentas para abordar um tema que não nos é tão familiar.

Este trabalho tem como objetivo apresentar a maximização da modularidade, usando análise espectral do grafo, como uma alternativa a partição ou decomposição de grafos.

A modularidade é a função que mede a diferença entre número de arestas dentro da comunidade e o número esperado de tais arestas, para duas ou mais comunidades. Mais precisamente, podemos definir a modularidade como a função Q, descrita a seguir

$$Q = \frac{1}{2m}\sum_{i,j}[A_{ij} - P_{ij}]\delta_{g_i,g_j},$$

em que

$$\delta_{g_i,g_j} = \begin{cases} 1, & \textit{se i e j estão nos mesmos grupos} \\ 0, & \textit{caso contrário,} \end{cases}$$

g_i é a comunidade a qual o vértice i pertence e m é o número de arestas da rede/grafo.

Sobre P_{ij} temos diferentes opções a considerar e cada opção representará um significado diferente para o termo comunidade. Contudo, P_{ij} deve indicar a probabilidade de existir uma aresta entre os vértices i e j. As duas escolhas mais intuitivas para P são P_{ij} um número randômico entre 0 e 1 e $P_{ij} = \dfrac{K_i K_j}{2m}$, em que k_i é o grau do vértice i, isto é o número de arestas que tem o vértice i como um de seus extremos. Contudo, é conveniente impor que

$$\sum_{ij} P_{ij} = \sum_{ij} A_{ij} = 2m\ ,\ \ P_{ij} = P_{ji} \ \text{ e } \ \sum_{j} P_{ij} = k_i. \tag{1}$$

A é a matriz, sinétrica, de adjacência do grafo em questão, cujas entradas são definidas como

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{se existe uma aresta entre os vértices i e j} \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Inicialmente vamos tratar da decompor o grafo em duas comunidades, G_1 e G_2. Para isso, vamos definir um vetor de escolha s em que:

$$s_i = \begin{cases} 1, & \textit{se i pertence a } G_1 \\ -1, & \textit{se i pertence a } G_2. \end{cases}$$

Observe que

$$\delta(g_i, g_j) = \frac{1}{2}(s_i s_j + 1),$$

e assim, podemos reescrever a função modularidade como

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4m}\sum_{i,j}[A_{ij} - P_{ij}](s_i s_j + 1) \\ &= \frac{1}{4m}\sum_{i,j}[A_{ij} - P_{ij}]s_i s_j + \frac{1}{4m}\sum_{i,j}[A_{ij} - P_{ij}] \\ &\underset{(\textbf{??})}{=} \frac{1}{4m}\sum_{i,j}[A_{ij} - P_{ij}]s_i s_j \end{aligned}$$

Agora, vamos escrever a função modularidade como

$$Q = \frac{1}{4m}\mathbf{s}^T\mathbf{B}\mathbf{s},$$

em que $B_{ij} = A_{ij} - P_{ij}$ é a matriz de modularidade. Observe que $\mathbf{B}$ é simétrica, entáo $\mathbf{B}$ tem autovalores reais e autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. Sempre é possível escolher uma base ortonormal para o espaço gerado por autovetores associados a autovalores iguais de $\mathbf{B}$.

Sejam $\mathbf{u}_i$ os autovetores normalizados da matriz $\mathbf{B}$. Podemos escrever s como

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i,$$

com $a_i = \mathbf{u}_i^T \mathrm{s}$ e assim

$$Q = \frac{1}{4m}\sum_{i} a_i^2 \beta_i,$$

em que β_i é o autovalor associado ao autovetor u_i.

Note que Q assumiria o valor máximo se s fosse paralelo ao autovetor associado ao maior autovalor.Vamos chamar esse autovetor de $\mathbf{u}^{(1)}$. Contudo, em geral isso não é possível, pois s é um vetor que possui entradas 1 ou -1 apenas.

Assim, a melhor escolha possível para s é tal que

$$s_i = \begin{cases} +1, \ \textit{se}\ \mathbf{u}_i^{(1)} \geq 0, \\ -1, \ \textit{se}\ \mathbf{u}_i^{(1)} < 0. \end{cases}$$

Já temos resultados preliminares para alguns problemas padrão de detecção de comunidades, contudo estamos estudando novas possibilidades para P e uma função que represente uma modularidade de segunda ordem.

Referências

[1] NEWMAN, M.E.J., Finding community structure in networks using eigenvectors of matrices. **arXiv**, arXiv:physics/0605087v3, 2006.

[2] SCHAUB, M.T., DELVENNE, J.-C., ROSVALL, M., LAMBIOTTE, R., The many facets of community detection in complex networks, **Applied Network Science**. 2:4. 2017.

[3] MESBAHI, M., EGERSTEDT, M., Graph theoretic methods in multiagent networks, Princenton University Press, 2010.

Número Cromático do Plano

Pablo P. S. Moraes
Licenciando em Matemática - UTFPR
pablo_patrick30@hotmail.com

Prof. Dr. João Luis Gonçalves (Orientador)
Departamento Acadêmico de Matemática - UTFPR
jlgoncalves@utfpr.edu.br

Palavras-chave: grafos, número cromático do plano, grafos planares unitários.

Resumo:

O número cromático do plano (CNP) é definido como o número mínimo de cores necessárias para colorir os vértices de qualquer grafo planar unitário (GPU) de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Determinar o CNP é conhecido como problema de Hadwiger-Nelson [1].

Em 1961, os irmãos William e Leo Moser [2] apresentaram um GPU (ver Figura 1) que não pode ter seus vértices coloridos, nas condições do problema, com menos de 4 cores, ou seja, 4$\leq$ CNP.

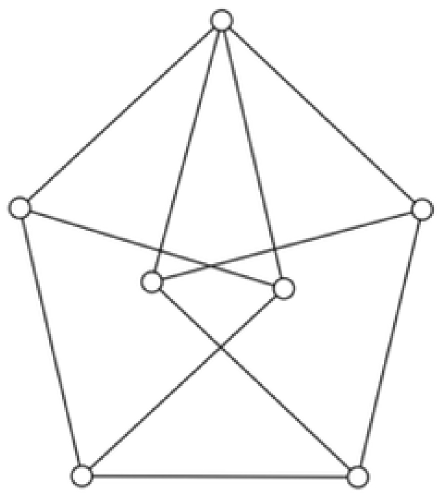


Figura 1: GPU dos Moser

John R. Isbell mostrou que CNP $\leq$7, apoiado no fato de que o plano pode ser ladrilhado com hexágonos regulares coloridos por um padrão com 7 cores, como mostrado na Figura 2, de forma que hexágonos de cores iguais estão distantes mais que 1 diâmetro dos hexágonos considerados. Deste modo, se escolhermos ladrilhar o

plano com hexágonos de diâmetro um pouco menor que 1, qualquer segmento de reta de comprimento 1 terá seus extremos em hexágonos de cores diferentes. Assim a conjectura até 2017 era 4$\leq$ CNP $\leq$7.

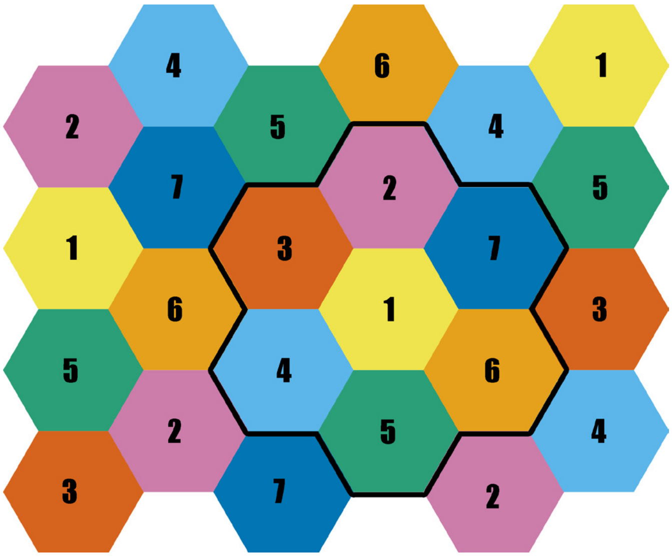


Figura 2: Plano ladrilhado de hexágonos

Nosso primeiro objetivo é apresentar o GPU proposto por Aubrey D.N.J. de Grey [3]. Nas condições descritas, o GPU de Grey não pode ter seus vértices coloridos com apenas 4 cores, ou seja, Grey mostrou que 5$\leq$ CNP. Iremos replicar a construção passo-a-passo do GPU de Grey. O primeiro passo é a construção do GPU H e suas 4 formas essencialmente distintas de colorir seus vértices como mostrado na Figura 3. Dentre essas 4 formas de colorir, as duas à esquerda são as únicas que admitem uma tripla de vértices monocromáticos.

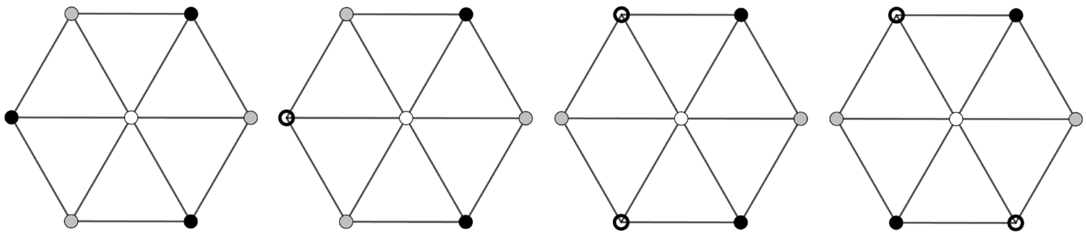


Figura 3: GPU H

O segundo passo é a construção do GPU J que contém 13 cópias de H, com uma primeira cópia de H no centro, 6 cópias cujos centros estão a uma distância 1 e as outras 6 com seus centros a uma distância $\sqrt{3}$ do centro do primeiro H.

O terceiro passo é a construção do GPU K, que possui 2 cópias de J e, portanto, 26 cópias de H, com o vértice central coincidindo e um deles rotacionado em torno do centro de forma que os vértices que estão a uma distância 2 do centro, denominados vértices de ligação, estejam a uma distância 1 de sua respectiva cópia. Então, entre esses vértices acrescentam-se seis arestas.

O quarto passo é o GPU L, que possui duas cópias de K e, portanto, 52 cópias de H, com um vértice de ligação coincidindo e uma das cópias de K rotacionada em torno desse vértice de forma que os vértices de ligação diametralmente opostos estejam a uma distância 1 entre si e entre esses vértices acrescenta-se uma aresta.

Uma análise sobre os números cromáticos de J e K nos leva a conclusão de que se o número cromático de L é 4, então ao menos uma de suas cópias de H tem uma tripla de vértices monocromática.

A próxima etapa é a construção de um GPU M, cujas características são que M possui uma cópia de H e que não exista uma forma de colorir os vértices de M com 4 cores, nas condições deste contexto, em que sua cópia de H admita uma tripla monocromática.

Finalmente, foi construído o GPU N com 52 cópias de M arranjadas de forma que seus H formassem L. Assim, se colorirmos as 52 cópias de M com 4 cores, então teremos um L cujas cópias de H não admitem uma tripla de vértices monocromática, portanto N não pode ser colorido com apenas 4 cores.

Um passo fundamental foi a construção de M. Vale salientar, que na busca por um M que satisfizesse as condições necessárias, foi essencial a capacidade computacional de verificação das propriedades, pois embora baseado no GPU de Moser, a complexidade de M torna proibitiva a verificação manual ou argumentativa. Deste modo, estabelecemos como um segundo objetivo atualizar e desenvolver algoritmos pertinentes a esse contexto.

Esse problema estava em aberto há mais de 60 anos. Em geral, avanços científicos causam uma perturbação da qual novos avanços podem emergir. Por isto, nosso próximo objetivo é pesquisar possibilidades de GPU mais simples com as propriedades de M, como o próprio Aubrey D.N.J. de Grey propõe em seu blog [4].

Referências

[1] HADWIGER, H., Überdeckung des euklidischen Raumes durch kongruente Mengen. **Math**., Portugal. 4: 238-242, 1945.

[2] HADWIGER, H., Ungelöste Probleme No. 40, **Elem. Math.**. 16: 103–104.

[3] GREY, A.D.N.J., The chromatic number of the plane is at least 5, 2018, arXiv : 1804.02385. Accessível pelo Bibcode:2018arXiv180402385D.

[4] POLYMATH PROJECTS. https://polymathprojects.org/2018/04/10/polymath-proposal-finding-simpler-unit-distance-graphs-of-chromatic-number-5/

Análise Matemática

Estudo de Sistemas Dinâmicos no Ensino Médio: O Mapa Logístico e o Modelo Brusselator

Bernardo Ramos de Godoy *
Técnico em Petróleo e Gás integrado ao Ensino Médio - UFPR
bernardo.godoy@ufpr.br

Prof[a]. Janaina Schoeffel (Orientadora)
Setor de Educação Profissional e Tecnológica - UFPR
janainaschoeffel@ufpr.br

Palavras-chave: sistemas dinâmicos, Mapa Logístico, Modelo Brusselator.

Resumo:

A teoria dos sistemas dinâmicos estuda processos iterativos não estáveis, com estados que mudam com o tempo. Esses sistemas possuem aplicações em áreas como química, física, economia e biologia, entre outras. O objetivo deste trabalho é identificar aplicações da teoria de funções, vista no ensino médio, e do cálculo diferencial, na análise de sistemas dinâmicos, bem como identificar aplicações dessa teoria em áreas associadas aos conteúdos técnicos estudados no curso Técnico em Petróleo e Gás.

A partir de uma extensa revisão bibliográfica sobre o cálculo diferencial e o estudo de alguns conceitos básicos de sistemas dinâmicos (órbita, ponto fixo, ponto/órbita periódica, conjunto estável, retrato de fase e classificação dos pontos fixos atratores e repulsores), realizou-se o estudo de um primeiro exemplo, a saber, o famoso Mapa Logístico

$$F_\mu(x) = \mu x(1-x), \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $\mu > 0$, que é um sistema dinâmico discreto que foi proposto como modelo para a dinâmica populacional de insetos, estando x associado ao número de indivíduos, e μ à taxa de crescimento da população.

Os primeiros cálculos realizados foram para identificar os pontos fixos do Mapa, conforme a variação do parâmetro μ. Independente do valor de $\mu > 0$, os únicos pontos fixos são 0 e $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$, entretanto o comportamento das órbitas varia com μ (ver figura 1):

- $0 < \mu < 1 \Rightarrow$ O ponto fixo 0 é atrator e p_μ é repulsor.

  O conjunto estável de 0 é $W^s(0) = \left(p_\mu, F_\mu^{-1}(p_\mu)\right)$;

---

*Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica para o Ensino Médio do CNPq.

- $1 < \mu < 3 \Rightarrow$ O ponto fixo 0 é repulsor e p_μ é atrator.
  O conjunto estável de p_μ é $W^s(p_\mu) = (0, 1)$;

- $\mu > 3 \Rightarrow$ Ambos os pontos fixos 0 e p_μ são repulsores.

Paralelamente ao estudo algébrico foram contruídos os retratos de fase no software Geogebra, que ajudaram a entender o comportamento dinâmico das órbitas (ver figura 2),

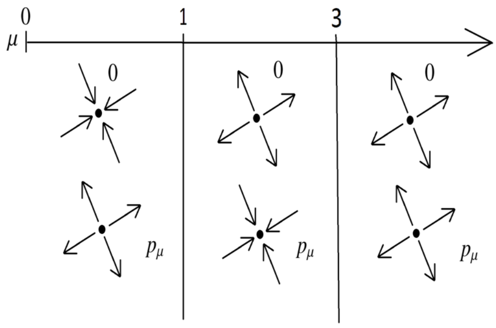


Figura 1: Pontos fixos

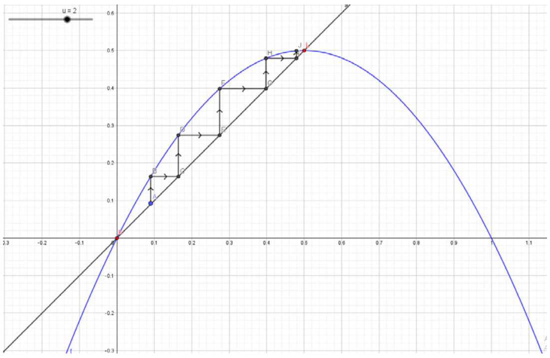


Figura 2: $\mu = 2$

bem como ensaios numéricos com programas de planilhas. Percebeu-se a partir daí que, para $\mu > 3$ (caso em que ambos os pontos fixos são repulsores), surge uma órbita periódica atratora de período 2 (ver figura 3), cujos pontos periódicos que a compõe são dados pela expressão

$$x = \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3} \pm \mu + 1}{2\mu}. \tag{2}$$

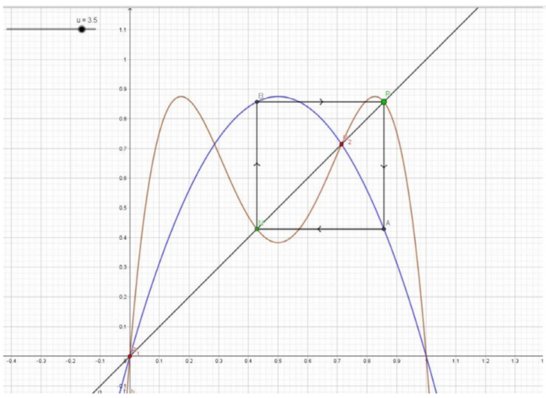


Figura 3: $\mu = 3,5$

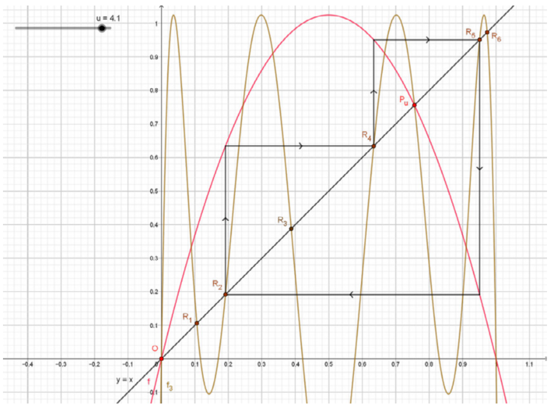


Figura 4: $\mu = 4,1$

Aumentando ainda mais o valor μ foi possível observar numericamente o aparecimento de órbitas de período 3 e 4, entretanto, por conta do alto grau do polinômio envolvido no cálculo desses pontos periódicos, não foi mais possível obter expressões gerais para os mesmos e recorreu-se ao programa de computação algébrica *Maxima* a fim de se obter os valores dos pontos periódicos para valores específicos de μ(ver figura 4).

Desse modo, foi possível observar como a complexidade da dinâmica do modelo aumenta, apesar de sua fórmula simples, levando ao caos, comportamento que fica evidente ao se observar o diagrama de bifurcações completo.

Na sequência buscou-se aplicar a mesma teoria para o estudo do Modelo Brusselator, que descreve uma reação química trimolecular abstrata dada por $A+B \to C+D$. Essa reação ocorre em 4 etapas

$$\begin{cases} A \overset{k1}{\to} X \\ 2X + Y \overset{k2}{\to} 3X \\ B + Y \overset{k3}{\to} Y + C \\ X \overset{k4}{\to} D, \end{cases} \tag{3}$$

em que os reagentes A e B formam os produtos C e D, com a presença dos elementos intermediários X e Y.

A dinâmica das concentrações dos elementos intermediários pode ser descrita pelas equações, já discretizadas:

$$\begin{cases} f(x,y) = A + x^2y - Bx \\ g(x,y) = Bx - (x^2-1)y, \end{cases} \tag{4}$$

onde x, y são as concentrações adimensionalizadas dos metabólitos da reação e A, B são os parâmetros da reação adimensionalizados.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} f(x,y) = x \\ g(x,y) = y \end{cases}$ obtém-se o ponto fixo $(x_0, y_0) = \left(B, \dfrac{B}{A}\right)$. Os cálculos necessários para classificar o ponto fixo envolve conceitos de álgebra linear e fornecem que

- O ponto fixo (x_0, y_0) é atrator para $B < A^2 + 1$;
- O ponto fixo (x_0, y_0) é repulsor para $B > A^2 + 1$;

revelando uma bifurcação no comportamento do fenômeno.

Referências:

DEVANEY, R. L. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. 2a edição. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática Completa**. São Paulo: FTD, 2005.

KANG, H. **Dynamics of local map for a discrete brusselator model**. 67 f. Tesis (Doctor of Philosophy) - Department of Mathematics, The Pennsylvania State University, State College, 2007.

LAVROVA, A. I.; POSTNIKOV, E.B.; ROMANOVSKI, Yu M. Brusselator: an abstract chemical reaction?. **Physics – Uspeckhi**, v. 52, n. 12, p. 1239- 1244, 2009.

PRIGORIE, I.; LEFEVER, R. Symmetry Breaking Instabilities in Dissipative Systems. II. **The Journal of Chemical Physics**, v. 48, n. 4, p. 1695-1700, fev. 1968.

VAIDYNATHAN, S. Dynamics and Control of Brusselator Chemical Reaction **International Journal of ChemTech Research**, v. 8, n. 6, p. 740-749, set. 2015.

Ponto Fixo de Banach e aplicações

Bianca Elena Wiltuschnig *
Bacharelado em Matemática - UFPR
bianca.elena.w@gmail.com

Prof. Dr. Hudson do Nascimento Lima (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
hudsonlima@ufpr.br

Palavras-chave: Espaços Métricos Completos, Teorema do Ponto Fixo de Banach, Método de Newton, Teorema de Picard.

Resumo:

O objetivo deste trabalho é estudar teoremas de ponto fixo e suas aplicações. Comecemos com o seguinte algoritmo:

1. Escolha um número arbitrário em radianos (pode ser tão grande quanto você queira).
2. Coloque-o em uma calculadora e calcule o seu cosseno.
3. Com a resposta obtida, refaça **2** sucessivamente.

Após um certo número de iterações, você perceberá que o resultado mostrado pela calculadora será aproximadamente 0,7390851332, dependendo do número de vezes que você teve a paciência de calcular. Como exemplo, vamos ver o que acontece se o valor inicial for 1234567890 rad. Na tabela a seguir, podemos ver o número de vezes que se calculou o cosseno do valor inicial e o respectivo valor obtido:

Iteração	Valor obtido	Iteração	Valor obtido
0	1234567890	11	0,731783706198571
1	-0,162831212199022	12	0,743983718047997
2	0,986772263641054	13	0,735776533167648
3	0,551385469143801	14	0,741309796623155
4	0,851799537042811	15	0,737584745506303
5	0,658630121073576	16	0,740094980144586
6	0,790831385852569	17	0,738404511435399
7	0,703254494809473	18	0,739543437008823
8	0,762741537366445	19	0,738776336657943
9	0,722944585280658	20	0,739293107049521
10	0,749860858252901	21	0,738945023555723

*Bolsista do Programa PET-Matemática.

Achou coincidência? Tente de novo com outro número, garanto que a resposta se aproximará do mesmo valor mencionado. Por que isso acontece? A resposta está no Teorema do Ponto Fixo de Banach, que é o objeto de estudo deste trabalho.

Após compreender conceitos como métrica, espaços métricos, sequências, convergência e funções, seremos capazes de demonstrar o teorema principal:

Teorema do Ponto Fixo de Banach: Considere (M, d) um espaço métrico completo e uma contração $f : M \longrightarrow M$. Então f possui um único ponto fixo.

Ao provar o teorema, obtemos um método iterativo para determinar o ponto fixo de uma aplicação que se encaixa nos moldes do teorema. Com isso, além de determinar o ponto fixo de funções, conseguimos algumas aplicações bem interessantes.

Podemos utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para determinar zeros de funções, estudando o Método de Newton sob a visão do teorema; demonstrar o Teorema de Picard, compressão de imagens e entender um pouco sobre o buscador do Google.

Referências:

BARROS, C. D. V. **O Teorema do Ponto fixo de Banach e algumas Aplicações**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1977.

Funções de corte via função sigmóide

Diogo Luis Simm Salles Vianna
Bacharelado em Física - UFPR
diogo.simm@ufpr.br

Prof. Carlos Eduardo Durán Fernández (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
cduran@ufpr.br

Palavras-chave: Função de corte, Sigmóide, Partições da Unidade.

Resumo: A função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é empregada de forma ampla para a construção de funções de corte e é descrita pela regra

$$\phi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

em decorrência da sua contínua derivabilidade em todos os reais e a forma como se aproxima da função nula quando $x \to 0^+$.

Com inspiração nessa função, cujo comportamento se justifica em parte pela composição de uma exponencial dotada de uma assíntota horizontal e uma função racional com crescimento assintótico próximo a 0, foram imaginadas relações funcionais alternativas que, para elaboração de uma família de funções ψ_{x_0} continuamente deriváveis tais que, para qualquer real x_0 e dois fatores de proximidade $0 < r < s$

- $\psi_{x_0}(x) = 1$ para todo $x < (x_0 - r, x_0 + r)$
- $\psi_{x_0}(x) = 0$ para todo $x < x_0 - s$ ou $x > x_0 + s$

através da composição da função sigmóide $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$$

com uma segunda função racional com um comportamento de crescimento assintótico. É então demonstrado que tal função composta pode, em virtude dos graus de liberdade propiciados pela função racional, herdar propriedades de σ, o que as torna facilmente adaptáveis, por exemplo, para construção de partições da unidade.

Referências

[1] SPIVAK, Michael David, *Calculus*, 3 ed, Publish or Perish.

Não existência de órbitas periódicas em campos autônomos unidimensionais

Eduardo Pelanda Amaro *
Bacharelado em Engenharia Mecânica - UFPR
edu.pelanda@gmail.com

Prof. Roberto Ribeiro Santos Junior (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
robertoribeiro@ufpr.br

Palavras-chave: Campo unidimensional. Campo autônomo. Órbitas periódicas.

Resumo:

Neste trabalho serão discutidos alguns aspectos do retrato de fase de equações diferenciais ordinárias (EDO) unidimensionais da forma $x' = f(x)$. Mostraremos que EDOs desse tipo não possuem órbitas periódicas, portanto os únicos padrões de trajetórias possíveis para esse tipo de EDO são: órbitas constantes, órbitas monotônicas que se aproximam assintoticamente de um ponto de equilíbrio ou órbitas que divergem para $\pm\infty$. Inicialmente serão introduzidos conceitos básicos de sistemas dinâmicos, em seguida apresentaremos algumas demonstrações da não existência de órbitas periódicas.

Um sistema dinâmico é constituído de equações diferenciais que descrevem a evolução do sistema no tempo contínuo. O campo vetorial x' por x de um sistema descreve o comportamento da velocidade de uma partícula, enquanto o retrato de fase indica qual será a evolução no tempo t das trajetórias para diferentes pontos iniciais x_0. As EDOs nas quais o campo de velocidade não depende do tempo são chamadas de autônomas, *e.g.* $x' = f(x)$. Sistemas não autônomos são da forma $x' = f(x, t)$.

Na apresentação mostraremos que usando ferramentas simples de cálculo I é possível provar o seguinte teorema:

Teorema 1. *O sistema*

$$x' = f(x),$$

onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não possuí órbitas periódicas.

Uma outra maneira de abordar as órbitas das partículas do sistema dinâmico $x' = f(x)$ é por meio da ideia de energia potencial. Definimos o potencial como uma função $V(x)$ tal que $f(x) = -\frac{dV}{dx}$, com o sinal negativo indicando que a tendência da partícula

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME.

é de sempre ir para a região de menor potencial. Por meio dessa teoria obtemos uma outra prova para o Teorema 1.

É fácil ver que é impossível que um sistema $x' = f(x)$ apresente órbitas fechadas se o seu potencial é sempre negativo, já que para tempos distintos, t_1 e t_2, a igualdade $x(t_1) = x(t_2)$ só seria possível se a função potencial $V(x(t))$ fosse crescente em algum momento.

Sob determinadas hipóteses é possível generalizar o Teorema 1 para dimensões mais altas.

Teorema 2. *Seja o sistema gradiente*

$$\mathbf{X}' = -\nabla V(\mathbf{X}),$$

onde $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $V(\mathbf{X})$ *é uma função diferenciável. Então esse sistema não possui órbitas periódicas.*

Todos os campos vetoriais unidimensionais representados por funções integráveis são sistemas gradientes. Contudo, os sistemas dinâmicos de maior dimensão em sua maioria não são desse tipo. Assim a identificação de um sistema gradiente é útil para mostrar que o mesmo não possui órbitas fechadas.

No nosso trabalho mostramos como o potencial do sistema $x' = f(x)$ se relaciona com os pontos de equilíbrio x_0 da EDO (pontos nos quais $f(x_0) = 0$). Os pontos de equilíbrio são classificados como estáveis ou instáveis. Intuitivamente dizemos que um ponto x_0 é estável se para todo b suficientemente próximo de x_0 a solução da EDO $x' = f(x)$, $x(0) = b$, é atraída para x_0. De forma análoga, x_0 é dito instável se para todo b suficientemente próximo de x_0 a solução desta EDO se afasta de x_0.

Uma das maneiras para avaliar a estabilidade de um ponto de equilíbrio é perturbar o sistema e determinar se essa perturbação cresce ou decresce. Porém, se conhecermos o potencial $V(x)$ do sistema $x' = f(x)$, basta analisar o gráfico de $V(x)$ para obtermos a classificação dos pontos de equilíbrio. A função potencial possui picos nos pontos de equilíbrio instáveis e vales nos pontos de equilíbrio estáveis.

A referência principal para esse trabalho é o livro de Strogatz [1], o qual apresenta a teoria de sistemas dinâmicos de forma introdutória e com diversos exemplos de aplicações em problemas do mundo real.

Referências:

[1] STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos**. Perseus Books, 1994.

Teoria Matemática do Método dos Elementos Finitos e Aplicações

Edvaldo Bandeira da Silva
Bacharelado em Física - UFPR
ed.bandeira@outlook.com

Prof. Pedro D. Damázio (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
pddamazio@ufpr.br

15 de outubro de 2018

Palavras-chave: Método dos elementos finitos, método de Galerkin, problema de Poisson.

Resumo:

O Método dos Elementos Finitos (FEM)[1] tem sido amplamente utilizado em muitas áreas da matemática ou mesmo na engenharia por sua relativa simplicidade de implementação e por suas boas taxas de convergência. Apresenta uma rica e elegante teoria matemática que o fundamenta e que pode ser explorada em diferentes níveis, e suas aplicações se destacam, principalmente, no tratamento de sistemas de equações diferenciais parciais[2] que se fazem presentes em diversas áreas como a modelagem de fenômenos físico-químicos, por exemplo.

Obter a solução analítica de uma EDP para uma aplicação real pode ser, em geral, um árduo problema e muitas das vezes impossível. Para contornar este problema, mune-se do uso de métodos computacionais a fim de se ter uma forma de abordar essa classe de problemas. Por este motivo, utilizar métodos numéricos, quando implementados corretamente, podem fornecer boas aproximações.

Desta forma, o FEM é utilizado no tratamento de problemas de valores de contorno tendo como base o método de Galerkin, isto é, formulação fraca do problema. Assim, exige-se menor regularidade das funções e por este motivo o método é bastante flexível para soluções de equações diferenciais demasiada complicadas. Por fim, será utilizado o Lema de Céa para análise de erro e convergência deste método. E com estas ferramentas será abordado o problema de Poisson.

Em matemática, a equação de Poisson é uma EDP do tipo elíptica. Surge, por exemplo, no deslocamento vertical da solução u no ponto (x, y) de uma membrana tensionada Ω presa à borda $\partial\Omega$ e submetida a uma densidade de força vertical e

[1] *Finite Element Method*, do inglês.
[2] Daqui por diante, chamadas apenas de EDP.

proporcional a $f(x,y)$. Desta forma, impondo a área da membrana sem torção, isto é, onde ela está presa como o conjunto $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ e a densidade de força satisfaça a condição em que valha zero na fronteira, o problema a ser resolvido é:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \text{ tal que:} \\ \triangle u(x,y) = -f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

É uma generalização da equação de Laplace, que também é frequentemente vista na física. A equação recebeu o nome do matemático, geômetra e físico francês Siméon Denis Poisson.

Referências

[1] ALBERTY, J.; CARSTENSEN, C.; FUNKEN, S. Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation. **Numer. Algorithms**, 20(2-3):117–137, 1999.

[2] CIARLET, P. G. **The Finite Element Method for Eliptic Problems**, SIAM, 2002.

[3] DE OLIVEIRA, C. R. **Introdução à análise funcional**. IMPA, 2015.

[4] GALVIS, J.; VERSIEUX, H. **Introdução à aproximação numérica de equações diferenciais parciais via o método de elementos finitos**. IMPA, 2011.

[5] IÓRIO, V. **EDP, um curso de graduação**. IMPA, 2005.

[6] JOHNSON, C. **Numerical Solution of Partial Equations by the Finite Element Method**, Courier Corporation, 2012.

[7] KREYSZIG, E. **Introductory Funcional Analysis with Applications**, volume 1. wiley New York, 1978.

[8] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**, IMPA. Rio de Janeiro, 2017.

[9] RAPPAZ, J.; PICASSO, M. **Introduction à l'analyse numérique**, Lausanne (Suisse): Presses polytechniques et universitaires romandes, 1998.

[10] ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, **P. Real analysis**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1988.

[11] VIANNA FILHO, A. L. C. **Aplicação do Método de Elementos Finitos às Equações de Navier–Stokes**. 2016. 72 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação)–Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, UFPR, Curitiba, 2016.

O Método de Separação de Variáveis aplicado à resolução da Equação do Calor

Elis Regina Halitski *
Bacharelado em Engenharia Civil - UEPG
elisreginahalitski@hotmail.com

Prof. Jocemar de Quadros Chagas (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
jocemarchagas@uepg.br

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Método de separação de variáveis, Equação do Calor.

Resumo:

Durante a elaboração deste trabalho foi estudado o Método de Separação de Variáveis, aqui aplicado especificamente para obter a solução da equação do calor em uma e em duas dimensões. Os exemplos apresentados ilustram a eficiência do método, aplicável em uma grande variedade de casos, desde que respeitadas as restrições presentes na literatura.

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é destacar um método clássico de resolução de equações diferenciais parciais, conhecido como Método de Separação de Variáveis. Ele consiste basicamente em substituir uma equação diferencial parcial a resolver por um sistema de equações diferenciais ordinárias, que devem ser resolvidas satisfazendo as condições de contorno e/ou condições iniciais dadas. Para ilustrar a aplicação deste método, mostraremos a busca pela solução da equação do calor, uma das três equações de 2ª ordem fundamentais, cujo entendimento é essencial para compreender a solução de outras equações parabólicas mais complexas.

2 O problema de contorno para a condução do calor

O estudo matemático da condução de calor começou em torno de 1800, e continua a ser um atrativo campo de estudos. Vamos considerar, no primeiro exemplo, um problema de condução de calor em uma barra finita de seção reta uniforme, feita com material homogêneo, com as laterais perfeitamente isoladas, onde o fenômeno físico de transmissão do calor pode facilmente ser compreendido como ocorrendo

*Bolsista do Programa PICME.

em apenas uma dimensão. No segundo exemplo, vamos considerar o fenômeno de difusão do calor em uma placa retangular, também com suas superfícies isoladas, e sem troca de calor pelas bordas da placa.

2.1 Condução do calor em 1 dimensão

Nesta etapa será analisado o problema da condução do calor em uma barra unidimensional finita, descrito por

$$u_t = c^2 u_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0, \tag{1}$$

com condições de contorno e condições iniciais dadas por

$$\begin{cases} u(0,t) = 0;\ u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = f(x),\ \forall\ 0 < x < L. \end{cases} \tag{2}$$

Para utilizar o Método da Separação de Variáveis, admite-se que a solução seja da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Assim, fazendo as derivações na solução adotada e as substituindo em (1), obtém-se o seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0; \\ T'(t) - \lambda c^2 T(t) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Ao considerarmos $\lambda < 0$, obtém-se, respectivamente, as seguintes soluções:

$$X(x) = c_1 cos\Big(\sqrt{|\lambda|}x\Big) + c_2 sen\Big(\sqrt{|\lambda|}x\Big) \quad \text{e} \quad T(t) = e^{\lambda c^2 t}.$$

Ao aplicarmos as condições de contorno e a condição inicial do problema, chegamos à solução

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\lambda_n t} sen\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \quad \text{válida para} \quad 0 < x < L, \ \text{ e } \ t > 0,$$

onde

$$\lambda_n = c^2 \Big(\frac{\pi n}{L}\Big)^2 \quad \text{e} \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx.$$

2.2 Condução do calor em 2 dimensões

Nesta etapa será analisado o problema da condução do calor em uma placa retangular finita, descrito por

$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}),\ x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ t > 0, \tag{4}$$

com condições de contorno e condições iniciais dadas por

$$\begin{cases} u(0,y,t) = u(a,y,t) = u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0; \\ u(x,y,0) = f(x,y),\ \forall\ (x,y) \in (0,a) \times (0,b). \end{cases} \tag{5}$$

Admite-se que a solução é da forma $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$. Contudo, inicialmente adota-se a solução com a forma $u(x,y,t) = G(x,y)T(t)$ e, assim, ao fazer as derivações e as substituir em (4), obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} G_{xx}(x,y) + G_{yy}(x,y) - \lambda G(x,y) = 0; \\ T'(t) - \lambda c^2 T(t) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Assumindo $\lambda < 0$, ao utilizar novamente o Método de Separação de Variáveis na primeira equação de (6), com $G(x,y) = X(x)Y(y)$, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} X''(x) - \kappa X(x) = 0, & \text{com } \lambda < \kappa < 0, \\ Y''(y) + \beta Y(y) = 0, & \text{com } \beta = (\lambda - \kappa). \end{cases} \tag{7}$$

As soluções para as equações em $X(x)$, $Y(y)$ e $T(t)$ são, respectivamente:

$$\begin{aligned} &X(x) = h_1 cos\Big(\sqrt{|\kappa|}x\Big) + h_2 sen\Big(\sqrt{|\kappa|}x\Big); \\ &Y(y) = h_3 cos\Big(\sqrt{|\beta|}y\Big) + h_4 sen\Big(\sqrt{|\beta|}y\Big); \text{ e} \\ &T(t) = e^{\lambda c^2 t}. \end{aligned}$$

Aplicando as condições de contorno e a condição inicial do problema, e o método das séries de Fourier, chegamos à solução

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{\lambda_{m,n}t} h_{m,n} sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) sen\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \ \forall \ (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \text{ e } t > 0,$$

onde

$$\lambda_{m,n} = c^2\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right] \text{ e } h_{m,n} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y) sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) sen\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dydx.$$

3 Conclusão

Assim como ilustrado neste trabalho, o Método de Separação de Variáveis pode ser empregado em diferentes problemas, obtendo na maioria das vezes um resultado satisfatório, desde que uma das principais restrições do método seja respeitada: a geometria do domínio deve comportar a separação de variáveis de forma natural.

No primeiro caso apresentado neste trabalho, o método foi empregado para se resolver uma equação em apenas uma dimensão, e no segundo caso, o mesmo método foi empregado para resolver a mesma equação, mas em duas dimensões. É fácil constatar que a resolução da equação em duas dimensões demanda mais trabalho do que em uma dimensão. O aumento do trabalho na busca da solução também ocorre quando se trabalha com condições de contorno não homogêneas ou com mais termos na equação da qual se busca o resultado.

Referências

[1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10.ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2015.

[2] IÓRIO JR., R.; IÓRIO, V. M. **Equações Diferenciais parciais:** uma introdução. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[3] OLIVEIRA, E. C.; TYGEL, M. **Métodos Matemáticos para Engenharia**. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

Números Transcendentais e o número π

Emanuela Pinheiro Quirrenbach
Bacharelado em Engenharia Mecânica – UTFPR
emanuelaquirrenbach@alunos.utfpr.edu.br

Prof. Ednei Felix Reis
Departamento de Matemática – UTFPR
edneif@utfpr.edu.br

Palavras-chave: números transcendentais, polinômios, transcendência do número π

Resumo:

O conceito de transcendência na matemática é discutido desde o século XVIII, com Euler e Leibniz **[1]**. Mas o termo número transcendental não era utilizado: Euler referia-se a operações como a soma, multiplicação, subtração e divisão como sendo algébricas, e funções como seno, cosseno e logaritmo como transcendentais. A teoria de números transcendentais foi originada por Liouville em 1844, em que números transcendentes são definidos como aqueles que não satisfazem nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros **[2]**. Liouville também deu o primeiro exemplo de número transcendental, a constante de Liouville:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0{,}110001000000000000000001000\ \ldots$$

Euler já havia provado a irracionalidade de e em 1744, e Liouville mostrou que e e e^2 são irracionais e não podem ser irracionais quadráticos[1], mas apenas em 1873 foi provado por Hermite que e é transcendental. Generalizando os métodos utilizados por Hermite, Lindemann demonstrou então, em 1882, a transcendência do número π, no seu artigo "*Über die Zahl* π" (Sobre o número Pi) **[3]**, e consequentemente resolveu o antigo problema da Quadratura do Círculo[2]. Essas provas clássicas foram posteriormente revisitadas e simplificadas por outros matemáticos, como Hilbert em 1893 **[4]**. Com a introdução do conceito de enumerabilidade[3], introduzido por Cantor em 1874, segue que existem mais números transcendentais que algébricos, visto que os números algébricos são enumeráveis, e os números transcendentais não o são.

Nesse trabalho, será exemplificada a prova da transcendência do número π como mostrada por Niven em 1939, em que se parte da suposição de que π é um número algébrico, e mostra-se que isso leva a uma contradição **[5]**.

---

[1] Números irracionais que são raízes de uma equação quadrática com coeficientes racionais.
[2] Seria possível, apenas com compasso e régua, construir um quadrado com a área igual à de um círculo dado?
[3] Um conjunto infinito é considerado enumerável quando há uma bijeção com o conjunto dos números naturais.

Referências:

[1] MARCUS, S. NICHITA, F.F. On Transcendental Numbers: New Results and a Little History. **Axioms** 2018, *7*, 15.
Disponível em: <http://www.mdpi.com/2075-1680/7/1/15> Acesso em 29/08/18.

[2] BAKER, ALAN. **Transcendental Number Theory.** Cambridge University Press, 1975.

[3] LINDEMANN, Ueber die Zahl Pi, **Mathematische Annalen** 20 (1882): 213-225.
Disponível em: <http://eudml.org/doc/157031>. Acesso em 29/08/18.

[4] FRITSCH, R. Hilberts Beweis der Transzendenz der Ludolphschen Zahl π.
Дифференциальная геометрия многообразий фигур 34 (2003): 144-148.
Disponível em: <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~fritsch/pi.pdf>
Acesso em 29/08/18.

[5] NIVEN, IVAN. The Transcendence of π. **The American Mathematical Monthly**, 46, No.8 (outubro de 1939), 469-471.
Disponível em <https://www.jstor.org/stable/2302515 >. Acesso em 21/08/18

Resolubilidade global de certos operadores lineares com coeficientes constantes

Fernanda Dartora Musha
Bacharelado e Licenciatura em Matemática - UFPR
fernanda.musha@gmail.com

Prof. Cleber de Medeira (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
clebermedeira@ufpr.br

Palavras-chave: Resolubilidade global, série de Fourier, números de Liouville.

Resumo:

Neste trabalho estudamos a resolubilidade global da seguinte classe de operadores diferencias parciais lineares de primeira ordem

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha + i\beta)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Buscando soluções periódicas para $Lu = f$, usamos como ferramenta principal a *série de Fourier* para caracterizar as funções suaves periódicas através do decaimento dos seus coeficientes de Fourier.

Se f é uma função 2π-periódica e suave, para que exista uma solução da equação $Lu = f$, é necessário que o coeficiente de Fourier $\widehat{f}(0,0)$ seja nulo. Dessa forma consideramos apenas funções f definidas no seguinte conjunto

$$E = \{f \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^2);\ \widehat{f}(0,0) = 0\}.$$

Definição 1 *Dizemos que o operador L é globalmente resolúvel em $\mathbb{R}^2$ se, dada uma função $f \in E$, existe uma função suave periódica $u(x,y)$ tal que $Lu = f$.*

A aproximação de números reais por números irracionais é uma importante ferramenta que aparece naturalmente em nossos resultados. Nesse sentido, uma das principais classes de números irracionais que estudamos é a dos números de Liouville, os quais são definidos da seguinte forma.

Definição 2 *Um número irracional α é chamado de número de Liouville se, para todo $N > 0$, existem infinitos racionais p/q que satisfazem a desigualdade*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^N}.$$

Um resultado interessante dessa classe de números é que todo número de Liouville é transcendente.

O teorema principal do trabalho apresenta uma caracterização completa da resolubilidade global para a classe de operadores definida previamente.

Teorema 3 *O operador diferencial parcial linear*

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha + i\beta)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

é globalmente resolúvel se, e somente se, vale uma das seguintes condições:

1. $\beta \neq 0$;
2. $\beta = 0$ *e* $\alpha \in \mathbb{Q}$;
3. $\beta = 0$ *e* $\alpha \notin \mathbb{Q}$ *é não-Liouville.*

Como consequência desse teorema, o operador L é globalmente resolúvel quando α é um número algébrico.

Referências

[1] FIGUEIREDO, D. G.. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, IMPA, 4 ed. Rio de Janeiro, 2009.

[2] GOULART, J. A. I.. *Hipoeliticidade Global e Aproximação de números reais*, Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática) - Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

[3] HOUNIE J.. *Globally Hypoelliptic and globally solvable first order evolution equations*, Transactions of the American Mathematical Society, v. 252, p. 233-248, 1979.

[4] LIMA, E. L.. *Curso de Análise Vol. 1*, IMPA, ed. 14 Rio de Janeiro, 2016.

[5] LIMA, E. L.. *Curso de Análise Vol. 2*, IMPA, ed. 11 Rio de Janeiro, 2015.

[6] MARTINEZ, F.; MOREIRA, C.; SALDANHA, N.; TENGAN, E.. *Teoria dos Números, um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

[7] TAKAHASHI, L. T., *Hipoeliticidade Global de Certas Classes de Operadores Diferenciais Parciais*.
Dissertação (mestrado em matemática), PPG-M, UFSCar, São Carlos, 1999.

Análise da energia de soluções de equações da onda

José Mauricio Finco Mendonça [1]
Engenharia Civil – UFPR
jose-mauricio-finco@hotmail.com

Prof. Raul Prado Raya
Departamento de Matemática – UFPR
raulprado@ufpr.br

Palavras-chave: Equação da onda, Série de Fourier, Energia do sistema.

Resumo:

Estudamos a equação de ondas com coeficientes constantes:

$$u_{tt} - c^2 u_{\mathrm{xx}} = 0$$

e a equação de onda com um termo dissipativo provocada pelo atrito, representado por u_t:

$$u_{tt} - c^2 u_{\mathrm{xx}} + u_t = 0.$$

Ambos modelos unidimensionais com condições de contorno de Dirichlet.

O método de resolução desses problemas é chamado de método de Fourier, que consiste em duas etapas. Primeiramente utiliza-se o método de separação de variáveis para obter problemas de autovalor para equações diferenciais ordinárias, que estão relacionadas com as equações diferenciais parciais em estudo. Nessa parte, obtém-se um conjunto de soluções da equação diferencial parcial que satisfaz uma parcela das condições de contorno. Na segunda parte, utilizamos essas soluções para compor a solução geral do problema, de maneira em que os termos são produtos dessas soluções por coeficientes devidamente escolhidos, parte esta chamada de Análise de Fourier.

Nossa ênfase é a análise da energia das soluções destas equações. Mostramos que a energia da solução da equação da onda é constante e que quando a equação da onda possui um termo dissipativo, essa energia decai exponencialmente no tempo.

Referências:

[1] GILBERT STRANG. **Calculus.** Wellesley Cambridge Press. Massachusetts Institute of Technology, 1991. Calculus Online Textbook. Ebook. Disponível em: <https://ocw.mit.edu/ans7870/resources/Strang/Edited/Calculus/Calculus.pdf>. Acesso em 13 dez. 2018.

[1] Bolsista do PICME

[2] ENRIQUE ZUAZUA. **Métodos Numéricos de resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales**. Basque Center for Applied Mathematics (BCAM), Bilbao, Spain, 2009. Ebook. Disponível em: <http://paginaspersonales.deusto.es/enrique.zuazua/documentos_public/archivos/personal/comites/notas-05_065-complete.pdf>. Acesso em: 13 dez. 2018.

[3] WILLIAM E. BOYCE; RICHARD C. DIPRIMA. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**, 1965.

Teorema da Função Implícita e Extensão

Lucas Matheus Sandeski *
Licenciatura em matemática - UEPG
lucassan1509@gmail.com

Prof. Marciano Pereira (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística -UEPG
marciano@uepg.br

Palavras-chave: Teorema Função Implícita, Desigualdade de Young, Espaços de Banach.

Resumo: De modo geral é útil trabalhar com variáveis independentes, trabalhando com o menor número de variáveis para dado problema. Em alguns casos como na equação $x^3 + y^2 + z^2 = -8,1 \cdot 10^{-8}$, é fácil escrever x em função de y e z. Porém no sistema

$$\begin{cases} x^3yz + yz^2 + xy + x^2y^3z^2 = 0 \\ zyx + y^5x^4 + zy^3 + xyz^2 = 0, \end{cases}$$

já não é tão fácil.

De modo que se torna útil ter algum meio de saber de antemão se é possível ou não escrever alguma das variáveis em função de outras, em uma região. Por isso, este trabalho se voltou a estudar o Teorema da Função Implícita, que pode ser usado para resolver o problema.

Teorema 1 (Teorema da Função Implícita - TFI) *Se $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma função de C^1. Suponha $f(x_0, y_0) = 0$ e*

$$det \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \neq 0.$$

Então existe aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ função de classe C^1 tais que

a) $x_0 \in \Omega$ *e* $\varphi(x_\circ) = y_0$;

b) $f(x, \varphi(x)) = 0$, $\forall x \in \Omega$.

Além disso, o TFI pode ser estendido para espaços de Banach em vez de espaços euclidianos. Porém antes de enunciá-lo definiremos a derivada de uma função entre espaços vetoriais normados e também o conceito de derivadas parciais em espaços vetoriais normados.

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME).

Definição 1 (Derivada) *Para X, Y espaços vetoriais normados e $A \subset X$ um aberto, dizemos que uma aplicação $f : A \to Y$ é diferenciável em $x_\circ \in A$ se existe uma aplicação linear e contínua, denotada por $f'(x_\circ) : X \to Y$, que será chamada a derivada (ou derivada de Fréchet) de f em $x_\circ$, tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(x_\circ + h) - f(x_\circ) - f'(x_\circ)(h)||_Y}{||h||_X} = 0.$$

Nesta definição, $f'(x_\circ)(h)$ denota o valor da aplicação linear $f'(x_\circ)$ aplicada no vetor h pertencente a X, e assim, $f'(x_\circ)(h)$ pertence a Y.

Apresentaremos um exemplo bem simples desse conceito. Sejam $f : X \to Y$ uma função linear contínua e X, Y espaços vetorias normados. Então $f(x_\circ + h) = f(x_\circ) + f(h)$. Se considerarmos $f'(x_\circ)(h) = f(h)$, então a identidade

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(x_\circ + h) - f(x_\circ) - f'(x_\circ)(h)||_Y}{||h||_X} = 0,$$

fica satisfeita para todo $h \in X$, o que nos leva a concluir, pela unicidade da derivada, que f é diferenciável em $x_\circ$ e $f'(x_\circ) \equiv f$. Ou seja, a derivada de uma transformação linear contínua é a própria transformação.

Definição 2 (Derivada Parcial) *Sejam X, Y, Z espaços vetoriais normados e A um conjunto aberto de $X \times Y$. Seja*

$$\begin{array}{rccc} f: & A \subset X \times Y & \longrightarrow & Z \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x, y). \end{array}$$

Seja $(x_\circ, y_\circ)$ pertencente a A e $A_{y_\circ} = \{x \in X | (x, y_\circ) \in A\}$. Como A é aberto então $A_{y_\circ}$ é aberto (em X). Seja

$$\begin{array}{rccc} F: & A_{y_\circ} \subset X & \longrightarrow & Z \\ & x & \longmapsto & F(x) = f(x, y_\circ) \end{array}.$$

Se F é diferenciável em $x_\circ$ então $F'(x_\circ) : X \to Z$ é uma aplicação linear e contínua chamada derivada parcial em f em $(x_\circ, y_\circ)$ em relação a variável x, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)$.

Podendo agora enunciar o Teorema da Função Implícita em espaços de Banach.

Teorema 2 (Teorema da Função Implícita em espaços de Banach) *Sejam E , F e G espaços vetoriais normados e assuma F um espaço de Banach. Sejam $\Omega \subset E \times F$ aberto e $f : \Omega \to G$ uma função tal que*

a) f é contínua;

b) para todo $(x, y) \in \Omega$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe e é contínua em Ω;

c) $f(a, b) = 0$ e $T = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ é invertível e tem inversa contínua.

Então, existem vizinhanças U de a e V de b e uma função contínua $\phi : U \to V$ tal que $\phi(a) = b$ e as únicas soluções em $U \times V$ da equação $f(x,y) = 0$ são da forma $(x, \phi(x))$. Além disso, se f é diferenciável em (a,b), então ϕ é diferenciável em a e

$$\phi'(a) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right].$$

Entre outras aplicações, esse teorema pode ser usado para demonstrar o Teorema da Função Inversa, e o Método dos Multiplicadores de Lagrange, enunciado abaixo.

Teorema 3 (Método dos Multiplicadores de Lagrange) *Sejam f, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e $S = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$. Supponha $x_\circ \in S$ tal que*

$$g'(x_\circ) \neq 0 \text{ e } f(x_\circ) = \mathit{min}\{f(x); x \in S\}.$$

Então $f'(x_\circ)$ e $g'(x_\circ)$ são linearmente dependentes, isto é, existe (multiplicador de Lagrange) $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x_\circ) = \lambda \nabla g(x_\circ)$.

Que por sua vez é utilizado em demonstrações, como por exemplo o da desigualdade de Young, enunciada abaixo.

Desigualdade 1 (Young) *Sejam p e q tais que $1 < p,q < +\infty$ e $1/p + 1/q = 1$. Então, para todos $x,y \in \mathbb{R}$, vale a desigualdade*

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

Referências:

[1] Cipolatti, R. **Cálculo Avançado I**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2002.

[2] Domingues H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

[3] Kreyszig, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. Virgínia: John Wiley & Sons, 1989.

[4] Wilberstaedt, J. M. **Diferenciabilidade e o Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach**. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

[5] Friedman, A. **Advanced Calculus**. New York: Dover Publications, 2007.

[6] Lima, E. L. **Análise Real** Volume 2. Rio de Janeiro: IMPA,2004.

[7] Moriya, A. I. **Os Teoremas de Funções Inversa e Implícita e suas Aplicações**. Monografia (Especialista em Ciências - Área de Concentração: Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2011.

[8] Araújo, G. S. **O teorema da Função Implícita em Espaços de Banach e Aplicações**. Monografia (Bacharel em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza ,Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2010.

O Teorema da Função Inversa e Aplicações

Maria Verônica Bartmeyer *
Licenciatura em Matemática - UEPG
veronicabartmeyer@gmail.com

Prof. Marciano Pereira (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
marciano@uepg.br

Palavras-chave: Teorema da Função Inversa, Método das Características.

Resumo:

O Teorema da Função Inversa é um dos principais resultados da Análise. Entre suas aplicações, citamos o Teorema da Função Implícita, o Teorema Fundamental da Álgebra, a Forma Local de Submersões, a continuidade C^k da inversão de aplicações lineares e o Método das Características para resolução de EDPs de primeira ordem, o qual será tratado neste trabalho. A demonstração deste teorema é feita com a utilização dos métodos da Análise Matemática em $\mathbb{R}^n$ e, para sua extensão aos espaços vetoriais normados, utiliza-se também métodos da Análise Funcional.

O enunciado do Teorema da Função Inversa em $\mathbb{R}^n$ é como segue:

Teorema 1 (Teorema da Função Inversa) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ função de classe C^1 tal que $J_f(x_0) \neq 0$. Então existe $\delta_0 > 0$ tal que*

a) f é injetora em $U = B_{\delta_0}(x_0)$;

b) $V = f(U)$ é aberto;

c) $f^{-1} : V \to U$ é de classe C^1 e $[(f^{-1})'(f(x_0))] = [f'(x_0)]^{-1}$.

Para demonstrá-lo, são necessárias quatro etapas, as quais estão descritas abaixo:
Etapa 1: Para mostrar que existe $\delta_0 > 0$ tal que f é injetora em $B_{\delta_1}(x_0)$, demonstrar que $f(x+h) \neq f(x)$ se δ é suficientemente pequeno.
Etapa 2: Em seguida, mostrar que existe $\delta_2 > 0$ tal que $f(B_{\delta_2}(x_0))$ é aberto.
Etapa 3: Tomando $U = B_{\delta_2}(x_0)$ e $V = f(U)$, provar então que $f^{-1} : V \to U$ é diferenciável.
Etapa 4: Verificar por fim, que $f^{-1} : V \to U$ é de classe C^1.

*Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado PICME.

Como um exemplo de aplicação, o teorema da função inversa garante a validade da mudança de coordenadas no Método das Características. Ele consiste no ponto-chave desse método, pois com uma mudança apropriada de coordenadas, podemos trocar o problema de resolver uma equação diferencial parcial de primeira ordem pela resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias. O método das características é utilizado para a solução do seguinte

Problema: Seja γ uma curva de $\mathbb{R}^2$ parametrizada por $\gamma : I \to \Omega$, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$ e Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$. Sejam a, b, c: $\Omega \to \mathbb{R}$ funções dadas. Determinar uma função $\varphi(x, y)$ solução da equação

$$a(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = c(x,y),$$

cujos valores sobre a curva γ são prescritos, isto é, $\varphi(\gamma(\xi)) = \varphi_0(\xi)$ onde $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ é uma função dada.

Por outro lado, pode-se estender o teorema da Função Inversa a espaços de Banach de dimensão infinita. Para isso substituimos a condição "$J_f(x_0) \neq 0$" por "$f'(x_0)$ invertível", mas antes vejamos a definição de derivada num contexto mais geral.

Definição (Derivada) Para X, W espaços vetoriais normados e $U \subset X$ aberto, dizemos que uma aplicação $f : U \to W$ é diferenciável em $x_0 \in U$ se existe uma aplicação linear e contínua, denotada por $f'(x_0) : X \to W$ que será chamada a derivada de f em x_0, tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)||_W}{||x - x_0||_X} = 0.$$

Nesta definição, $f'(x_0)(x - x_0)$ denota o valor da aplicação linear $f'(x_0)$ aplicada no vetor $(x - x_0)$ partencente a X e assim $f'(x_0)(x - x_0)$ pertence a W.

Exemplo Consideremos $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Então, se x_0 pertence ao intervalo $(0,1)$, sabemos do Cálculo 1 que $f'(x_0) = 3x_0^2$ é uma aplicação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Vamos verificar se a definição de derivada é satisteita para $x_0 = \frac{1}{2}$, donde $f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$, ou seja, a transformação linear e contínua $f'(x_0) = T$ em que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{3}{4}x$. De fato,

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{||f(x) - f(\frac{1}{2}) - f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})||_W}{||x - \frac{1}{2}||_X} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{|x^3 - (\frac{1}{2})^3 - \frac{3}{4}(x - \frac{1}{2})|}{|x - \frac{1}{2}|} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{|x^3 - \frac{1}{8} - \frac{3x}{4} + \frac{3}{8}|}{|x - \frac{1}{2}|} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{|x^3 - \frac{3x}{4} + \frac{1}{4}|}{|x - \frac{1}{2}|} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{|(x - \frac{1}{2})(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2})|}{|x - \frac{1}{2}|} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{|x - \frac{1}{2}||x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}|}{|x - \frac{1}{2}|} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} |x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}| = 0.$$

Teorema 2 *(Extensão do Teorema da Função Inversa para Espaços de Banach) Seja W um espaço de Banach, $\Omega \subset W$ aberto e $f : \Omega \to W$ função de classe C^1 tal que $f'(x_0)$ é invertível. Então existe $U \subset \Omega$ uma vizinhança aberta de x_0 tal que*

a) $V = f(U)$ é aberto em W;

b) $f : U \to V$ é difeomorfismo de classe C^1.

Referências:

[1] ANDRADE, Doherty. **O Teorema da Função Inversa e da Função Implícita**. Publicação Eletrônica. Disponível em: http://www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos-pdf/inversa.pdf. Acesso em: 31 agosto 2018.

[2] CIPOLATTI, Rolci. **Cálculo Avançado I**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2002.

[3] DOMINGUES, Hygino H. **Espacos Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

[4] KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. Normed Spaces. Banach Spaces. 1ª ed. John Wiley Sons, 1978.

[5] LEWIS, David W. **Matrix Theory**. Singapore: World Cientific, 1991.

[6] LIMA, Elon L. **Análise no Espaço** $\mathbb{R}^n$. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

[7] MORIYA, Alex Issamu. **Os Teoremas de Funções Inversa e Implícita e suas Aplicações**. 2011. 60 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2011.

[8] NETO, Antônio C. M. **Tópicos de Matemática Elementar - Volume 3 Introdução à Análise**. **A Concavidade de uma Função** 2ª ed. SBM, 2013.

[9] TEZOTO, Leandro. **Sobre o Teorema da Função Inversa**. 37f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Geociências e Ciência Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

Equação do Calor e Séries de Fourier

Vinicius Medeiros Prantl dos Santos *
Licenciatura em Matemática - UFPR
vinicius.medeiros0706@gmail.com

Prof. Dr. Jurandir Ceccon (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
ceccon@ufpr.br

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Equação do Calor, Séries de Fourier.

Resumo:

Iremos considerar o problema da condução do calor em uma barra feita de material homogêneo e com os lados perfeitamente isolados, de comprimento L, com as extremidades mantidas a uma temperatuda de zero grau e supondo que a espessura da barra seja tão pequena que a temperatura u é constante em qualquer seção reta desta barra. Este problema é modelado pela seguinte equação diferencial parcial

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) = 0, & u(L,t) = 0, \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde α^2 é uma constantante chamada de *difusibilidade térmica* que depende somente do material da barra. Devido às características do domínio da função u, o método de separação de variáveis pode ser usado para se obter uma solução deste problema. Este método consiste em supor que a solução $u(x,t)$ pode ser escrita como $u(x,t) = X(x)T(t)$, sendo que x representa a variável espacial e t representa a variável temporal. Com esta hipótese, é possível mostrar que as funções X e T devem satisfazer as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ T'(t) + \alpha^2 \lambda T(t) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Usando as soluções destas EDO's juntamente com as condições de fronteira do problema do calor (1), podemos verificar que uma função candidata a solução do problema (1) será da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} sen \frac{n\pi x}{L}. \tag{3}$$

*Voluntário do Programa PET-Matemática

Por causa da condição inicial de temperatura em (1), a função u será solução do problema da condução do calor somente se a função f puder ser escrita como

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen \frac{n\pi x}{L} = f(x). \tag{4}$$

Desta forma, precisamos escolher os coeficientes c_n tais que a série de funções de senos nesta igualdade, de fato convirja para a distribuição inicial de temperatura f dada em (1).

Esta representação acima é chamada de série de Fourier. De modo mais geral, sempre que tivermos a representação de uma função f na forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos \frac{n\pi x}{L} + b_n sen \frac{n\pi x}{L}),$$

dizemos que estamos escrevendo a função em série de Fourier.

Porém, nem toda função possui representação em série de Fourier. Ou seja, precisamos saber quais são as condições necessárias para que dada uma Série de Fourier ela seja convergente (de preferência convergência uniforme). Além disso, dada uma função f como fazemos pra escolher os coeficientes a_n e b_n de tal forma que a série de Fourier convirja para a função f?

Para responder essas questões, precisamos usar resultados clássicos de Análise Matemática como: critérios de convergência uniforme de séries de funções, fórmulas de integrações, identidade de Parseval, dentre outros. Com isso, conseguimos critérios para sabermos quando vale a igualdade (4) e desta igualdade checamos que (3) realmente é solução de (1).

Referências:

[1] FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.

[2] BOYCE, W. E; DIPRIMA R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8 ed (2005) LTC.

[3]GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. vol 4. Rio de Janeiro, LTC.

Análise Numérica

Curvas de Bézier e Polinômios de Bernstein

Gustavo Henrique Silva Sarturi
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
gustavo.sarturi@ufpr.br

Prof. Dr. Qiang Li
Henan Polytechnic University
qianglinan@126.com

Palavras-chave: Polinômios de Bernstein, Curvas de Bézier, Curvas Paramétricas

Resumo:
Um problema recorrente na computação gráfica é como aproximar uma curva dada, isto é, obter uma curva que aproxime a curva original e que o computador possa interpretar. No caso linear o problema é relativamente fácil, mas, em geral, pode ser uma tarefa difícil. A ideia então é construir uma curva paramétrica que seja manipulável, que tenha uma expressão simples de interpretar e que nos dê mais liberdade de controle. Através de um modo intuitivo e algoritmico é que desenvolvemos as chamadas "Curvas de Bézier".

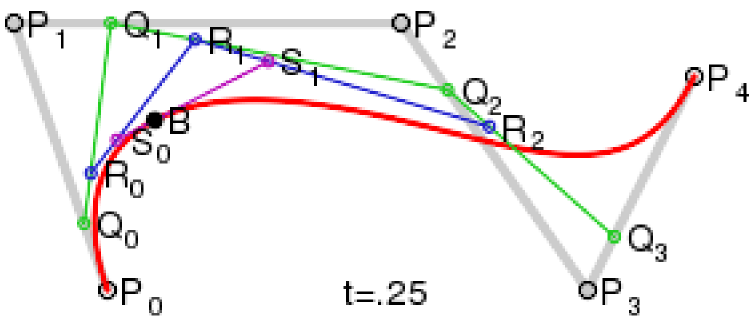


Figura 1: Exemplo de Curva de Bézier

As Curvas de Bézier foram desenvolvidadas independentemente na década de 60 por Paul de Casteljau e Pierre Bézier, ambos trabalhavam na indústria automobilística e buscavam soluções para desenvolver modelos de automóveis com uma melhor aerodinâmica e com um design refinado para carros. Apesar da importante contribuição de Casteljau, as curvas levam o nome de Bézier pois ele publicou os resultados primeiro.

O Algoritmo de Casteljau é um método recursivo para se gerar uma Curva de Bézier. Esse algoritmo nos permite também subdividir a curva de Bézier em partes recebendo um parâmetro qualquer. Apesar de simples e aparentar ser um algoritmo lento, mostra-se numericamente estável e é amplamente utilizado com algumas modificações robustas. A expressão algébrica de uma curva de Bézier pode ser calculada à partir de Polinômios da Base de Bernstein. Os Polinômios de Bernstein surgiram como uma alternativa de demonstração do Teorema de Stone-Weierstrass. Foge do escopo deste trabalho a demonstração deste Teorema. Utilizaremos os polinômios de Bernstein para visualizar certas propriedades das Curvas de Bézier, em especial a sua construção.

Sendo assim, a principal vantagem de se implementar uma Curva de Bézier ao invés de uma outra técnica de interpolação ou aproximação em CAD (Computer Aid Design) é que sua descrição matemática é simples, intuitiva, e também, por poder ser utilizada para representar qualquer forma. Atualmente, tais curvas são amplamente utilizadas na área de Design para o desenvolvimento de fontes, carros, produtos e em particular, na indústria de animação 2D e 3D.

O objetivo deste trabalho é apresentar historicamente como surgiram as curvas de Bézier e analisar de modo geral a sua construção, aplicação e suas relações com os Polinômios de Bernstein.

Referências

[1] BIEZUNER, R. J. **Curvas de Bézier**. Notas de seminário de Iniciação Científica. UFMG, Belo Horizonte, 2014.

[2] GREINER, G. **Lectures on Geometric Modelling**. 125 f. Charles University, Prague, Czech Republic, 2010.

[3] USTAOGLU, C. **Generalized Bernstein Polynomials**. 45 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Eastern Mediterranean University, Gazimağusa, Northern Cyprus, 2014.

[4] SIMONI, R. **Teoria Local das Curvas**. 86 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática) – UFSC, Santa Catarina, 2005.

Processamento Digital de Imagens Utilizando Decomposição em Valores Singulares

Letícia do Rocio Oliveira *
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
leticiaroc.oliveira@gmail.com

Prof. Ademir Alves Ribeiro (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
ademir.aribeiro@gmail.com

Palavras-chave: Valores Singulares, Processamento de Imagens, Análise Numérica.

Resumo:

Uma fotografia pode ser representada por uma matriz A_{mXn}, onde cada elemento da matriz corresponde ao nível de cinza do pixel correspondente na fotografia.

O nível de cinza de um pixel, em geral, tem valor muito próximo aos níveis das células vizinhas, logo, é possível reduzir a quantidade de armazenamento necessário da fotografia utilizando a Decomposição em Valores Singulares (SVD).

A decomposição em valores singulares $A = U\Sigma V^T$ pode ser representada pela expansão do produto exterior:

$$A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + ... + \sigma_n \mathbf{u}_n \mathbf{v}_n^T$$

Os valores singulares da matriz A, em geral, são pequenos, o que permite que A possa ser aproximada por uma matriz de posto menor. Esta aproximação da matriz A é realizada truncando esta expansão após os k primeiros termos.

$$A_k = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + ... + \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T$$

O valor de k é escolhido de forma que a imagem correspondente a A_k seja muito próxima à imagem original e k seja significativamente menor que n.

Neste trabalho, foi realizado um estudo das propriedades matemáticas da Decomposição em Valores Singulares, assim como a análise do menor posto das matrizes A_k, de modo que a imagem correspondente tenha praticamente a mesma qualidade da imagem original.

Segue exemplo de uma imagem com dimensões 1600X1059 pixels e as imagens com postos k relativamente menores que n .

* Bolsista/PET-Matemática

Figura 1: Imagem Original

Figura 2: Posto 400

Figura 3: Posto 100

Figura 4: Posto 25

Referências

[1] Leon, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações*, Rio de Janeiro: LTC, **2014**.;

A Equação de Duffing:
Uma Introdução às Vibrações Não Lineares

Raquel Ayumi Aita *
Graduanda em Engenharia Civil - UFPR
rq.aita@gmail.com

Profa. Dra. Ana Gabriela Martínez (Orientadora)
Departamento de Matemática - UFPR
ag.anagabriela@gmail.com

Palavras-chave: equações diferenciais, vibrações não lineares, métodos de perturbação.

Resumo:

Existe uma grande quantidade de fenômenos físicos e problemas na Engenharia que podem ser modelados matematicamente através de equações diferenciais não lineares. A não linearidade presente nas equações pode ser causada pela geometria do problema ou pelas características dos materiais do sistema estudado. É de grande importância prever a resposta dinâmica de um sistema pois neste caso a introdução de técnicas de controle permite evitar possíveis desgastes nos mecanismos e até danos severos nas estruturas envolvidas.

Poder contar com métodos que forneçam soluções analíticas exatas para este tipo de equações é sempre desejável. Porém, a não linearidade do problema dificulta esta tarefa. Nestas situações em que a solução exata para o problema pode não estar disponível, é fundamental dispor de ferramentas que permitam compreender o comportamento qualitativo do sistema. A obtenção de *soluções aproximadas*, tanto analíticas quanto numéricas também é de grande interesse.

Uma questão central nas aplicações é a dependência das soluções em função das condições iniciais do problema, devido principalmente ao fato de que essas informações, em geral, não são suficientemente precisas. Em sistemas não lineares pequenas perturbações nos dados de entrada podem produzir diferenças substanciais no comportamento futuro. A noção de estabilidade surge para dar respostas a esse tipo de problemas.

Neste trabalho consideramos o estudo das vibrações mecânicas não lineares na rigidez, especificamente com rigidez cúbica e sujeitas a uma excitação periódica. O modelo matemático resultante é dado por uma equação diferencial de segunda ordem não linear,

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_{NL}x^3 = F\cos(\omega t),$$

*Bolsista do PICME.

onde as constantes c, k e k_{NL} correspondem aos coeficientes de amortecimento, rigidez linear e rigidez não linear, respectivamente. Já F e ω denotam a amplitude e a frequência da força de excitação externa do sistema. Esta equação é um problema clássico da dinâmica não linear e é chamada de *equação de Duffing*.

Para o caso de vibrações *livres de ações externas*, é analisado o comportamento qualitativo das soluções de equilíbrio. Para isto, a equação diferencial de segunda ordem é reescrita como um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -cy - kx - k_{NL}x^3. \end{aligned}$$

A estabilidade local dos sistemas de equações não lineares pode ser estudada, sob certas hipóteses, através da análise da estabilidade na origem de uma linearização do sistema não linear. A não linearidade pode gerar a presença de múltiplos pontos de equilíbrio isolados. Neste caso a matriz Jacobiana do sistema é avaliada em cada um destes pontos. O estudo da estabilidade da origem no novo sistema linearizado, cuja matriz é a matriz jacobiana do sistema não linear, permite determinar a estabilidade do sistema original no equilíbrio.

Um outro aspecto a ser abordado é o estudo das propriedades das soluções analíticas aproximadas da equação de Duffing. Estas soluções aproximadas são obtidas através dos chamados métodos de Perturbação. Entre os métodos de perturbação mais usados encontram-se o método dos Balanços Harmônicos e o método da Média (*Averaging Method*). No método da média, a equação diferencial exata não linear $\dot{x} = \epsilon f(t, x, \epsilon),$ com $\epsilon << 1,$ f periódica no tempo e de período T, é substituída por uma nova equação aproximada, $\dot{y} = \epsilon \overline{f}(y)$ onde $\overline{f} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(y, t, 0)\, dt$. Uma teoria robusta do método garante que, sob certas hipóteses, é possível inferir a dinâmica do sistema original a partir da dinâmica do sistema promediado.

No presente trabalho foi aplicado o método da Média na equação de Duffing. Procuraram-se soluções periódicas para este problema. O método fornece uma relação funcional entre a amplitude e a frequência da resposta. Esta dependência, ausente quando a rigidez é apenas uma função linear do deslocamento, põe em evidência a complexidade do problema. Estas características da resposta do problema das vibrações mecânicas com rigidez cúbica foram contrastadas com as respostas das vibrações lineares.

Referências:

BRENNAN, M. J.; KOVACIC, I. **The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour**. Wiley, 2011.

HIRSCH, M. W.; SMALE S.; DEVANEY R. L. **Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos**. Academic Press, 3rd Edition, 2012.

NAYFEH, A. H. **Perturbation Methods**. Wiley-VCH; 1st edition, 2000.

NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. **Nonlinear Oscillations**. John Wiley & Sons, 2008.

Decomposição de Trem para tensores

Wilian de Oliveira
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
wildeolivera@gmail.com

Prof. Yuan Jin Yun (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
yuanjy@gmail.com

Palavras-chave: Tensor, SVD , Tensor trem, TT decomposição,CUR, posto.

Resumo:

O uso de tensores (ou matrizes d-dimencionais) tem aparecido em diversas áreas da matemática como, por exemplo, problema de tratamento de imagem, integração numérica múltipla, big data e métodos de otimização baseado nas séries de Taylor. Porém, nestes casos não se trunca a série na segunda ordem para se criar o método.

Nestes exemplos teremos tensores d-dimensionais onde d pode ser um número muito grande e relativamente complicado abordar estes problemas diretamente. Para contornar essa situação faz-se o uso de decomposições tensoriais, da mesmo forma que se faz com matrizes usando a decomposição SVD, LU ou a decomposição QR, por exemplo.

O objetivo é demonstrar a decomposição de trem para tensores (Tensor train decomposition) e duas outras formas de se aproximar esta decomposição obtendo assim custos computacionais diferentes

A decomposição TT pode ser obtida a partir de uma sequência de decomposições SVD feitas nas matrizes de desdobramento do tensor original.

Seja $\mathcal{A}$ um tensor d-dimensional, então

$$\mathcal{A} = \sum_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_d} G_1(i_1, \alpha_1) G_2(\alpha_1, i_2, \alpha_2) \ldots \ldots G_{d-1}(\alpha_{d-2}, i_{d-1}, \alpha_{d-1}) G_d(i_d, \alpha_d).$$

A forma de se obter esta decomposição e, assim, os tensores G_i é se fazer uma sequência de desdobramentos matriciais do tensor original, por conseguinte fazer a decomposição SVD destes tensores, e, por fim, novamente se fazer o dobramento matricial obtendo os tensores G_i.

A partir deste ponto pode-se ao invés de se fazer a decomposição SVD completa para as matrizes de desdobramento, se faz o truncamento da decomposição SVD obtendo assim a melhor aproximação de posto-r para estas matrizes. Deste modo, do procedimento anterior obtém-se uma boa aproximação para o tensor original com um erro de truncamento que pode ser estimado.

A segunda forma de se aproximar a decomposição de trem segue do fato de que a decomposição SVD não é tão barata computacionalmente. Ainda se tem que as matrizes U dadas pela decomposição SVD no geral tendem a ser matrizes cheias e isso pode ser um problema para o nosso custo de armazenamento de memória.

A forma de contornar esse novo problema é substituir a decomposição SVD da aproximação feita anteriormente pela decomposição CUR. Esta nova decomposição por sua vez possui um custo de armazenamento muito menor e isto é bastante vantajoso para as aplicações em geral.

Referências

[1] W. Hackbusch. *Tensor spaces and numerical tensor calculus*, volume 42. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] M. W. Mahoney and P. Drineas. Cur matrix decompositions for improved data analysis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, pages pnas–0803205106, 2009.

[3] N. Mitrovic, M. T. Asif, U. Rasheed, J. Dauwels, and P. Jaillet. Cur decomposition for compression and compressed sensing of large-scale traffic data. In *Intelligent Transportation Systems-(ITSC), 2013 16th International IEEE Conference on*, pages 1475–1480. IEEE, 2013.

[4] I. Oseledets and E. Tyrtyshnikov. Tt-cross approximation for multidimensional arrays. *Linear Algebra and its Applications*, 432(1):70–88, 2010.

[5] M. A. O. Vasilescu and D. Terzopoulos. Tensortextures: Multilinear image-based rendering. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 23(3):336–342, 2004.

Educação Matemática

FANTAN: Uma Proposta de Ensino de Divisão Euclidiana para Deficientes Visuais

Amanda Pasinato Cruz, Felipe Meira Goinski, Natalia Mota Oliveira
Licenciatura em Matemática – UTFPR
amandapasinatocruz@hotmail.com; lipe20009@hotmail.com; nat.mota.oliveira@gmail.com

Profa. Maria Lucia Panossian (Orientador)
Departamento de Matemática – UTFPR
mlpanossian@utfpr.edu.br

Palavras-chave: Ensino, Deficiência Visual, Divisão Euclidiana.

Resumo:

O Ministério da Educação e Cultura (MEC) aponta que 18,6% da população brasileira possuem algum tipo de deficiência visual, onde 6,5 milhões apresentam deficiência visual severa, 506 mil têm perda total da visão (0,3% da população) e 6 milhões possuem grande dificuldade para enxergar (3,2%). Com base nesses dados, através de conversas com professores da rede pública de educação e na realidade de muitas escolas, observam-se as dificuldades apresentadas para preservar o direito à educação que os estudantes com algum nível de deficiência visual possuem. Estes obstáculos, encontrados em sala de aula, vão desde o âmbito do ensino de um conteúdo específico até o social, como dificuldades de inclusão e de aprendizado. Focando nessas barreiras educacionais, o projeto de extensão "A Organização do Ensino de Matemática para Cegos", desenvolvido na Universidade Tecnológica Federal do Paraná no primeiro semestre de 2018, visou à formação de futuros docentes e no desenvolvimento de situações de ensino realmente inclusivas. Através deste projeto foram elaborados planos de aula postos em prática com alunos da Escola Osny Macedo Saldanha, cujo mantenedor é o Instituto Paranaense de Cegos (IPC).

Um dos planos elaborados envolveu a adaptação do jogo FANTAN (PANOSSIAN, MOURA, 2010). O objetivo principal da ação foi o ensino da Divisão Euclidiana e das relações entre a Divisão e Multiplicação de números naturais para estudantes entre 8 e 11 anos (Ensino Fundamental I), de tal forma que crianças com deficiência visual, ou não, pudessem aprender simultaneamente utilizando os mesmos materiais.

O FANTAN era um jogo de apostas que "surgiu na China, há centenas de anos, e muito popular na Coréia. Depois de sua divulgação por vários países asiáticos, chegou à Europa por meio dos portugueses, que tiveram acesso a ele em Macau." (PANOSSIAN, MOURA, 2010, p. 4). As regras gerais do jogo são: cada jogador deve receber 20 fichas e, cada um, deverá apostar em um número distinto disposto no tabuleiro (Figura 1). Um dos jogadores apanha um punhado de pedrinhas e os espalha sobre o tabuleiro (ou mesa). Elas deverão ser agrupadas de acordo com a quantidade de jogadores. Por exemplo: Se participam do jogo, 4 jogadores, as pedrinhas deveriam ser separadas em grupos de quatro, sendo o resto possível os números 0, 1, 2 ou 3, que os

jogadores apostaram. Ganha a rodada e as fichas dos adversários quem apostou no resto certo, ou seja, a quantidade de pedrinhas que sobrou sobre o tabuleiro. A rodada termina quando algum jogador não tiver mais fichas suas. Ganha o jogador que tiver mais fichas.

Figura 1 – Tabuleiro do Fantan[1]. Fonte: Autoria própria.

A dinâmica do jogo, apesar de simples, forma um conceito por vezes muito abstrato: a divisão! Isso ocorre porque ao formar grupos de 4 pedrinhas, por exemplo, os alunos estão dividindo uma quantidade por 4. De modo geral, definimos matematicamente a Divisão Euclidiana como: dados $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$, existem $q, r \in \mathbb{N}$ com $0 \leq r < b$, tal que:

$$a = b.q + r \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Onde temos que "a" é o dividendo; "b" o divisor; "q" o quociente e "r" o resto.

Segundo Panossian (2010), a utilização do Fantan na formação do conceito de divisão euclidiana contribui para a compreensão do processo e o algoritmo da divisão, sendo necessária a organização do ensino por parte do professor. A partir disso, surgiu a ideia de adaptá-lo para que estudantes com deficiência visual pudessem jogar também.

A primeira adaptação do jogo foi pensando em contraste de cores e utilização do Braille (Figura 2), mas como algumas das crianças atendidas não eram alfabetizadas em Braille, utilizaram-se também tampas de garrafa simbolizando a quantificação do número e os números escritos à tinta foram feitos com recortes de E.V.A., criando relevo, dessa forma os alunos cegos puderam ter contato com a escrita usual dos videntes.

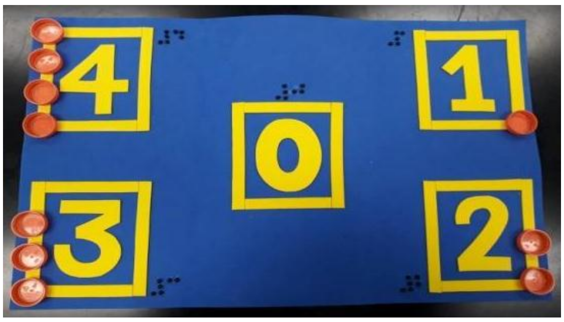


Figura 2 – Tabuleiro Fantan Acessível[2], primeira versão. Fonte: Autoria própria.

Para facilitar a contagem por parte dos alunos cegos, utilizaram-se caixas de ovos como nichos para agrupar as pedrinhas, desta forma não haveria problemas com a localização espacial dos alunos.

Após o desenvolvimento do jogo houve uma discussão com os alunos sobre as relações entre multiplicação e divisão e através disso descobria-se a quantidade de pedrinhas selecionadas no começo do jogo. Apesar dos alunos terem gostado da atividade, percebemos que a posição dos números dificultava as apostas e a leitura do Braille (pela disposição, alguns jogadores encontravam o número do tabuleiro ao contrário). Pensando nessas e outras possíveis adaptações, surgiu a segunda versão do Tabuleiro de Fantan Acessível (Figura 3), onde cada número está numa ficha com o recorte padrão no canto superior direito, com o Braille em *strass* e velcro no verso para prendê-la no tabuleiro na posição que o jogador desejar. Dessa forma buscamos maior comodidade e autonomia para todos os jogadores.

Figura 3 –Tabuleiro Fantan Acessível[3], segunda versão. Fonte: Autoria própria.

Apesar da nova versão não ter sido utilizada ainda, considera-se que o trabalho obteve êxito no ensino de divisão euclidiana para estudantes cegos e com baixa visão e este jogo realmente ficou acessível como desejado.

Referências:

PANOSSIAN, Maria Lucia; MOURA, M. O.de. **O jogo Fantan**: explorações didáticas. In: Anais do X ENEM - ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010, Salvador. Educação Matemática, Cultura e Diversidade, 2010. Disponível em: <http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/RE/T4_RE438.pdf> Acesso em: 24 Ago. 2018.

PORTAL MEC. Ministério da Educação. **Data reafirma os direitos das pessoas com deficiência visual.** 2017. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/202-264937351/58391-data-reafirma-os-direitos-das-pessoas-com-deficiencia-visual> Acesso em: 11 Set. 2018.

[1] Descrição da figura 1: tabuleiro em E.V.A. amarelo com os números 0, 1, 2 e 3 escritos nos cantos e “FATAN” escrito ao centro.

[2] Descrição da figura 2: tabuleiro em E.V.A. azul, com números em E.V.A. amarelo, tampas de garrafa laranja e números em Braille feitos com “cabeças” de alfinete em preto. Nas extremidades do tabuleiro temos os números 1, 2, 3 e 4 e ao centro o número 0. Cada número possui uma moldura de E.V.A. amarelo onde estão coladas as tampas de garrafa à direita do número e a representação em Braille à esquerda.

[3] Descrição figura 3: tabuleiro em E.V.A. preto; fichas em E.V.A. azul claro com velcro no lado oposto; sobre cada ficha e à esquerda existe o número à tinta em E.V.A. roxo, logo abaixo do número, está a representação da quantidade com *strass* grandes e á direita existe a representação do números em Braille com *strass* menores.

Matematicativa,
Cilindro de Sugihara e Simetria

Amanda da Rocha Ribeiro1
Licenciatura em Matemática – UFPR
amandarribeiro@ufpr.br

Prof. Paula Rogéria Lima Couto (Orientadora)
Departamento de Matemática – UFPR
paulacouto@ufpr.br

Palavras-chave: Matematicativa, Cilindro de Sugihara, Simetria.

Resumo:

Este trabalho tem o objetivo de apresentar uma atividade sobre simetria para ser desenvolvida nas exposições do projeto de extensão Matematicativa. Com o intuito de despertar o interesse e a curiosidade sobre este tema, este projeto da UFPR leva às escolas públicas de Curitiba atividades curiosas e divertidas para que os (as) estudantes tenham um contato diferenciado com a Matemática. Para isto foi desenvolvida uma pesquisa pela primeira autora, bolsista do projeto de extensão, sobre assuntos que poderiam relacionar simetria e ilusão de ótica, dentre os quais destacam-se os chamados Cilindros de Sugihara, objetos que apresentam formas diferentes na frente do espelho e em sua reflexão (Figura 1) e que são tema deste trabalho.

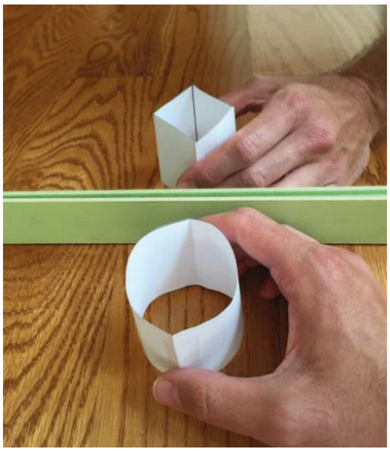


Figura 1: Cilindro de Sugihara.
Fonte: RICHESON, Dave. **Sugihara's Circle/Square Optical Illusion.**

Kokichi Sugihara é um professor de Engenharia no Japão, que observou durante anos objetos tridimensionais que mudam o formato conforme o ângulo de visão se altera. Em 2016 conquistou o 2° lugar no "*Best Illusion of The Year Contest*" com seu material. Desta forma, a atividade aqui proposta é a de exibir alguns destes objetos e de questionar aos (as) estudantes como é possível explicar matematicamente a

1 Bolsista do Programa de Extensão Matematicativa.

ilusão que os objetos causam. Para que os (as) estudantes possam observar a ilusão de ótica, foram confeccionados cilindros de Sugihara de papel e um livro de espelhos é usado para a reflexão de sua imagem. Uma forma de entender o que acontece é supor que há dois observadores, um fora do espelho (Observador 1) que vê o cilindro com topo circular, e outro “dentro” (Observador 2) do espelho que vê o cilindro com topo quadrangular (Figura 2).

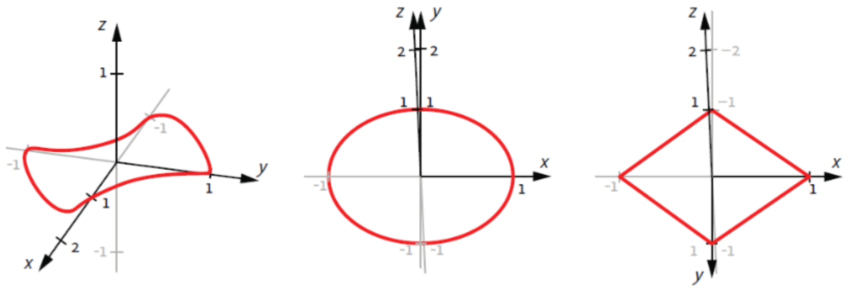


Figura 2: Topo do cilindro, visão do Observador 1 e do Observador 2, respectivamente.
Fonte: RICHESON, Dave. **Sugihara’s Circle/Square Optical Illusion.**

Fazendo uma modelagem matemática das retas de visão dos observadores, nota-se que a curva real do topo do cilindro é a interseção das duas curvas vistas por cada um dos observadores, o que não é algo trivial de visualizar. Na nossa pesquisa foi objeto de estudo a obtenção da equação paramétrica dessa interseção e uma forma de comunicar essas ideias de maneira simples ao público do projeto. A Figura 3 dá uma ideia dos componentes necessários para a referida parametrização.

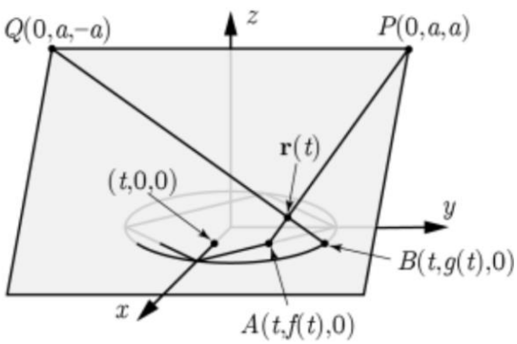


Figura 3: Componentes das retas e localização da curva do topo do Cilindro de Sugihara.
Fonte: RICHESON, Dave. **Two More Impossible Cylinders**.

Com isso, queremos que as experiências ofertadas pelo Matematicativa, além do contato com a Matemática de forma distinta da usual em sala de aula também façam com que os (as) estudantes despertem um maior interesse por essa área do conhecimento e aprendam de forma divertida. É importante ressaltar que desta forma cumpre-se uma das funções do projeto de extensão que é fazer a comunicação da pesquisa desenvolvida no meio acadêmico para o público externo, com o cuidado de fazer essa transição de modo a despertar o interesse do (a) estudante do nível básico. Essas expectativas por parte da equipe do Matematicativa pretendem ser alcançadas nos meses anteriores à novembro deste ano, de modo que já teremos feito as exposições nos colégios e iremos relatar essa experiência durante a apresentação do trabalho no evento J3M.

Referências:

RICHESON, Dave. **Sugihara's Circle/Square Optical Illusion**. Disponível em: <https://divisbyzero.com/2016/07/05/sugiharas-circlesquare-optical-illusion/>. Acesso em: 20 de junho de 2018.

RICHESON, Dave. **Two More Impossible Cylinders.** Disponível em: <https://divisbyzero.com/2016/10/02/two-more-impossible-cylinders/>. Acesso em: 20 de junho de 2018.

O Cálculo do Consumo de Água: um relato de experiência desenvolvida no PIBID-Matemática-UEM

Ana Beatriz de Oliveira, Juliana Ferreira da Silva, Raíssa Araujo de Oliveira e Rebeca L. C. Seiscentos *

Licenciatura em Matemática - UEM

anaabiaah@gmail.com, ra99094@uem.br, rayyyisa.oliveira.raj@gmail.com e rlseiscentos@gmail.com

Prof. Lucieli M. Trivizoli (Orientadora)

Departamento de Matemática - UEM

lmtrivizoli@uem.br

Palavras-chave : PIBID, Resolução de Problemas, Ensino de Funções.

Resumo:

Considerando que o ensino de matemática na educação básica se dá de maneira predominantemente tradicional, foi proposto aos bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM) que estudassem diferentes tendências metodológicas, sendo elas, a História da Matemática, a Modelagem Matemática, o uso de Tecnologias de Informação no Ensino e Resolução de Problemas, sendo esta última o foco das autoras do presente artigo. Estes estudos buscaram refletir sobre estratégias de ensino e outras experiências citadas na literatura sobre Educação Matemática.

Pretende-se neste artigo relatar uma experiência realizada por acadêmicas que, com base nos estudos citados anteriormente, elaboraram e aplicaram uma atividade sobre o Cálculo do Consumo de Água, por meio da Resolução de Problemas para o estudo de função afim. A realização da atividade ocorreu com uma turma do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola parceira do Programa, com o intuito de levar à sala de aula uma matemática mais significativa e próxima da realidade dos alunos. Neste sentido, a proposta do problema foi desenvolver um método para calcular o valor da conta de água, de acordo com os dados da empresa fornecedora na cidade de Maringá.

Inicialmente foi realizado um estudo teórico sobre a Resolução de Problemas com base nos seguintes materiais: "Ensinando pela Resolução de Problemas", capítulo

*Bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência até Março de 2018 do livro Matemática no Ensino Fundamental de John A. Van de Walle (2009), e três capítulos do livro “A Resolução de Problemas na Matemática Escolar”, organizado por Stephen Krulik e Robert E. Reys (1998).

Para o desenvolvimento da atividade, foi utilizada a proposta de Walle (2009), a partir de um formato de aula em três fases, sendo elas: antes, durante e depois.

A fase antes de uma lição dispõe de três objetivos: Verificar se os alunos compreenderam efetivamente o problema; Esclarecer as expectativas acerca da atividade para que os alunos comecem a trabalhar com a mesma; Preparar os alunos para que possam trabalhar no problema, pensando e estimulando os conceitos prévios que os mesmos possuem e que lhes serão úteis.

Na fase durante a lição, os alunos podem trabalhar sozinhos ou em grupos, o professor deve evitar antecipar ou resolver as batalhas mentais dos estudantes, escutá-los ativamente, observando e avaliando eles e não dando informações. O professor pode oferecer sugestões adequadas, que não sugiram que existe um método correto para resolver o problema.

A terceira fase é dita como depois de uma lição, em que os alunos trabalham como uma comunidade de aprendizes, discutindo e justificando as soluções a respeito do problema em que trabalharam. É importante que o professor faça com que todos os estudantes estejam presentes na discussão. O professor deve se manter neutro durante as discussões, para que os alunos não se reservem em expor suas ideias, e também deve ter cuidado com eventuais elogios.

Primeiramente, na reunião semanal do PIBID, foi realizada uma implementação piloto que se deu como uma aula simulada com o grupo de bolsistas. O propósito foi discutir a aplicação da atividade, com possíveis correções e complementações antes de ser levada para o contexto da escola parceira.

Na etapa da implementação na escola, iniciamos a aula com alguns questionamentos sobre o consumo e cobrança da conta de água. Em seguida, organizamos os alunos em grupos e entregamos a tabela de tarifas (Figura 1) com os dados para fossem analisados:

Figura 1: Tabela de tarifas utilizada na atividade

ANEXO A QUE SE REFERE O DECRETO Nº 3576/2016

TABELA DE TARIFAS DE SANEAMENTO BÁSICO

SERVIÇOS PRESTADOS A PARTIR DE 30 DIAS APÓS A PUBLICAÇÃO DESTE DECRETO

CATEGORIA / FAIXAS DE CONSUMO	TARIFA (Em Reais)

TARIFA SOCIAL		
Todas as Localidades Operadas	Até 10 m³	Excedente a 10m³
ÁGUA	8,86	0,89/m³
ESGOTO – 50%	4,43	0,44/m³
ÁGUA E ESGOTO	13,29	1,33/m³

MICRO E PEQUENO COMÉRCIO		
	Até 10 m³	Excedente a 10m³
ÁGUA Todas as Localidades Operadas	33,74	6,84/m³
Curitiba ESGOTO – 85%	28,68	5,81/m³
ÁGUA E ESGOTO	62,42	12,65/m³
Demais Localidades ESGOTO – 80%	26,99	5,47/m³
ÁGUA E ESGOTO	60,73	12,31/m³

TARIFA NORMAL			
RESIDENCIAL	Até 10 m³	Excedente a 10m³	Excedente a 30m³
ÁGUA Todas as Localidades Operadas	33,74	5,06/m³	8,63/m³
Curitiba ESGOTO – 85%	28,68	4,30/m³	7,34/m³
ÁGUA E ESGOTO	62,42	9,36/m³	15,97/m³
Demais Localidades ESGOTO – 80%	26,99	4,05/m³	6,90/m³
ÁGUA E ESGOTO	60,73	9,11/m³	15,53/m³

COMERCIAL / INDUSTRIAL / UTILIDADE PÚBLICA	Até 10 m³	Excedente a 10m³
ÁGUA Todas as Localidades Operadas	60,66	6,84/m³
Curitiba ESGOTO – 85%	51,56	5,81/m³
ÁGUA E ESGOTO	112,22	12,65/m³
Demais Localidades ESGOTO - 80%	48,53	5,47/m³
ÁGUA E ESGOTO	109,19	12,31/m³

OBERVAÇÃO: Para os consumos superiores a 10 m³ por economia, nos municípios abastecidos pelos sistemas dos balneários de Pontal do Paraná, Guaratuba e de Matinhos, a tarifa será majorada em 20% (vinte por cento) nos meses de Janeiro, Fevereiro, Março e Dezembro, e minorada em igual percentual nos meses de Abril a Novembro, exceto para os usuários beneficiados pela Tarifa Social.

TARIFA DE ÁGUA SOCIAL: 26,26% da Tarifa Residencial.

CONTAS PAGAS APÓS O VENCIMENTO: valor com aplicação de correção monetária pela variação do IPCA (Índice de Preços do Consumidor Amplo - IBGE) entre a data de vencimento e a data de pagamento, acrescido de multa de 2%.

TARIFA NORMAL			
RESIDENCIAL	Até 10 m³	Excedente a 10m³	Excedente a 30m³
ÁGUA Todas as Localidades Operadas	33,74	5,06/m³	8,63/m³
Curitiba ESGOTO – 85%	28,68	4,30/m³	7,34/m³
ÁGUA E ESGOTO	62,42	9,36/m³	15,97/m³
Demais Localidades ESGOTO – 80%	26,99	4,05/m³	6,90/m³
ÁGUA E ESGOTO	60,73	9,11/m³	15,53/m³

FONTE: SANEPAR. Decreto 3576/2016 que reajusta as tarifas dos serviços públicos de abastecimento de água tratada.

Esta etapa demandou o maior tempo, pois dedicamos um momento para que os alunos expusessem suas conclusões a respeito da análise da tabela. Então, foi solicitado que calculassem o valor referente ao consumo da água em diferentes faixas, (desconsiderando a taxa de esgoto) e se restringindo a tarifa normal residencial, na qual se encaixam as famílias da maior parte dos alunos.

Durante esse processo, fomos auxiliando os grupos de acordo com a fases da Resolução de Problemas (WALLE, 2009). Após os alunos efetuarem os cálculos, foi proposto que um representante de cada grupo expusesse no quadro os processos utilizados para a realização da atividade.

Observando a resolução de todos os grupos, foi solicitado para que analisassem os cálculos expostos e descrevessem como ficaria a generalização para qualquer consumo, chegando a seguinte expressão:

$$y = (m - 10) \cdot 5,06 + 33,74 \tag{1}$$

Com m sendo a quantidade total consumida em metros cúbicos, e variando de 10 a 30 metros cúbicos.

Então, foi questionado sobre qual conteúdo estudado essa expressão se associava, e os alunos, com base em conhecimentos prévios, disseram se remeter às ideias de uma função afim. Para concluir, exploramos os conceitos reacionados aos coeficientes linear e angular, ao domínio, ao contradomínio e a imagem da função obtida.

Desse modo, observou-se grande interesse dos alunos durante a atividade, eles pareciam curiosos a respeito do consumo de água, da taxa de esgoto, e ficaram surpresos com a forma que o conteúdo de função afim foi abordado. Nossa experiência permitiu que os alunos construíssem uma visão diferenciada sobre o conhecimento matemático e mostrou que, em sala de aula, quando os alunos contribuem ativamente nas resoluções, certamente temos uma aula mais dinâmica e motivadora. A atividade monstrou que trazer aspectos que fazem parte da realidade social dos estudantes faz com que o problema se torne mais instigante para eles. Percebemos que a Resolução de Problemas é uma possibilidade eficaz para ensinar matemática e ainda relacionar com aspectos do contexto da realidade dos alunos.

Referências

[1] CASA CIVIL (Estado). Constituição (2016). **Decreto nº 3576, de 29 de fevereiro de 2016. Reajuste das Tarifas dos Serviços Públicos de Abastecimento de água Tratada e de Esgotamento Sanitário Por Ela Prestados - Sanepar.** Disponível em: ¡http://www.legislacao.pr.gov.br/ legislacao/ pesquisarAto.do?action=exibir&codAto=153117¿. Acesso em: 26 jan. 2018.

[2] KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.. **A resolução de problemas na matemática escolar.** São Paulo: Atual, 1998. Tradução de: Hyginc H. Domingues e Olga Corbo.

[3] PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática Para as Séries Finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio.** 2008.

[4] WALLE, John A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de professores a aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. Tradução de: Paulo Henrique Colonese.

ARTE E IMPRESSORA 3D NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Cristine Tokarski Lima
Licenciatura em Matemática – UTFPR
cris.tokarski@hotmail.com

Profa. Dra. Leônia Gabardo Negrelli
Departamento Acadêmico de Matemática – UTFPR
leoniagn@yahoo.com.br

Palavras-chave: Impressora 3D, Arte, Ensino de Matemática.

Resumo:

Este texto traz resultados de um trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, cujo principal objetivo foi investigar possibilidades de exploração da arte, associada ao recurso tecnológico da impressora 3D, no ensino de matemática. Nesse trabalho foram abordados aspectos como criatividade, senso estético e conhecimento técnico, presentes tanto em uma obra de arte, como na matemática e seu ensino. Tomando a pirâmide como objeto de estudo e inspiração, devido à sua presença marcante no campo da história, na matemática e na arte, relatou-se o processo de produção de um objeto tridimensional, desde sua idealização e criação em ambiente virtual até sua impressão em 3D e posterior manipulação como objeto físico. Sua caracterização, além da exploração de seus componentes matemáticos, orientaram a proposição de atividades de ensino de matemática relacionadas a todo o processo vivenciado. A demanda pela aquisição de habilidades relacionadas ao uso de softwares e de conhecimento acerca de materiais utilizados em impressões 3D, além da busca por parcerias junto a vários profissionais e setores da universidade e comunidade local, destacam-se entre os desafios e conquistas evidenciados na conclusão do estudo.

Criatividade e Tecnologia na Arte e na Matemática

Este estudo, desenvolvido no âmbito da Educação Matemática, contempla aspectos interdisciplinares dessa área do conhecimento. Seu objetivo principal foi investigar possibilidades de exploração da arte, associada ao recurso tecnológico da impressora 3D, no ensino de matemática. Esse tipo de impressora produz objetos tridimensionais através da tecnologia de fabricação aditiva, isto é, por sobreposição de camadas de material fotopolímero - que são polímeros (plásticos) que alteram facilmente sua estrutura química quando expostos a pequenas cargas de energia luminosa.

Criar objetos fazendo uso de um recurso como a impressora 3D pode caracterizar uma expressão artística, além de demandar e revelar conhecimentos técnicos e conceituais. Considerando que essa tecnologia tem ampla potencialidade no processo pedagógico, dinamizando diferentes formas de ensinar e aprender, buscamos empregá-la na criação e execução de atividades para o ensino de Matemática que incorporem o uso de uma impressora 3D.

Apoiando-se em literaturas que relacionam arte e matemática no ensino e inspirando-se na figura de uma pirâmide, cuja imagem aparece com frequência nesses dois contextos, concebeu-se um objeto, aqui denotado por tronco de pirâmide vazado, cuja criação, impressão e exploração podem ser empregadas no ensino de matemática. A impressão foi realizada numa impressora artesanal de propriedade do laboratório *FabLab* Abrigo da UTFPR, Câmpus Curitiba. A escolha do programa de modelagem 3D, o *Tinkercad,* que permitiu a produção do objeto concebido deu-se após experimentações com três diferentes programas dessa natureza, a saber, o *Sketchup*, o *Blender* e o *Tinkercad.* Essa etapa de experimentações e estudos resultou na aquisição de habilidades essenciais para o uso propriamente dito da impressora 3D. Nas imagens a seguir são mostradas as telas de duas etapas da produção do objeto: a representação do objeto no programa de modelagem (Figura1) e a importação dessa representação para o software utilizado para sua impressão (Figura 2).

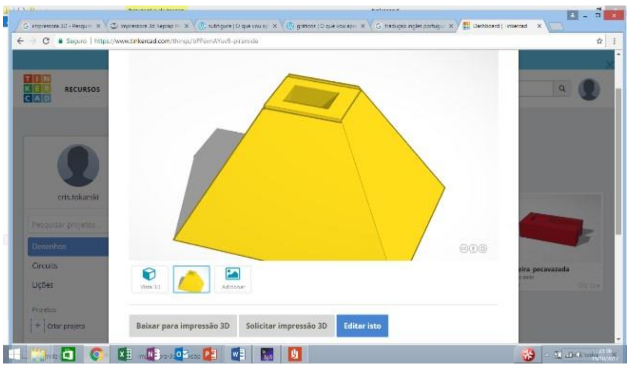


Figura 1: Programa Tinkercad - Exportar

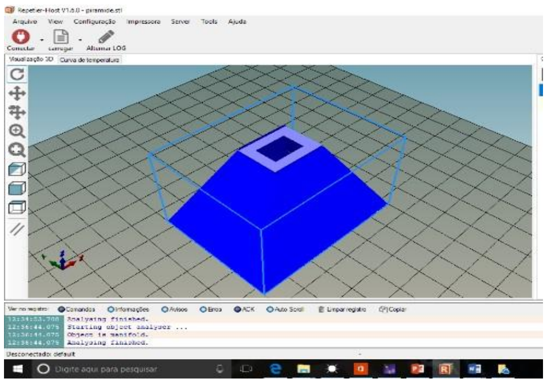


Figura 2: Programa Repetier Host

Finalizada a impressão, e com o objeto produzido em mãos, pudemos explorá-lo com o propósito de elaborar atividades para o Ensino Fundamental e Ensino Médio. Tais atividades contemplam a caracterização do objeto, cálculo de perímetros, áreas, volume, ângulos, além de outras possibilidades que demandam habilidades relacionadas à visualização e identificação da pirâmide que inicialmente poderia ter originado o tronco de pirâmide vazado em questão.

O uso das tecnologias foco deste estudo demandou conhecimento técnico associado à criatividade e senso estético, também presentes na abordagem matemática de diversas situações. Além disso, permitiu vislumbrar novas formas de trabalho com a matemática e a arte no ambiente escolar. De fato, conforme Tikhomirov,

> A atividade criativa, enquanto mantida a prerrogativa de ser fruto de seres humanos, é profundamente alterada no contexto do uso do computador, isso porque em meios informatizados, um desenvolvimento real da atividade criativa pode ser verificado. Novas formas de trabalho criativo, novas formas de educação e novas formas de jogar aparecem, formas estas que são simplesmente impossíveis sem os computadores. (TIKHOMIROV, 1999, p. 5)

A decisão de empregar um recurso tecnológico disponível tendo pela frente o desafio de percorrer uma trilha sem placas indicativas de direção nos permitiu adquirir habilidades que situações vivenciadas anteriormente no contexto de uso das tecnologias não permitiram. Isso nos levou a perceber que o uso da impressora 3D pode instigar e envolver os estudantes no processo de aprendizagem de matemática quando seu ensino envolve a exploração da Arte e o uso de recursos tecnológicos pouco familiares.

A trajetória da primeira autora no processo de produzir um objeto tridimensional, mostrando descobertas, aprendizados, dificuldades e barreiras que ocorreram na execução de um projeto, trouxe novas possibilidades e ideias para se trabalhar no ensino de matemática, além de favorecer parcerias com projetos em andamento que buscam disponibilizar e popularizar impressoras 3D à comunidade local. Como exemplo, citamos uma iniciativa da Prefeitura de Curitiba, que oferta oficinas para pessoas interessadas, em alguns Faróis do Saber.

Referências:

LIMA, C. T. **Arte e impressora 3D no ensino de matemática**. 74 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Departamento Acadêmico de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Curitiba, 2018.

TIKHOMIROV, O. K., SIQUEIRA, M. A. **A teoria da atividade modificada pela tecnologia da informação**. 1999. Disponível em: http://paginapessoal.utfpr.edu.br/kalinke/grupos-de-pesquisa/textos-201/novastecnologias/pde/pdf/Thikomirov. Acessado em 15.jan.2018.

Tendências Metodológicas da Educação Matemática que fundamentam a prática docente

Daiane Chitko de Souza
Licenciatura em Matemática – UFPR
daianechitko@gmail.com

Profª. Drª. Elisangela de Campos
Departamento de Matemática – UFPR
eliscamposmat@gmail.com

Palavras-chave: Educação Matemática, Modelagem Matemática, Resolução de Problemas.

Resumo:

Este trabalho aborda o ensino da Matemática através do estudo de duas Metodologias de Ensino: a Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas. O objetivo geral do estudo foi investigar e analisar, sobre o ponto de vista de três estudiosos de cada abordagem, o que eles compreendem sobre elas e apontar semelhanças e diferenças entre seus pontos de vista.

Visando colaborar com as reflexões sobre as Metodologias de Ensino na Educação Matemática, foi apresentado nesse estudo, um breve resumo das concepções de três estudiosos dessas Metodologias. Com isso, foram analisados 681 trabalhos de dois eventos importantes de Educação Matemática com a finalidade de encontrar os três autores mais citados dentro dos temas.

A metodologia de pesquisa adotada foi uma pesquisa bibliográfica, que teve como objetivo específico a análise de livros e teses dos autores por se tratarem de trabalhos com autoria sem parceria de outros autores e que apresentaram as principais e mais concisas ideias acerca dos temas. Apenas para uma autora foi usado outros tipos de materiais por não encontrar livros e teses sem parceria do tema.

O trabalho analisado de Rodney Carlos Bassanezi é voltado para o Ensino Superior, no qual pode se notar um incessante objetivo na formulação de um Modelo Matemático para o tema estudado. Já na análise feita sobre o trabalho de Dionísio Burak o enfoque é dado ao caminho que se usou para chegar à resolução, os conteúdos usados, os questionamentos feitos e ideias que durante a Modelagem surgiram, focando seus estudos no ensino básico. Jonei Cerqueira Barbosa se preocupa com a Modelagem Matemática na formação de professores, mais especificamente, seu enfoque é voltado para as reflexões dos alunos acerca das relações de temas do cotidiano com conteúdos matemáticos, e vice-versa.

Com este estudo podemos concluir que autores selecionados do tema Modelagem Matemática se ocupam cada um de uma fase de ensino diferente. Mesmo cada autor tendo sua visão voltada a etapas de ensino/ formação diferentes, eles têm um objetivo comum que é, a partir de um tema, construir uma solução usando a matemática.

Para Resolução de Problemas podemos observar que os autores são concordantes na definição de problema e na motivação que eles devem despertar em quem vai resolver. Podemos destacar que, como na Modelagem Matemática, os

autores se preocupam cada um com uma parte do processo de se trabalhar com Resolução de Problemas.

Para George Polya seu destaque certamente está na resolução dos problemas, quais questionamentos devem ser feitos em cada etapa. Para Luiz Roberto Dante o enfoque está nos problemas, como classificá-los, formulá-los e escolhê-los. Para Lourdes de La Rosa Onuchic, que se preocupa mais com a Resolução de Problemas na sala de aula, o enfoque está no processo como um todo desde a formulação dos problemas, como os alunos resolvem e como o professor media esse contexto.

Com esse estudo podemos destacar que a Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas têm grandes diferenças tanto metódica, quanto de organização e aplicação. Ao trabalhar com Modelagem Matemática o professor inicialmente não tem ideia de quais rumos as atividades irão seguir e se a matemática que os alunos sabem será suficiente para resolver. Já na Resolução de Problemas o professor apresenta o problema com um objetivo a se alcançar, seja este ensinar um novo conteúdo ou consolidar um conteúdo matemático já construído com os alunos, mas que eles irão perceber o que será necessário, ao longo do caminho de resolução e não de imediato.

As duas abordagens são de grande valia para os professores que têm como objetivo incentivar nos alunos um papel autônomo, reflexivo e questionador das situações que o cercam, seja na matemática escolar ou fora dela.

Referências:

BARBOSA, J. C., **Modelagem Matemática: Concepções e Experiências de Futuros Professores.** 253 f. Tese de Doutorado (Instituto de Geociência e Ciências Exatas) - UNESP Campus de Rio Claro, Rio Claro, 2001.

BASSANEZI, R. C., **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Contexto, 2002, 389p.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. 460 f. Campinas-SP, 1992. Tese (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

DANTE, L. R., **Formulação e resolução de problemas de matemática - Teoria e prática**. 1ª. ed. São Paulo: Ática, 2009. 192 p.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos**. 3ª. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. 228 p.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila. GIL, A. C. Métodos e técnicas de pesquisa social. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, Denise Tolfo (Org.), coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. **Métodos de pesquisa.** 1ª. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. 120 p. Disponível em:

<http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad 005.p df>. Acesso em: 02 abr. 2018.

ONUCHIC, L. De La R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V. (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. De La R.; ALLEVATO, N. S. G., **Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema, Rio Claro (SP), v.25, n.41, p.73-89, dez. 2011.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. Curitiba: Seed/DEB-PR, 2008.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas. (1995**) Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA: PESQUISA-INTERVENÇÃO NA PRÁTICA PEDAGÓGICA DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO DE ESCOLAS DE ENSINO INTEGRAL

Deivison José Gouvêa[1]
Licenciatura em Matemática – UNIMEP
profdjgouvea@gmail.com

Prof. Josemeri Aparecida Jamielniak (Orientador)
Faculdade de Engenharia Arquitetura e Urbanismo – UNIMEP
jajamiel@unimep.br

Palavras-chave: Funções de primeiro grau, representação gráfica, praticas pedagógicas, ensino-aprendizado, representação semiótica.

Resumo:

A educação é um assunto muito abordado, seja na área política, em noticiários, em temas de redações ou em área de pesquisa e não há dúvidas que a situação da Matemática no Brasil é gravíssima, especialistas atribuem o fracasso do ensino médio às fragilidades do currículo, como o excesso de disciplinas que não conversam entre si.

Vários autores relatam as dificuldades dos alunos quanto aos gráficos, seja na leitura ou na interpretação de representações gráficas cartesianas. Nos últimos anos, o ENEM passou por mudanças, atualmente apresenta-se de uma forma mais elaborada tornando-se o principal meio de acesso ao ensino superior no país e também fora dele.

Devido a sua importância e a dificuldade dos alunos em interpretação de gráficos analisamos a presença deles nos cadernos de prova do ENEM dos anos de 2009 a 2017, período que se encontra no novo formato, e quais conversões eram necessárias para as resoluções dessas questões. De posse desses resultados, acompanhamos uma turma de primeiro ano do ensino médio de uma escola de período integral de Piracicaba-SP para verificar quais conversões eram propostas durantes as aulas e propor uma atividade lúdica que explorasse as conversões mais exigidas nas provas do ENEM. Observamos que, nos cadernos de prova haviam no mínimo 27 questões relacionadas a gráficos presentes em todas as áreas de conhecimento sendo a área de Matemática e suas Tecnologias com maior número de questões (aproximadamente 18%).

[1] Discente do curso de licenciatura em matemática, bolsista do programa institucional de iniciação cientifica FAPIC/UNIMEP

A conversão mais frequente é da representação gráfica para a numérica, sendo exigida em todos os anos e a conversão mais ausente, cobrada apenas em 2015, foi a representação gráfica para a representação algébrica. Segundo Duval a conversão mais difícil de ser realizada pelos alunos é a conversão do registro gráfico para o algébrico e nossos achados corroboram com isso, uma vez que observamos 40% de erro nessas conversões além de ser a com menor presença nos cadernos do ENEM, sendo cobrada apenas em três anos em poucas questões. Já a conversão contrária, do registro algébrico para o gráfico, que não observamos nas provas do ENEM, na atividade de intervenção os alunos mostraram domínio apresentando apenas 18,75% de erro.

Outro fato importante a ser destacado é a falta de harmonia na representação gráfica realizada pelos alunos durante o jogo, embora eles tenham representado corretamente as intersecções com os eixos e alguns pares ordenados, os mesmos não deram importância a presença de escala e a formatação correta da representação gráfica na lousa, mas não é possível afirmar se foi apenas por causa do tempo da atividade onde os alunos tinham um período de tempo fixo para execução de cada questão ou se é uma defasagem do grupo a falta de harmonia nas representações.

Referências:

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles T. Moretti. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti . Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, v. 07, n. 1, p.97-117, 2012.

ENSINO MÈDIO e anos finais do fundamental ficam abaixo da meta do Ideb. Veja on-line, São Paulo, 2016. Disponível em: <http://veja.abril.com.br/educacao/brasil-e-um-dos-dez-piores-em-rendimento-escolar-aponta-ranking-internacional/>. Acesso em 18/12/2016.

LOPES, J. P.; ANGOTTI, J. A. P.; MORETTI, M. T. Função Afim e conceitos unificadores: o ensino de Matemática e Física numa perspectiva conceitual e unificadora. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS (ENPEC), 4., 2003, Bauru. Atas... Bauru: USP, 2003, p. 1-11.

MAIA, D. Função Quadrática: Um estudo didático de uma abordagem computacional. 2007. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

NÚÑEZ, I. B. , USHARA, F. M. G. ; PEREIRA, J.E. As representações semióticas nas provas de química no vestibular da UFRN: uma aproximação à linguagem científica no ensino das ciências naturais. In: Encontro nacional de pesquisa em educação em ciências VII ENPEC, 2009. **Anais**. ABRAPEC, Florianópolis, 2009.

PEIRCE, C. S. , **Semiótica**, 2ª ed. São Paulo: Perspectiva, 1995.

A FORMAÇÃO DE PROFESSOR NO ESTÁGIO SUPERVISIONADO E O ENSINO DE MATEMÁTICA: A APRENDIZAGEM MÓVEL NO USO RACIONAL DA ÁGUA

Eduarda de Almeida Gomes
Licenciatura em Matemática – UFPR
eduarda09.almeida@yahoo.com.br

Profa. Dra. Tania T. Bruns Zimer
Departamento de Educação – UFPR
taniatbz@ufpr.br

Jeremias Ferreira da Costa
Colégio Estadual Paulo Leminski
jeremias.costa@escola.pr.gov.br

Palavras-chave: Funções; Função Constante; Função Crescente; Tecnologias Digitais; Ensino-Aprendizado.

RESUMO

Este trabalho se refere uma prática de docência realizada no contexto das disciplinas de Prática de Docência em Matemática I e II, do curso de Matemática da Universidade Federal do Paraná. Tal ação docente foi realizada em cinco turmas de 1° anos do Ensino Médio do Colégio Estadual Paulo Leminski, designado como campo de estágio. Nessa prática foram desenvolvidas três atividades envolvendo aproximadamente 125 alunos. Para a realização da prática utilizou-se tecnologias que vão do lápis ao computador e telefone móvel para visualizar conceitos do conteúdo de Funções, como: operações de adição, subtração, multiplicação e divisão definição de função constante, função crescente e função decrescente. Assim, o objetivo deste artigo é relatar um processo de formação de professores a partir da experiência de uma prática de docência desenvolvida por uma estagiária em conjunto com seu professor supervisor, no campo de estágio.

A metodologia de ensino dessa prática de docência foi composta em três etapas, sendo a primeira na sala de vídeo da escola, a segunda desenvolvida em sala de aula, com a integração de recursos tecnológicos e a terceira organizada em dois momentos: na casa dos alunos com seus familiares e, posteriormente, na escola para debate dos resultados. As atividades foram desenvolvidas com os objetivos dos estudantes identificarem a importância do uso racional da água, no sentido de constatar o quanto se gasta de água em cada casa, como é possível adotar hábitos para economia de água, relacionar o conteúdo matemático em situações corriqueiras e, também, formar cidadãos aptos a resolverem situações com funções de uma maneira natural, observando o uso desse conteúdo no cotidiano, brincar aprendendo e, ainda, fazer o uso de tecnologia em sala de aula.

Na primeira etapa os estudantes foram para a sala de vídeo assistir dois vídeos. O primeiro sobre o uso racional da água retirado do site da ANA (Agência Nacional de Águas) e, na sequência, um vídeo autoexplicativo que

define as funções constante, crescente e decrescente, posteriormente, abriu-se um diálogo para esclarecimento das dúvidas e outros debates relacionados.

Já a segunda etapa ocorreu em sala de aula com o aprofundamento do conceito de funções. Os alunos construíram os quadros de como funcionava o sistema de tarifação da água e como funciona atualmente para a observação da quantidade de metros cúbicos consumidos, portanto, lhes foi propiciado compreender a correspondência em dinheiro, ou seja, o consumo pelo custo. Com estas informações seriam capazes de construir o gráfico de como era o consumo da casa dele e como é atualmente e fazer as interpretações e reflexões apropriadas, conforme pode ser observado na Figura 1.

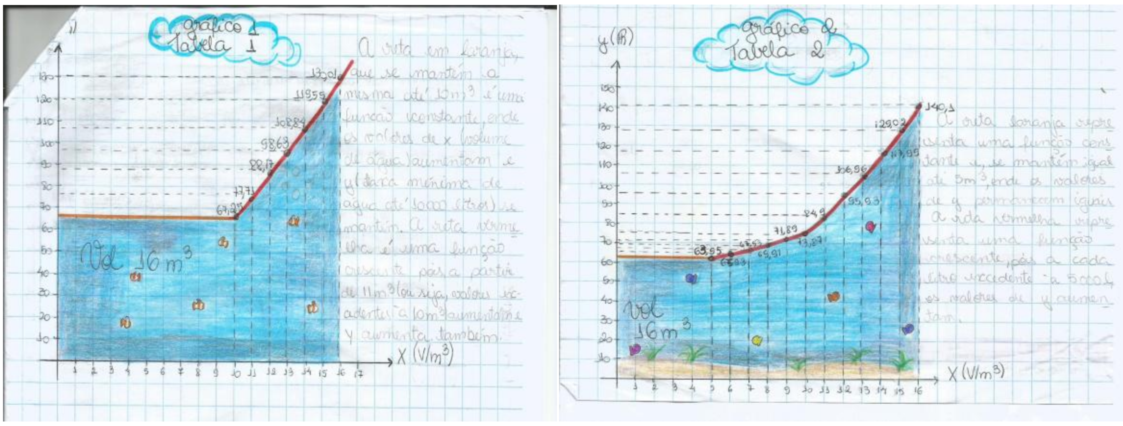


Figura 01: Gráfico construído a partir do consumo de água da casa da aluna A. Esquerda: Tarifação antiga. Direita: Nova tarifação. As definições das funções acompanham os gráficos. **Fonte:** Os Autores.

A terceira e última etapa consistiu em uma proposta do banho rápido, onde foi combinado com os estudantes e seus familiares três dias utilizando o aplicativo para telefones celulares “Banho Rápido” para tomar banho e ao final fazer uma análise geral do consumo de água, observando se houve ou não economia e como foi à experiência, conforme a Figura 2.

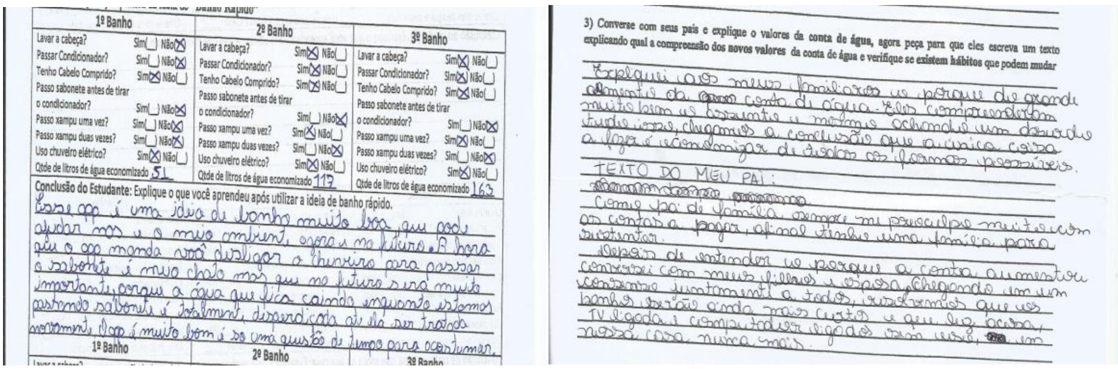


Figura 02: Registro da experiência com o app Banho Rápido e resposta da família da aluna A. **Fonte:** Os Autores.

As análises desses registros evidenciam que a estudante A relata sobre uma experiência positiva que teve com o app, constatou que o resultado é útil para ajudar a controlar os gastos em casa e consequentemente ajudar o meio ambiente. A fala do pai da aluna A destaca que a experiência trouxe informações acerca da tarifação da conta de água e mostrou a família uma maneira de economizar água e consequentemente financeiramente.

A utilização de recursos tecnológicos no ambiente escolar é necessária na educação contemporânea, visto que os estudantes utilizam estes recursos em seu cotidiano, mas não possuem a ciência que estes aparatos também servem para aprender. Assim, integramos o aparelho celular na prática educativa, vindo ao encontro das afirmações de Kenski (2012).

Deste modo, escolhemos trazer a realidade para sala de aula com o objetivo de ensinar conceitos de conteúdos matemáticos, pois as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (BRASIL, 2013) informa que as políticas pedagógicas devem estar ajustadas à realidade do aluno para uma melhor valorização cultural. Enfim, essa experiência, enquanto processo de formação para a docência se constituiu em relacionar o conteúdo visto em sala de aula e a vida dos alunos principalmente o cotidiano, pois geralmente não existe uma relação escola X vida real. ROLKOUSKI e VIANNA (2015) exemplificam bem o que nós estamos tentando não fazer, porque o aluno deve ser capaz de enxergar a matemática na vida dele, ou seja, ver sentido nas coisas que ele produz na escola.

Referências

BRASIL. **As Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.** Brasília/DF – 2013.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação**. 8ª ed. – Campinas/SP: Papirus, 2012.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: PESQUISAS E POSSIBILIDADES – **Maldades na Prática com a Matemática Escolar** – Curitiba, UTFPR Editora (2015).

Flexágonos no Ensino de Teoria de Grupos

Eduardo Henrique da Costa Muller
Licenciatura em Matemática – UFPR
edu_muller_1@hotmail.com

Prof. Elenilton Vieira Godoy (Orientador)
Departamento de Matemática – UFPR
elenilton@ufpr.br

Palavras-chave: flexágonos, teoria de grupos, ensino.

Resumo:

Flexágonos são fascinantes polígonos feitos de papel que quando dobrados de determinada maneira revelam faces ocultas. Segundo Gardner (1988), os flexágonos foram inventados em Princeton em 1939 pelo topologista Arthur H. Stone. Ele tinha folhas de anotações do padrão americano, cuja largura era maior que o padrão inglês (cerca de 3cm). Então, para fazer as folhas caberem em seu fichário inglês, o estudante recortava as fohas deixando de lado tiras de papel.

Em seu tempo ocioso, Stone dobrava de diferentes formas estas tiras de papel, e uma de suas dobraduras foi vincar diagonalmente a tira formando dez triângulos equiláteros. Ele girou esta tira em torno de si mesma em três meias-voltas e colou os dois triângulos nos extremos, achatando o papel e formando a figura de um hexágono regular.

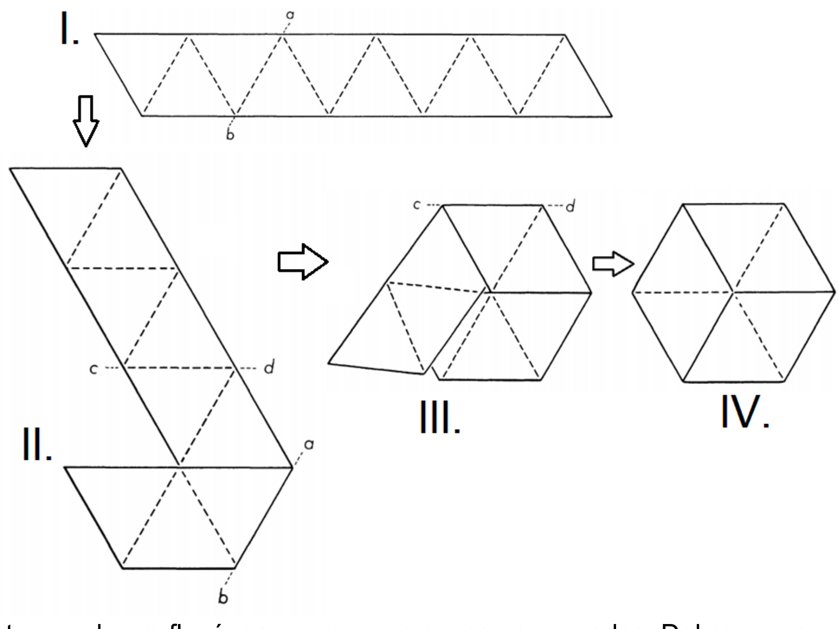


Figura 01: Montagem de um flexágono, com seus passos numerados. Dobra-se para trás nas linhas destacadas e cola-se o primeiro e último triângulos.
Fonte: Gardner (1988) (adaptado).

Quando Stone pinçou dois triângulos adjacentes ao mesmo tempo e puxou os vértices do hexágono em direção ao seu centro, o hexágono se abrira novamente, como o desabrochar de uma flor, e mostrara uma nova face totalmente nova. Ou seja, se as faces de cima e de baixo forem pintadas de cores diferentes, ao se realizar esta dobra, o hexágono mostraria uma face totalmente em branco e uma das faces pintadas “desapareceria”, como mostra a imagem abaixo:

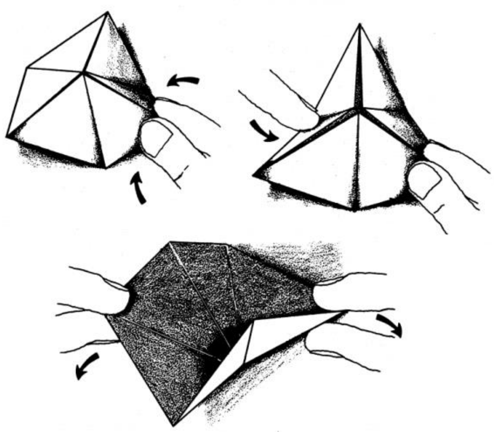


Figura 02: Movimento de “flexionar” o objeto, comumente chamado “pinch flex” (dobra de pinça).
Fonte: Gardner, 1998

Esta estrutura de três faces foi denominada por Stone por “flexágono”. Após uma noite de reflexão, o matemático deduziu que poderia dobrar uma estrutura semelhante com seis faces ao invés de três, e com isto conseguiu construir um flexágono de seis faces. A partir daí, o estudante organizou um “comitê do flexágono” com seus amigos de faculdade - o matemático Bryant Tuckerman, o físico Richard P. Feynman e o professor John W. Tukey para descobrir mais sobre os mistérios destas estruturas.

Posteriormente, os modelos foram renomeados por hexaflexágonos (“hexa” por sua forma hexagonal e “flexágono” pela sua habilidade de revelar sua propriedade apenas quando flexionado). O primeiro modelo inventado foi o TriHexaFlexágono (pois tinha 3 faces no total), depois foi criado o HexaHexaFlexágono (devido ao total de 6 faces). Conforme a popularidade, novos modelos surgiram com diferentes formas poligonais e números de faces, respeitando-se a nomenclatura imposta. Aumentando-se a cadeia e a disposição dos triângulos, o comitê descobriu que poderiam ser feitos hexaflexágonos de um número qualquer de faces.

Nosso estudo se concentrará no TriHexaFlexágono. Através de definições de posições que nos permitam estudar cada face do flexágono que repousa num plano, vamos definir um conjunto de ações (movimentos) realizados neste objeto que o trazem em coincidência consigo mesmo, e mostrar que este conjunto com a operação de composição se constitui no grupo diedral D_3 (que é isomorfo ao grupo de permutações S_3, conforme o Teorema de Cayley).

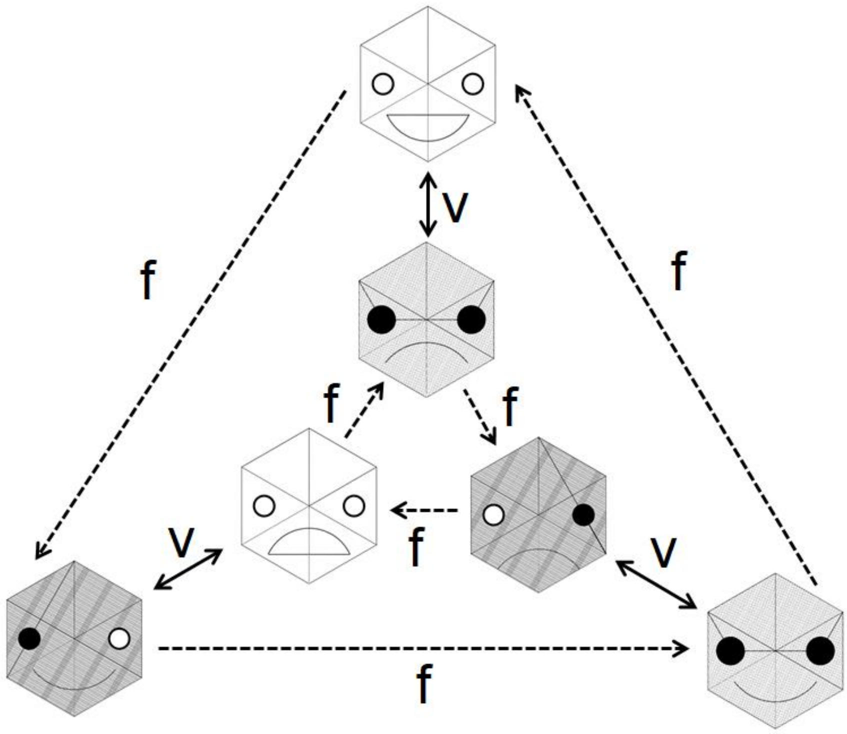


Figura 03: Diagrama do grupo diedral D_3 gerado pelos movimentos definidos por “f” (flexionar) e “v” (virar) o flexágono.
Fonte: Autor, adaptado de Hilton & Pedersen (2010)

Referências:

BEIER, J.; YACKEL, C. Groups Associated to TetraFlexagons. In: BEINEKE, J.; ROSENHOUSE, J. (Ed.). **The Mathematics of Various Entertaining Subjects: Research in Recreational Math.** Princeton and Oxford. Princeton University Press, 2016. p. 81-93.

GARDNER, M. Hexaflexagons. In ________. **Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions: The First Scientific American Book of Puzzles and Games.** Chicago and London. University of Chicago Press, 1988. p. 1-14.

HILTON, P.; PEDERSEN, J. Group Theory: The Faces of Trihexaflexagon. In ________. **A Mathematical Tapestry: Demonstrating the Beautiful Unity of Mathematics.** Cambridge. Cambridge University Press, 2010. p.195-205.

MADACHY, J. Fun With Paper. In: ________. **Mathematics on Vacation.** New York. Charles Scribner’s Sons, 1966. p.55-83.

POOK, L. **Serious Fun With Flexagons: A Compendium and Guide.** London. Springer, 2009.

________. **Flexagons Inside Out.** Cambridge. Cambridge University Press, 2003.

Matemática e Música: Um Dueto Interdisciplinar

Elvira de Lourdes de Oliveira[1]

Licenciatura em Matemática – UNESPAR

elviraoliveira0109@hotmail.com

Profa. MS Cristienne do Rocio de Mello Maron (Orientadora)

Departamento de Matemática – UNESPAR

cristienne.maron@unespar.edu.br

Palavras-chave: Matemática, Música, Interdisciplinaridade.

Resumo:

O presente trabalho utilizou a música como proposta interdisciplinar para o processo de aprendizagem da matemática, mais especificamente no conteúdo de frações, uma vez que o ensino da matemática vem sendo um grande desafio para os professores, conforme Campos diz “há uma dificuldade de relacionar o que é ensinado ao uso prático e com isso percebe-se o desinteresse e a falta de estímulo dos alunos na escola em compreender e significar o que é ensinado. ” (CAMPOS, 2009, p. 15). O objetivo principal dessa pesquisa é o de identificar e analisar a proposta de inclusão da Música no contexto escolar, bem como sua relevância enquanto proposta interdisciplinar, “acerca da importância da participação do professor de outras disciplinas para garantir a presença da música na escola” (FONTERRADA, 2008, p. 276). Para isso, como “a música é uma dependência da matemática” (GEBRAN, p. 135), podemos associar essas duas disciplinas, que aparentemente distintas, ao processo de aprendizagem do conteúdo de frações. Inicialmente, associamos o conteúdo de frações com a teoria musical, em específico, com as figuras musicais e sua divisão proporcional de valores. A ideia de trazer uma relação entre as duas disciplinas veio de uma atividade desenvolvida no PIBID, na Escola Estadual Faria Sobrinho em Paranaguá - PR, nas turmas dos sextos anos, e que vai ser usada no projeto do PIC no Colégio Estadual Gabriel de Lara em Matinhos – PR, em uma das turmas do sexto ano, com um aprofundamento na fundamentação teórica. Essa atividade foi desenvolvida da seguinte maneira: com o auxílio de um violino (figura 1), foram apresentadas as figuras musicais e sua divisão (cabeça, haste e colchete), relembrando assim as sete notas musicais (figura 2). Em seguida, foram demonstrados os nomes das figuras musicais e seus respectivos valores, com o auxílio das frações. Por fim, os alunos desenvolveram uma atividade que se chama “Compondo com Frações”, de modo que puderam identificar a relação existente entre a matemática e música, onde reescreveram a música “Marcha Soldado” ao

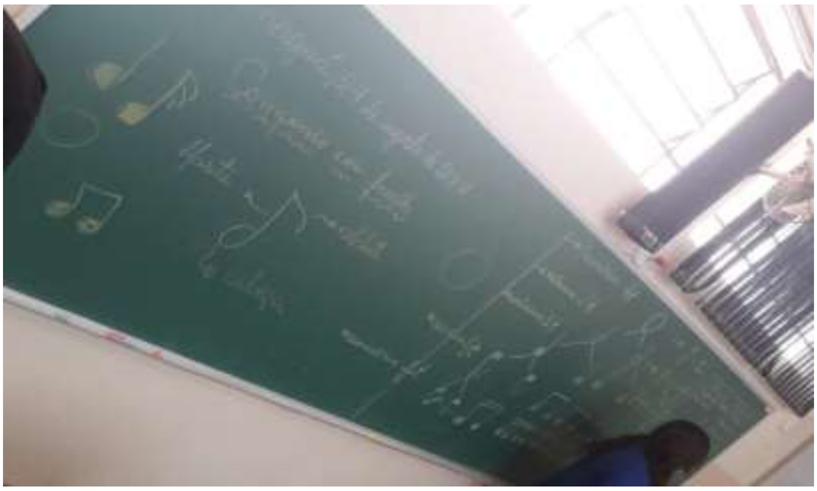
[1] Voluntário do Programa de Iniciação Científica (PIC - UNESPAR).

substituir suas notas por frações, somando cada compasso até chegar o valor da fração que representa aquele compasso (figura 3). Os alunos compreenderam que o conteúdo de Frações e suas operações têm suas aplicações em outras áreas de conhecimento, principalmente na música, onde cada nota tem seu valor na partitura. Portanto, essa atividade, por meio da interdisciplinaridade, permitiu a integração em outras áreas específicas, com o propósito de promover uma interação entre o aluno, professor e cotidiano de modo que o professor assume seu papel de “encantar” os alunos pela sua forma de selecionar, organizar, contextualizar os conteúdos, promovendo o desenvolvimento intelectual, e auxiliando-os na construção como sujeito, isto é, como ser social.

Figura 1 – Uso do Violino.

Fonte: Autora 2017.

Figura 2 – Figuras musicais e suas divisões proporcionais.



Fonte: Autora 2017.

Figura 3 – Substituição das notas musicais por frações. Correção no quadro.

Fonte: Autora 2017.

Referências:

CAMPOS, G. P. S. Matemática e Música: práticas pedagógicas em oficinas interdisciplinares. 2009. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual do Espírito Santo, Vitória. p. 15.

FONTERRADA, M. T. O. De Tramas e Fios – Um ensaio sobre música e educação. 2ª ed. UNESP, 2008.

GEBRAN, G. Pitágoras. 2a edição revisada e ampliada.

Laboratório de Ensino de Matemática

Beatriz Regina Santos da Silva [1]; Gabriel Cordeiro Chileider [1]; Gabriely Lemes de Lacerda[1]; Jaqueline Chezanoski[1], Kharina Sakakibara Machado Vilar [1] .
Licenciatura em Matemática – UFPR
bregina.santos@gmail.com; gabrielcordeirochileider@gmail.com; gabrielylemesdelacerda@gmail.com; jackchezanoski@gmail.com; kharinasakakibara@gmail.com.

Prof. Elisangela Campos, Prof. Fernanda Hillman Furlan
Departamento de Matemática – UFPR, Colégio Nossa Senhora Medianeira
eliscamposmat@gmail.com; fe_hillman@msn.com

Palavras-chave: Licenciar, Laboratório de Matemática, Formação de Professores.

Resumo:

Este trabalho visa relatar as atividades do projeto Laboratório de Ensino de Matemática do programa Licenciar. O Licenciar é um programa institucional que tem como objetivo “apoiar ações que visem ao desenvolvimento de projetos voltados à melhoria da qualidade de ensino nas Licenciaturas desta Universidade” (UFPR 2007). Os objetivos do nosso projeto são desenvolver atividades e materiais didáticos que possam ser aplicados em um Laboratório de ensino de matemática (LEM), reestruturar um laboratório existente no Centro Politécnico e desenvolver um *site* para divulgar esse LEM. Entre as tendências metodológicas para o ensino da Matemática temos a utilização de materiais didáticos manipuláveis, jogos e uso de *software* computacionais. Estes materiais, em geral, necessitam de um lugar para serem guardados. Por outro lado pensando nos professores que irão utilizar estes materiais surgem algumas questões: Como levá-los para a sala de aula? Como produzir um jogo ou um material didático concreto ou virtual? Como utilizá-los? Ou ainda, existem materiais didáticos ou atividades diferenciadas para todos os conteúdos matemáticos da escola básica? E para o ensino superior? O ambiente adequado para guardar estes materiais e para ministrar as aulas em que estes materiais possam ser explorados pelos alunos é o LEM. Um ambiente no qual alunos e professores podem explorar, conjecturar, questionar, enfim, aprender a pensar matematicamente.

A ideia é que os bolsistas e voluntários vinculados ao projeto produzam estes materiais, divulguem entre os alunos do Curso de Licenciatura e professores da escola básica, façam oficinas para os alunos da escola básica e publiquem essas atividades em um *site* do laboratório. Para o entendimento do que é um LEM, como ele funciona e que tipo de atividades podem ser desenvolvidas, estamos realizando a leitura e discussão dos livros de Lorenzato (2001) e Mendes (2009).

[1]Alunos Bolsistas do Programa Licenciar

Além disso, fizemos buscas por *sites* de laboratórios de ensino de outras universidades, tivemos dificuldades em encontrá-los, mas conseguimos analisar os seguintes: LEDUM da Universidade Federal do Ceará; LEM da Universidade Federal do Rio Grande do Norte; LEM da Universidade Federal de Minas Gerais; LEMA da Universidade Federal da Bahia e LEM da UNESP do campus de São José do Rio Preto. Nas análises feitas notamos uma grande quantidade de jogos e materiais concretos, mas nem todos possuem roteiros de como construí-los e aplicá-los. Num segundo momento escolhemos atividades desses laboratórios para serem feitas entre o grupo, como por exemplo as cartas do Flex Memo do LEDUM (Figura 1), que é um jogo de cartas que podem ser utilizadas de várias formas e a Batalha Naval Circular do LEM da UNESP (Figura 2) para trabalhar ângulos.

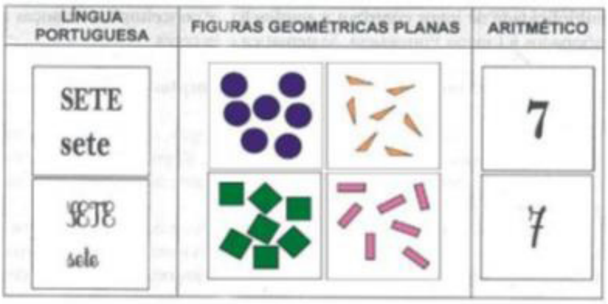


Figura 1- Flex Memo

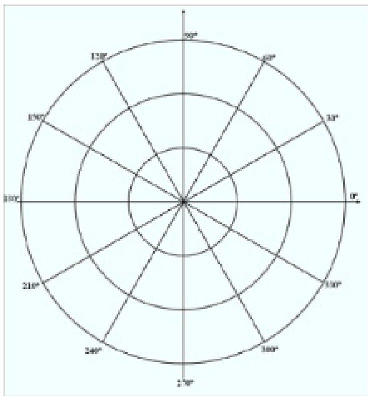
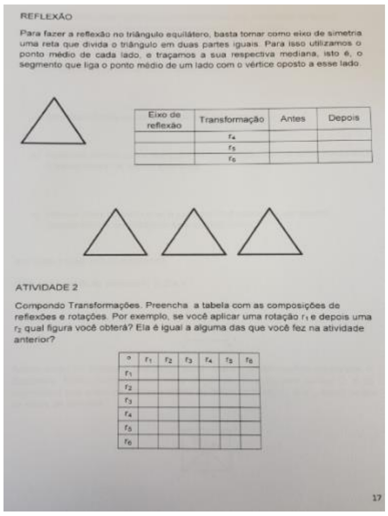


Figura 2 – Batalha Naval Circular

A participação auxiliando nas aulas do minicurso II Matematiza, projeto desenvolvido por um grupo de alunos do curso de licenciatura para alunos do 8º e 9º ano das escolas do ensino fundamental, nos permitiu entender a dinâmica da sala de aula com atividades investigativas e com material manipulável. Nesta edição o tema trabalhado foi Simetrias, as atividades foram elaboradas com o objetivo de levar os alunos a entender a simetria como transformação geométrica e introduzir a noção de grupo de simetria. Para isto, foram utilizadas atividades lúdicas como recortes de papel, e atividades investigativas em que através de observações e manipulações de triângulos e quadrados os alunos completaram uma tabela de operações das simetrias.



REFLEXÃO

Para fazer a reflexão no triângulo equilátero, basta tomar como eixo de simetria uma reta que divida o triângulo em duas partes iguais. Para isso utilizamos o ponto médio de cada lado, e traçamos a sua respectiva mediana, isto é, o segmento que liga o ponto médio de um lado com o vértice oposto a esse lado.

Eixo de reflexão	Transformação	Antes	Depois
	r_4		
	r_5		
	r_6		

ATIVIDADE 2

Compondo Transformações. Preencha a tabela com as composições de reflexões e rotações. Por exemplo, se você aplicar uma rotação r_1 e depois uma r_2 qual figura você obterá? Ela é igual a alguma das que você fez na atividade anterior?

∘	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
r_1						
r_2						
r_3						
r_4						
r_5						
r_6						

17

(Fotos: Os autores)

Desenvolvemos duas atividades: uma para o ensino de coordenadas polares que é o jogo batalha naval e um roteiro de estudos que tem como objetivo levar os alunos à definir as coordenadas polares e resolver problemas de mudança de coordenadas; a outra atividade trata-se de uma investigação que visa incentivar os alunos a deduzirem as relações métricas no triângulo retângulo.

Entendemos que para nós, futuros professores, termos acesso a este ambiente do LEM, sabermos confeccionar, adaptar e utilizar materiais didáticos diferentes e atividades de investigação, é essencial para a nossa formação. Além disso, estaremos preparados para implementar um LEM em nosso futuro local de trabalho. Apresentar estas atividades na escola básica pode, além de ajudar na aprendizagem da Matemática, contribuir para desmistificar que nesta disciplina não há espaço para a criatividade e experimentação. Acreditamos que o projeto contribui para a nossa formação acadêmica pois nos mostra diferentes abordagens metodológicas em sala de aula e a importância do material concreto na aprendizagem do abstrato.

Referências:

UFPR. Resolução Nº 05/07- CEPE. Normatiza o Programa Licenciar da Universidade Federal do Paraná, 2007. Disponível em: http://www.soc.ufpr.br/portal/wp-content/uploads/2016/07/resolucao_cepe_27042007-192.pdf.

DANTE, L.R. **Projeto Teláris Matemática,** vol. 9. Editora Ática, São Paulo, 2015.

LORENZATO, S. **O Laboratório de ensino de Matemática na formação de professores.** 2ed. Campinas: Coleção formação de Professores.2009.

MENDES, I. A. **Investigação Matemática em sala de aula: tecendo redes cognitivas em sala de aula.** Editora Livraria da Física, 2009.

STEWART,J. **Cálculo**, vol. 2. Editora Thomson Learning, 5ª edição. São Paulo, 2007.

Resolução de Problemas: calculando a conta de água em sala de aula

Guilherme O. Santos [1], Letícia M. Padovan [2] e Vinicius M. Fratucci[3]
Licenciatura em Matemática – UEM
gui14gos2014@gmail.com, leticiapadovan18@gmail.com e viniciusfratucci@outlook.com

Lucieli M. Trivizoli (Orientadora)
Departamento de Matemática – UEM
lmtrivizoli@uem.br

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Educação Matemática, Funções Polinomiais de 1º grau.

Resumo:

O presente trabalho traz um relato de experiência de uma implementação desenvolvida no projeto PIBID-CAPES, no ano de 2017, com 24 alunos do 1º ano do ensino médio, em um colégio estadual localizado em Maringá-PR. A implementação utilizou uma Tendência em Educação Matemática, a Resolução de Problemas, para construir uma estratégia para calcular o valor da conta de água, através dos parâmetros adotados no município. A implementação foi dividida em três etapas: a primeira envolveu a fundamentação teórica sobre a Tendência; a segunda consistiu em elaborar e realizar uma atividade piloto envolvendo a Resolução de Problemas em uma das reuniões do PIBID; e a terceira sua aplicação em um dos colégios parceiros do projeto, retomando os conceitos de função afim.

A fundamentação teórica sobre a Resolução de Problemas constituiu-se em um estudo embasado nos autores John A. Van de Walle, George Polya, Nicholas A. Branca e Alan H. Schoenfeld. Walle (2009) sugere que uma aula utilizando Resolução de Problemas, seja dividida em três fases: antes, durante e depois. A primeira fase – antes – tem três objetivos: verificar se os alunos compreenderam o problema, esclarecer sobre as expectativas antes de começá-lo e prepará-los para trabalhar no problema, pensando nos conceitos prévios que serão necessários.

Na segunda fase – durante – é quando os alunos devem trabalhar sozinhos

[1] Discente do curso de Licenciatura em Matemática, ex-Bolsista do Projeto PIBID-CAPES
[2] Discente do curso de Licenciatura em Matemática, ex-Bolsista do Projeto PIBID-CAPES
[3] Discente do curso de Licenciatura em Matemática, ex-Bolsista do Projeto PIBID-CAPES

ou com parceiros. É importante que o professor escute os alunos, observe e avalie, oferecendo sugestões adequadas, sem levar os alunos a crer que ele detém o método correto de resolver o problema.

Na terceira e última fase – depois – é o momento em que ocorrem as discussões entre os alunos de toda a sala, trazendo as soluções encontradas pelos grupos. Nesse momento o professor deve promover uma comunidade de aprendizes de matemática que inclua todos os alunos e que valorize mais a discussão do que uma resposta simples.

A segunda etapa da implementação consistiu em aplicar a atividade como um estudo piloto envolvendo os participantes de uma das reuniões do PIBID. Dessa experiência pode-se evidenciar aspectos para serem melhorados antes de passarmos para a última etapa, qual seja a aplicação no colégio parceiro do projeto.

No colégio, a turma foi organizada em grupos e levantamos alguns questionamentos sobre o consumo da água no cotidiano, gerando um debate de conscientização entre os alunos. Em seguida, explicamos aos alunos que a SANEPAR possui uma tabela que estabelece como é feita a cobrança da conta de água. Distribuímos a Tabela de Tarifas de Saneamento Básico (referente a 2016) para que analisassem e tirassem suas conclusões. Com base nas análises esclarecemos as dúvidas em relação à tabela e complementamos com algumas informações.

Definimos valores em metros cúbicos para cada grupo calcular o quanto seria pago por estes consumos. Após os cálculos, os alunos apresentaram e justificaram suas soluções para a turma, que afirmava se concordava ou não com a solução. Com isso solicitamos que os alunos encontrassem uma fórmula geral para o cálculo, que foi obtida em todos os grupos. Finalizamos retomando o conceito de função do 1º grau e relacionando com a atividade realizada.

Durante toda a atividade foi possível verificar grande interesse e envolvimento por parte dos alunos, pois a situação abordando o conteúdo faz parte da realidade deles. Os alunos trabalharam utilizando suas próprias estratégias, impulsionados a acreditar e fundamentar aquilo que estavam utilizando, além de estabelecer relações do que aprendem em sala de aula com a vida fora da escola.

Percebemos também que o trabalho em grupo, as discussões e exposições foram importantes para a validação e compreensão das ideias, pois do contrário não conseguiriam se envolver com os outros aspectos que todo o processo da

Resolução de Problemas oferece, tais como valorizar as diferentes estratégias e pensamentos que aparecem durante a resolução do problema.

A experiência, serviu como uma reflexão para nós, futuros professores, pois o ensino da matemática não se limita ao ensinar a teoria dos livros, mas pode-se trazer temas e problemas que ajudam na formação de estudantes mais críticos, capazes de lidar e analisar situações do cotidiano. Assim, o trabalho realizado cumpriu com seu papel de aproximar a teoria da prática como futuros professores, permitindo-nos um aprimoramento de nossos conhecimentos além de contribuir para as ações na escola parceira.

Referências:

BRANCA, Nicholas A. Resolução de problema como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A Resolução de Problema na Matemática Escolar.** São Paulo: Atual Editora, 1998. Cap. 2. p. 4-12.

GEOFOTEC (São Paulo) (Org.). **Quanto gastamos de água no nosso cotidiano.** 2014. Disponível em http://www.geofotec.com.br/blog/quanto-gastamos-de-agua-no-nosso-cotidiano/. Acesso em: 13 jul. 2017

GUBERT, Arieus.; TROBIA, José. **A Resolução de Problemas Aplicada no Estudo das Funções**. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1787-8.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2017.

KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** São Paulo: Atual, 1998. Tradução de: Hyginc H. Domingues e Olga Corbo.

POLYA, George. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A Resolução de Problema na Matemática Escolar.** São Paulo: Atual Editora, 1998. Cap. 1. p. 1-3.

RICHA, Carlos A. **Tabela de Tarifa de Saneamento Básico**. Disponível em: <http://www.legislacao.pr.gov.br/legislacao/pesquisarAto.do?action=exibir&codAto=153117>. Acesso em: 13 jul. 2017.

SCHOENFELD, Alan H. Heurística na sala de aula. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A Resolução de Problema na Matemática Escolar.** São Paulo: Atual Editora, 1998. Cap. 3. p. 13-29.

WALLE, John A. Van de. Ensinando pela Resolução de Problemas. *In*: WALLE, J. **Matemática No Ensino Fundamental**: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. Tradução de: Paulo Henruque Colonesse. 6. ed. São Paulo: Penso Editora, 2009. p. 57-79.

WALLE, John A. van de. **Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de professores a aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. Tradução de: Paulo Henrique Colonese.

O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL NO 1º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Higor Afonso Candido Pinto
Licenciatura em Matemática – UFPR
higorunited@outlook.com

Palavras-chave: Matemática, Geometria Espacial, Ensino Fundamental, Anos Iniciais.

Resumo:

O presente relato irá tratar sobre o trabalho com a geometria espacial em diferentes turmas do Ensino Fundamental. A Geometria Espacial está diretamente presente no cotidiano do ser humano, desde a construção de imóveis, como nos conceitos do cinema 3D. Além disto, ela é um dos grandes conhecimentos matemáticos da atualidade, com o avanço da impressão 3D e a realidade virtual. Nisto, foram analisados e trabalhados com os alunos de 1º Ano de uma escola municipal da Prefeitura de Curitiba o conceito da Geometria Espacial, sua relação com a geometria plana, os sólidos geométricos desde os seus elementos até a sua nomenclatura, propriedades e utilidade no cotidiano dos alunos, variando com a turma para o aprofundamento das aulas. Foi concluído com as atividades a evolução dos alunos no conhecimento do tema, construção manual com materiais diversos e no seu raciocino lógico, que são fundamentais para conhecimentos matemáticos em outras áreas e no seu dia-a-dia.

INTRODUÇÃO

A Geometria é um conhecimento fundamental para o nosso dia-a-dia, presente em vários objetos que são de muita importância. O estudo deste conhecimento é algo que é feito desde a Grécia antiga com Euclides, onde deu origem em vários conceitos e postulados usados até hoje. Nisto, trabalhar a Geometria com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental é importantíssimo e defendido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) e especificamente nas Diretrizes Curriculares da Prefeitura Municipal de Curitiba (CURITIBA, 2016). Neles apresentam a evolução dos conceitos de Euclides até a atualidade, colocado em prática em vários momentos de aprendizado em sala de aula. Logo, focamos em realizar atividades que fizessem que os alunos terem conhecimentos sobre a Geometria Espacial e sua relação com a Geometria Plana, por meio de manipulação e observação, reconhecem alguns sólidos geométricos e suas características.

A Geometria Espacial é o estudo sobre os objetos matemáticos tridimensionais, ou seja, tudo que se pode definir no espaço e as características que eles apresentam. Enquanto isto, várias situações do cotidiano precisamos representar objetos do espaço no papel, ou seja, representá-lo em algo plano. Com isso é utilizado a Geometria Plana para transformar a realidade tridimensional em algo abstrato e no “mundo do desenho”.

O GÊNERO TEXTUAL LEGENDA E AS CARACTERÍSTICAS DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Neste sentido, foi projetada a aula para alunos do 1º Ano do Ensino Fundamental, que a característica para ensino destes conteúdos, segundo as Diretrizes Curriculares de Curitiba (2016, p. 49) é “Identificar figuras geométricas em diferentes contextos, percebendo semelhanças e diferenças entre os objetos do espaço e do plano, por meio de descrições orais, construções e representações”.

Com uma pequena introdução de descrição de objetos e imagens, ensinados na Língua Portuguesa, no Gênero Textual Legenda, os alunos tinham um conhecimento prévio. De olhos fechados e mãos estendidas para segurar algo, foi entregue para os alunos um cubo, um paralelepípedo e uma esfera para os alunos manusear e questionando “Como é este objeto?”, “Ele tem alguma ponta?”, “Qual é o formato dele?”, entre outras. A partir disto, foram discutidas as características dos objetos pela descrição e analisando todas as possibilidades citadas pelas crianças.

Depois disto, foram apresentados os Sólidos Geométricos de acrílico, dizendo os seus nomes e questionando os estudantes sobre quais objetos no dia-a-dia deles com o formato idêntico ou parecido. Segundo NACARATO (2017, p. 52) “a importância do contato do objeto real, que possibilita que as imagens mentais se estabeleçam e propiciem a abstração”.

Logo, pensando na “planificação” dos elementos espaciais, foram introduzidas a eles as formas geométricas planas presentes nos sólidos, com eles contornando os Blocos Lógicos em uma folha e eles perceberam as similaridades entre os sólidos e as formas geométricas.

Finalizando, contando uma versão da lenda da criação do jogo Tangrân e apresentada às peças e que formas elas tinham, a partir daí eles montaram algumas figuras com o jogo, como por exemplo, uma casa, pássaro, pessoa, barco, entre outras. Nisto, os alunos concluíram montando um quadrado com as 7 peças e percebendo que com algumas formas geométricas podemos mostrar outras por encaixe.

Conclui-se, que o aluno tem um conhecimento prévio, que cria a base para as construções e reconhecimento da Geometria no seu cotidiano.

Referências:

SANTOS, Cleane Aparecida dos. NACARATO, Adair Mendes. Aprendizagens em Geometria na educação básica: a fotografia e a escrita na sala de aula. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017. p. 52

CURITIBA, Secretaria Municipal de Educação da cidade de Curitiba. Diretrizes Curriculares do Ensino Fundamental, 1º Ano. Curitiba: PR. 2016

BRASIL, Ministério da Educação, (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. Brasília, MEC/SEF

Razão e Proporção: uma construção da câmara escura

Beatriz Rocha Saraiva[1], Karine da Silva Macedo[2], Isabella Menotti Sanchez[3]
Licenciatura em Matemática – UEM
ra104538@uem.br, ra94485@uem.br, ra96103@uem.br

Prof. Eduardo de Amorim Neves
Departamento de Matemática – UEM
eaneves@uem.br

Prof. Mariana Moran Barroso
Departamento de Matemática – UEM
mmbarroso@uem.br

Palavras-chave: Fotografia, câmara escura, proporcionalidade direta e inversa.

Resumo:

Este trabalho apresenta uma prática realizada durante o projeto de extensão Teoria e Investigação em Matemática Elementar (TIME) do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá,aplicada no ano letivo de 2018, com aproximadamente 30 alunos do Ensino Fundamental e Médio.

Tal prática realizou-se em forma de oficina com o objetivo de estudar o conteúdo de "proporcionalidade direta e inversa" por meio da construção de uma câmara escura e sua aplicação.Inicialmente, nessa atividade foram abordadas algumas noções sobre a câmera fotográfica, como a história, a ciência, a matemática e a arte da fotografia, para que posteriormente os alunos construíssem uma câmara escura e verificassem as relações de proporcionalidade direta e inversa a partir da observação de um fenômeno físico.

A oficina foi composta por cinco etapas sendo: a primeira etapa uma apresentação a respeito da história da câmera fotográfica, seu funcionamento e utilização hoje; a segunda etapa a construção da câmara escura; a terceira etapa a aplicação e coleta de dados; a quarta etapa o registro matemático da aplicação e a quinta etapa como sendo o fechamento feito pelo professor.

Na primeira etapa foi apresentado um relato histórico sobre as primeiras imagens produzidas pela câmera fotográfica, em que, Joseph NicéphoreNiépce foi o autor da imagem fotográfica mais antiga, registrada em 1826, porém foi a descoberta da câmara escura que levou ao processo fotográfico.

Em seguida foi abordado um pouco da ciência da fotografia e foram especificados alguns elementos da câmera fotográfica, como ISO (International Standards),

---

[1] Bolsista/Voluntário do Programa TIME - Teoria e Investigação em Matemática Elementar.
[2] Bolsista/Voluntário do Programa TIME - Teoria e Investigação em Matemática Elementar.
[3] Bolsista/Voluntário do Programa TIME - Teoria e Investigação em Matemática Elementar.

velocidade do obturador (tempo de exposição), abertura do diafragma, distância focal (lentes).
Na segunda etapa os alunos foram divididos em grupos, por nível, de no mínimo 3 pessoas para confeccionar a câmara escura utilizando os seguintes materiais: caixa de sapato, papel vegetal, papel alumínio, cartolina preta, papelão, tesoura, cola, blusa preta e régua. Com esses materiais, os alunos confeccionaram a parte interna da câmara.

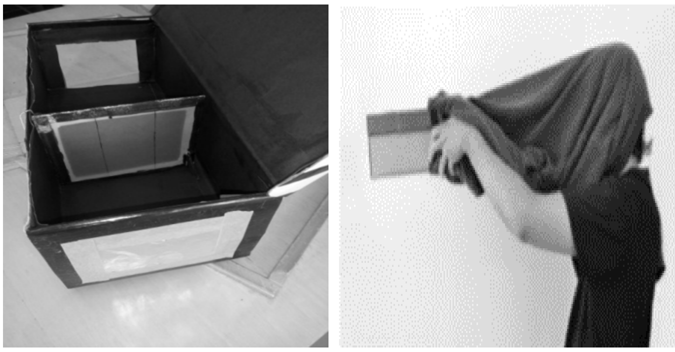


Figura 1: Câmara confeccionada.
Fonte: Autores

Após finalizada a construção da câmara, iniciou-se a terceira etapa que consistiu na realização do experimento fora da sala de aula. Nessa etapa, os alunos escolheram alguns objetos e mediram a distância entre os objetos escolhidos e a câmara, um de cada vez, com o auxílio da trena. Também retiraram medidas do tamanho do objeto, com o auxílio da fita métrica. Nesse momento os alunos tiveram dificuldade em manusear a trena e a fita métrica (não se atentaram à face que estavam utilizando, confundindo centímetros com pés), não se importaram com a precisão das medidas e não se preocupavam em alinhar a trena perpendicularmente ao chão ou ao objeto. Apesar das dificuldades no início da atividade, os alunos aprenderam a manusear os objetos de medida e reconheceram a importância da precisão na coleta de dados.
Na quarta etapa, após a coleta dos dados as alunos retornaram para a sala, a fim de responder a primeira parte de uma folha de registros que foi entregue a eles. Nessa folha, os alunos preencheram uma tabela que consistia no registro do tamanho real de cada objeto versus a distância do objeto à câmara. Em seguida, representou-se esses valores graficamente de modo a perceber a relação de proporcionalidade existente entre eles.
Os dados coletados por cada grupo foram comparados pelos próprios alunos a fim de fazer uma generalização matemática que representasse uma relação entre as grandezas coletadas. Alguns alunos tiveram dificuldade na elaboração do gráfico: de 6 grupos, 2 fizeram o gráfico corretamente, 1 fez um gráfico de barras, e os outros 3 não fizeram. É importante destacar que como os alunos participantes dessa oficina variavam entre alunos do Ensino Fundamental e Médio, alguns já sabiam como construir gráficos no plano cartesiano e outros não.
Apesar das dificuldades mencionadas, por meio da construção e aplicação da câmara escura, os alunos compreenderam o conceito de diretamente e inversamente proporcional, e a relação desses conceitos com os gráficos de retas e de curvas.

Na quinta etapa foi feito o fechamento da oficina, em que o professor fez questionamentos no quadro a respeito do que os alunos tinham compreendido. Na medida em que os alunos iam expondo seus dados, o professor anotava as ideias no quadro de maneira a generalizar os conceitos.
Um aluno participante escreveu o seguinte:

> “Quando representamos em um gráfico algo diretamente proporcional podemos observar no gráfico uma reta crescente, já quando representamos em um gráfico algo que é inversamente proporcional, observamos que os pontos no gráfico descem, porém não em uma reta".

Analisando esta conclusão, vimos que o aluno conseguiu fazer uma relação da prática com a teoria, associando os conceitos de diretamente e inversamente proporcional com os seus respectivos gráficos. Porém foi possível perceber a falta de conhecimento prévio já que alguns alunos desconheciam o modo de se construir um gráfico e muito menos entendiam se tratar de uma hipérbole o caso em que as grandezas eram inversamente proporcionais.
De modo geral, analisando todos os comentários, verificamos que os alunos acabaram incorporando termos técnicos como “*anteparo*”; aprenderam como se constrói um gráfico; observaram que a maneira como viram os conceitos na oficina, é diferente do modo como são tratados na escola; e por fim aprenderam a trabalhar em equipe, desenvolvendo espírito de coletividade e aprendendo uns com os outros.

Referências

BRAUMANN, C. A. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática**. Anais do XI Encontro de Investigação em Educação Matemática, 2002.

CARAÇA, B. **Conceitos fundamentais da matemática.** 3ª edição. Lisboa: Sá da Costa, 1958.

D’AMBRÓSIO, Ubiratan. **Matemática, ensino e educação: uma proposta global**. Temas & Debates, Rio Claro, ano IV, n. 3, p. 1-15, 1991.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1975.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 1ª ed. – Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P.; FERREIRA, C,; BRUNHEIRA, L.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. **Investigando as Aulas de Investigações Matemáticas.** Publicado originalmente em inglês com o título Investigatingmathematicalinvestigations, incluído no livro de P. Abrantes, J. Porfirio, & M. Baía (Orgs.). (1998). Les interactions dans la classe de mathématiques: Proceedings of the CIEAEM 49 (pp. 3-14). Setúbal: ESE de Setúbal. Disponível em <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto12.PDF>. Acesso em 19 fev. 2018.

Concepções de docentes sobre Resolução de Problemas no Ensino da Matemática

Jéssica Tomiko Araújo Mitsuuchi
Pedagogia – UFPR
jessicatomiko@gmail.com

Prof. Tania Teresinha Bruns Zimer (Orientadora)
Departamento de Teoria e Prática de Ensino – UFPR
taniatbz@ufpr.br

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Ensino de Matemática, Formação de Docentes.

Resumo:

No ensino da Matemática, é vasta a literatura que aponta a Resolução de Problemas como um dos principais princípios para nortear a prática pedagógica do professor (Onuchic e Allevato, 2014; Smole e Diniz, 2001; Polya, 2006, entre outros). Entretanto, as diferentes práticas de ensino pautadas na Resolução de Problemas evidenciam vários modos de concebê-la, pois parte-se da hipótese de que, a maneira como se concebe um conceito, isso se reflete na prática em sala de aula. Neste sentido, o objetivo do presente trabalho é apresentar um recorte do Trabalho de Conclusão de Curso de Pedagogia que busca compreender as concepções dos Educadores em Formação Inicial do Curso de Formação de Docentes sobre a Resolução de Problemas no ensino de Matemática.

Como instrumento de coleta de dados para este momento foi elaborado um questionário com uma questão aberta e uma parte em escala tipo Likert. A opção por este modelo decorre de fatores como a grande quantidade de alunos matriculados na disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática, a formulação própria da conceituação de Resolução de Problemas, a identificação das concepções mais recorrentes e a verificação da presença de uma fase de estruturação do pensamento do aluno. Para tanto, foram organizadas possíveis justificativas a partir de correntes de pensamento sobre Resolução de Problemas no ensino de Matemática, como a Heurística de Polya (2006), a Perspectiva Metodológica de Resolução de Problemas, por Smole e Diniz (2001), e a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proposta por Onuchic e Allevato (2014).

No Quadro 1, em um primeiro momento, os dados revelam que o senso comum sobre o que é a Resolução de Problemas (definida na Afirmativa 1 como modo de fixação do conhecimento matemático) ainda sobressai em relação a definições mais atuais e que representam uma aprendizagem significativa (como a Afirmativa 2, que utiliza a metodologia como meio de contextualização do conteúdo):

Quadro 1 - Afirmativas sobre Resolução de Problemas

AFIRMATIVAS	Concordo	Nem concordo e nem discordo	Discordo	Sem resposta
A Resolução de Problemas é um tipo de exercício de aplicação/fixação do conhecimento matemático.	41	8	0	1
2. A Resolução de Problemas é uma maneira de dar início a um conteúdo (contextualização).	19	23	8	0
3. A Resolução de Problemas é uma consequência do saber matemático (o que realmente importa é o conhecimento da Matemática, não o problema)	14	21	12	3
4. Na Resolução de Problemas o objetivo é apenas encontrar o resultado correto.	9	16	22	3
5. Na Resolução de Problemas, existe apenas uma estratégia válida para chegar ao resultado esperado.	8	12	30	0
6. A Resolução de Problemas pode acompanhar todo o processo (ensino, aprendizagem e avaliação)	38	10	1	1
7. A Resolução de Problemas compreende o que é ensinar, o que significa aprender e o porquê de ensinar Matemática.	30	16	2	1
8. Na Resolução de Problemas, o professor necessita de constante preparação.	41	7	2	0
9. O professor é o centro do processo, sendo ele o detentor de todo e único conhecimento.	5	6	39	0
10. O professor age como mediador na Resolução de Problemas, auxiliando o estudante a encontrar soluções e estratégias.	46	3	0	1
11. O estudante pode resolver os problemas propostos em grupo.	44	6	0	0
12. O conhecimento prévio do estudante não é levando em consideração na Resolução de Problemas	5	12	32	1

Fonte: As autoras.

A premissa do senso comum em relação ao conhecimento mais significativo pode ser averiguada nas respostas da questão aberta “O que você compreende por Resolução de Problemas no ensino de Matemática?”, conforme transcritas abaixo:

> “Solução de dificuldades que encontram na matéria” (R., 17 anos).
> “São exercícios que os professores vão colocar para seus alunos resolver e eles podem auxiliar os alunos ou não” (A., 17 anos).
> “Resolução de exercícios por extenso, propondo uma situação a ser resolvida, com cálculo” (V., 17 anos).
> “Resolver contas” (H., 16 anos).
> “Entendo que, a resolução de problemas no ensino da matemática, é o ato de resolver exercícios da matéria ou resolver incidentes que possam acontecer dentro da matéria. Como: brigas, discussões, desentendimentos, etc” (A. F., 17 anos).

A última transcrição evidencia também a relação de senso comum que a aluna estabelece entre a Resolução de Problemas no ensino de Matemática como estratégia de ensino-aprendizagem e a resolução de conflitos. Neste caso, podemos considerar que a aluna não compreendeu o sentido da pergunta ou que, no contexto em que ela está inserida socialmente, seja mais recorrente o tratamento de ambos como sinônimos. No que tange às outras perspectivas sobre a abordagem metodológica em questão, observou-se a associação entre a sala de aula e o cotidiano, além da ênfase no desenvolvimento do raciocínio lógico, exemplificados abaixo:

> “Como um processo de aprendizagem que envolve a verificação de resultados obtidos com o objetivo de desenvolver o raciocínio lógico” (L., 17 anos).
> “Aprender a resolver problemas que poderá surgir no cotidiano” (P., 16 anos).
> “Acredito que seja a tentativa do aluno junto ao professor de resolver problemas do cotidiano, assim assimilando os problemas matemáticos com o dia a dia” (S., 17 anos).

Apesar das respostas das afirmativas demonstrarem que os alunos já possuem um conhecimento[1] acerca das correntes de pensamento sobre Resolução de Problemas no ensino de Matemática (Polya, 2006; Smole e Diniz, 2001; Onuchic e Allevato, 2014), conforme observado nas afirmativas 6, 7, 8, 10 e 11, é quase imperceptível na discursiva da questão aberta, valendo-se da brevidade das respostas e da pouca argumentação sobre a sua concepção, além da ocorrência de contradições entre os posicionamentos (questão aberta x afirmativas), salientando a fase de instabilidade na estruturação da concepção do aluno. A sinalização na coluna “Nem concordo e nem discordo” foi feita, por exemplo, quando a afirmativa poderia representar uma transição entre o pensamento tradicional com as concepções voltadas para a aprendizagem significativa, como as afirmativas 2, 3, 4, 5, e 12.

Com este questionário, foi possível estabelecer a aproximação inicial com a concepção dos Educadores em Formação Inicial do Curso de Formação de Docentes sobre a Resolução de Problemas no Ensino de Matemática.

Referências:

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas?. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner; JUSTULIN, Andressa Maria (Orgs.). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí, Paco Editorial; 2014, 35-52p.

POLYA, George. **A arte de Resolver Problemas.** Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006, 203p.

SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender Matemática.** Porto Alegre : Artmed Editora, 2001; 203 p.

[1] Este conhecimento pode ser considerado informal, uma vez que o questionário foi aplicado antes do conteúdo sobre Resolução de Problemas no ensino de Matemática ser abordado formalmente. Outra perspectiva que justifica a aproximação das respostas às correntes de pensamento pode ser as novas compreensões sobre o processo de ensino-aprendizagem, que tornam o professor como mediador e auxiliador do aluno, que se destaca como protagonista da sua própria construção do conhecimento e, assim, contemplando também a área do ensino de Matemática

Arte e Matemática no uso do Espirógrafo

Flávia do Nascimento Borges[1], Isabella Menotti Sanchez[2], João Victor Bezerra Batista[3] e Vinícius Murilo Fratucci[4]
Licenciatura em Matemática – UEM
flavia.n.borges@hotmail.com, belinha_menotti@hotmail.com, ra103684@uem.br e murilofratucci@hotmail.com

Prof. Eduardo de Amorim Neves (Orientador)
Departamento de Matemática – UEM
eaneves@uem.br

Prof. Mariana Moran Barroso
Departamento de Matemática – UEM
mmbarroso@uem.br

Prof. Thiago Fanelli Ferraiol
Departamento de Matemática – UEM
tfferraiol@uem.br

Palavras-chave: Espirógrafo, GeoGebra, Funções trigonométricas.

Resumo:
Este trabalho apresenta uma descrição de uma prática realizada durante o projeto de extensão Teoria e Investigação em Matemática Elementar (TIME) do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, aplicada no ano letivo de 2018, com aproximadamente 15 pessoas, dentre elas alunos de licenciatura em Matemática e professores de Matemática da Educação Básica, que participaram da oficina ministrada no evento II Ágora de Campo Mourão - Paraná.
Tal prática realizou-se em forma de oficina com o objetivo de estudar o conteúdo de "parametrização de curvas" por meio do uso do espirógrafo ou também conhecido como régua mágica. A régua mágica é um famoso brinquedo que esteve presente na vida de muitos jovens há algumas décadas. Esse brinquedo é bem simples, no entanto nos permite traçar algumas curvas intrigantes somente girando uma pequena engrenagem com o rabiscar de um lápis.
É curioso que a maioria das pessoas que se deparam com essas curvas acham os desenhos belos, mas não sabem exatamente o porquê. Talvez seja por causa das simetrias ou pelos padrões criados, ou quem sabe por causa da simplicidade de traçá-las. Mais ainda, percebemos que mesmo com simples ações, como fazer um

[1] Discente do curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Maringá (UEM); bolsistas do Programa Institucional de Extensão Universitária - TIME-PIBEX-UEM. e-mail: flavia.n.borges@hotmail.com.

[2] Discente do curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Maringá (UEM); ex-bolsistas do Programa Institucional de Extensão Universitária -TIME-PIBIS-UEM. e-mail: belinha_menotti@hotmail.com

[3] Discente do curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Maringá (UEM); bolsistas do Programa Institucional de Extensão Universitária -TIME-PIBIS-UEM. e-mail: ra103684@uem.br.

[4] Discente do curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Maringá (UEM); bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica -PIBIC-UEM. e-mail: murilofratucci@hotmail.com.

bonito desenho, existe a pura matemática envolvida que quando abordada de maneira adequada pode proporcionar um grande aprendizado.

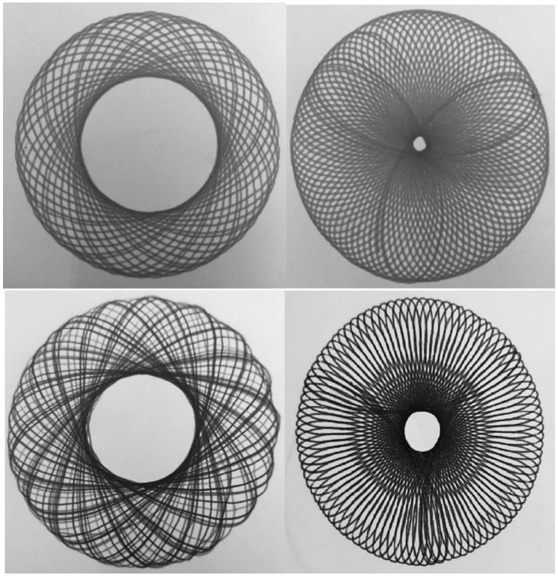


Figura 1: Curvas desenhadas com a régua mágica.
Fonte: Autores

Ademais o trabalho com os espirógrafos possibilita fazer uma reflexão acerca dos padrões, das generalizações, de criações de curvas, o conhecimento de lugares geométricos e aplicações da trigonometria, aguçando e despertando a curiosidade pela matemática, entre outras coisas. Portanto iremos trabalhar com a régua mágica ou espirógrafo, que foi idealizado por Bruno Abdank Abakanowicz, mas foi inventado pelo engenheiro britânico Denys Fisher, que o exibiu em 1965 na Feira Internacional de Brinquedos de Nuremberg, produzido por sua empresa. Os direitos do espirógrafo são da empresa Hasbro, que fabricou vários modelos do século XX até os dias atuais.

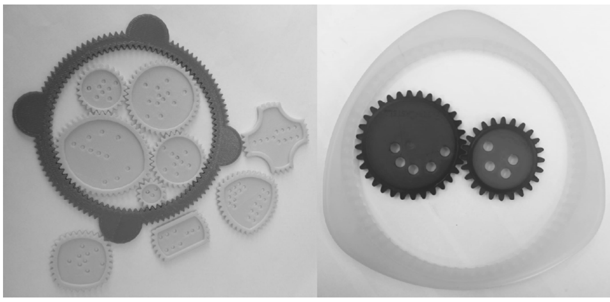


Figura 2: Espirógrafos.
Fonte: Autores

O espirógrafo possui o formato de círculo simples ou de uma régua larga e consiste em um conjunto de peças plásticas menores, de formas diferentes, como anéis, triângulos, linhas retas ou barras, e todas as arestas possuem dentes às quais se encaixam qualquer outra peça móvel. Cada roda dentada possui vários furos, servindo como suporte para a entrada da ponta de um lápis ou caneta construindo algumas curvas.

Para entender um pouco da matemática presente no espirógrafo, buscamos compreender e visualizar determinados elementos da sua estrutura. Esses elementos são: o anel externo (fixo), a engrenagem interna (móvel) e o ponto dentro

da engrenagem (móvel). Os aspectos envolvidos na construção dos vários tipos de curvas feitas com muita precisão, fez com que despertasse a curiosidade dos conceitos geométricos e da matemática que descreve essas curvas. Diante destas características, a proposta da oficina em questão é modelar essas curvas através de suas equações paramétricas e traçá-las no programa Geogebra.
Sendo assim, esta oficina foi realizada num ambiente de Laboratório de Informática contando, além da régua mágica, com o *software* GeoGebra instalado em seus computadores, com isso obtemos maior agilidade e praticidade tanto para traçar curvas bastante variadas fazendo bonitos desenhos, como para explorar outros conceitos matemáticos envolvidos.
Embora a oficina já tenha sido realizada, como forma de investigação aplicamos algumas questões a respeito do que os participantes da oficina sabem sobre curiosidades e conteúdos matemáticos possíveis de serem explorados com o uso da régua mágica antes de discutirmos as questões referentes a parametrização dessas curvas. Também investigaremos quais as dificuldades obtidas pelos participantes durante a oficina em geral, mais especificamente as dificuldades para algebrizar as curvas obtidas durante os desenhos, como também analisaremos a opinião dos participantes a respeito da viabilidade de aplicação dessa oficina em sala de aula com alunos da Educação Básica.
Os dados coletados nessa investigação ainda não foram analisados, no entanto seus resultados serão apresentados no momento do evento J3M. Com base em outras práticas já realizadas por nós sobre esse mesmo assunto, acreditamos que os participantes, embora visualizem a beleza presente nas curvas obtidas por meio do espirógrafo, tenham dificuldades em identificar possíveis assuntos a serem trabalhados, exceto o conteúdo estruturante Geometria. As possíveis dificuldades poderão estar presentes no uso de parâmetros com funções trigonométricas, por isso a importância de ministrarmos esse assunto que permite aliar a simplicidade da beleza com a elegância e sofisticação matemática.

Referências:

ANDRADE, N, L. **Um brinquedo chamado espirógrafo.** Disponível em: http://www.mat.ufpb.br/lenimar/textos/espirografo.pdf. Acesso dia 18 de maio de 2018.

FERRAIOL, T. F. **Régua Mágica, espirógrafos, epiciclos e outras curvas parametrizadas.** Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1w8iiKQLOXMzJg_wpwSMKxKpGV_fPkv0_/view. Acesso dia 18 de maio de 2018.

GURGEL, B. Trabalho 02 - **Espirógrafo**. Disponível em: http://mamismd.blogspot.com/2014/11/trabalho-02-espirografo-de-funcoes.html. Acesso dia 19 de junho de 2018.

VERTUAN, E, R. **Modelagem matemática com desenhos construídos pela régua mágica.** Disponível em: http://www.utfpr.edu.br/toledo/estrutura-universitaria/diretorias/dirppg/encontro-de-iniciacao-cientifica-do-campus-toledo/GuilhermedeMartiniartigocompleto.pdf. Acesso dia 18 de maio de 2018.

A MATEMÁTICA X UMA PRÁTICA INTERDISCIPLINAR

Keith Gabriella Flenik Morais e Tiago Augusto Skroch de Almeida
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Curitiba
keithgabriella@hotmail.com e tiago.skroch@hotmail.com

Profa. Angelita Minetto Araújo (Orientadora)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Curitiba
angelitaminetto@yahoo.com.br

Palavras-chave: Matemática, interdisciplinaridade, resolução de problemas.

Resumo:

Durante as atividades pertinentes ao estágio supervisionado do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba (UTFPR-CT), elaborou-se o presente projeto no final do ano letivo de 2017 no Colégio Estadual Guarda Mirim do Paraná, localizado em Curitiba/PR. Este surgiu a partir das dificuldades dos estudantes apresentadas durante as regências sobre os conteúdos de Progressão Aritmética e Geométrica para as turmas dos 1º anos do Ensino Médio, os conteúdos abordados envolviam números decimais em exercícios ou resolução de problemas ligados a situações reais.

Este projeto se desenvolveu na abordagem de Pesquisa Qualitativa, segundo Oliveira (2014, p. 37), por ser este, "um processo de reflexão e análise da realidade através da utilização de métodos e técnicas para compreensão detalhada do objeto de estudo."

Optou-se pela aprendizagem por projetos devido à possibilidade dos estudantes aprenderem a se organizar, trabalhar em grupo, planejar e se comunicarem com os pares, além de realizar tarefas em comum. Outra vantagem da aprendizagem por meio de projetos é a possibilidade de trabalhar uma diversidade de conteúdos relacionando-os interdisciplinarmente, como por exemplo, com: Língua Portuguesa e Artes. Nesse sentido, consideramos imprescindível, expor o que entendemos por interdisciplinaridade, ainda que, de acordo com Pombo (2003), falar sobre este termo seja algo difícil, principalmente pelo termo já estar gasto.

> (...) a interdisciplinaridade é um conceito que invocamos sempre que nos confrontamos com os limites do nosso território de conhecimento, sempre que topamos com uma nova disciplina cujo lugar não está ainda traçado no grande mapa dos saberes, sempre que nos defrontamos com um daqueles problemas imensos cujo princípio de solução sabemos exigir o concurso de múltiplas e diferentes perspectivas. (POMBO, 2003, p. 4).

A Língua Portuguesa esteve presente durante as duas atividades de pesquisa de orçamentos de móveis, eletrodomésticos (Figura 1), produtos perecíveis e de utilidades domésticas, pois, além da lista de compras ser considerada um gênero textual (KARWOSKI, 2001), existiu a interpretação textual e de dados destes objetos.

> (...) o estudo dos gêneros textuais é uma fértil área interdisciplinar, com atenção especial para o funcionamento da língua e para as atividades culturais e sociais. Desde que não concebamos os gêneros como modelos estanques nem como estruturas rígidas, mas como formas culturais e cognitivas de ação social corporificadas de modo particular na linguagem, veremos os gêneros como entidades dinâmicas. (KARWOSKI, 2001, p. 25)


Colégio Estadual Guarda Mirim do Paraná
ATIVIDADE 2 – COMPETIÇÃO INTERPAS
TURMA: 1º ano A DATA: 16/10/17
Matemática – Profº Tiago Almeida e Profª Estagiária Keith Gabriella
EQUIPE: 4 - Ingrid, Giuliana, Amanda, Alícia

Vamos mobiliar um cômodo de uma casa! Para esta atividade, cada equipe receberá um valor fictício em dinheiro e terá um cômodo de uma casa que será o mesmo até o final da Competição e a equipe também permanecerá a mesma. Cada equipe fará um *orçamento* de móveis, eletrodomésticos, objetos de decoração, etc., que gostaria de ter em seu cômodo. Pesquisará preços e empresas, informando a fonte da pesquisa.

Cômodo da casa a ser mobiliado: Escritório
Verba fictícia (Quantidade de dinheiro disponível): R$ 5.120,25

Empresa/ Fonte	Produto Móvel ou Eletrodoméstico	Quantidade	Unidade R$	Total R$
1. mercado livre	[illegible]	1	249,00	249,00
2. mercado livre	mesa [illegible]	1	265,00	265,00
3. mercado livre	cadeira [illegible]	1	379,00	379,00
4. mercado livre	estante p/ livros [illegible]	1	151,90	151,90
5. mercado livre	impressora HP	1	219,90	219,90
6. mercado livre	telefone [illegible]	1	41,90	41,90
7. mercado livre	mesa auxiliar [illegible]	1	240,00	240,00
8. mercado livre	[illegible]	1	99,47	99,47
9. mercado livre	ventilador [illegible]	1	239,90	239,90
10. mercado livre	prateleira decora [illegible]	1	52,90	52,90
11. mercado livre	poltrona [illegible] D'Rossi	1	659,90	659,90
12.				
13.				
14.				
15.				
16.				
17.				
18.				
19.				
20.				
21.				
22.				
23.				
24.				
25.				
			Total R$	2.717,97

1) Após calcular a soma total do orçamento, sobrou dinheiro? sim Quanto? 3.102,21
2) Qual foi o produto mais caro do orçamento? poltrona E o mais barato? telefone
3) Suponha que se queira pagar em 6 parcelas cada um desses dois produtos (o mais caro e o mais barato). Quanto custaria a parcela de cada um deles? do mais caro 6 parcelas de 109,98 e do mais barato 6 parcelas de 6,98.

Figura 1 - Atividade 2: Orçamento de móveis e eletrodomésticos

Figura 2 - Atividade 4: Corte do cômodo da Sala de Estar

Na relação interdisciplinar com Artes, a professora da disciplina colaborou e trabalhou conjuntamente nas últimas atividades do projeto, ou seja, se debruçou sobre as elaborações das plantas baixas, as plantas humanizadas e os cortes dos cômodos (Figura 2) cujos objetivos eram reproduzir os objetos que haviam orçado para mobiliar estes espaços. E, sobre esta etapa do projeto assim se referiu:

> Muito interessante a abordagem dos cortes propostos aos alunos para dar um "norte" para elaboração dos trabalhos. E a planta humanizada traz à luz o cotidiano de cada aluno com sua contribuição particular e mais próximo da realidade dele. Assim a Matemática, o desenho, a Arte e a visão do todo só pode ser reunida e contribuir para uma melhor aprendizagem de vários conceitos como espacialidade, bidimensionalidade tridimensionalidade, escalas, medições entre outros. (RIBAS apud MORAIS, 2017, p. 82).

Foi nesta perspectiva de prática interdisciplinar que os estudantes mobiliaram os cômodos de uma casa e tratamos os conteúdos matemáticos relacionados às outras áreas tais como Designer, Arquitetura, Administração e Economia. Para estimular o envolvimento de todos os estudantes, aproveitamos a oportunidade para fazer uma competição entre os grupos e entre as turmas.

A partir do desenvolvimento desse projeto foi possível perceber o envolvimento dos estudantes, tanto entre eles como com a matemática. A constatação da validade se deu no momento em que os estudantes começaram a discutir sobre como empregar o dinheiro recebido para dar conta de realizar o que a atividade exigia. Nesses momentos, percebemos um amadurecimento tanto matemático quanto pessoal, em questões relacionadas a: leitura; interpretação; escrita; qualidade do produto x preço; preço x condição de pagamento (à vista ou a prazo); planejamento financeiro; operações com decimais (adição, subtração, multiplicação, divisão, juros; geometria; interpretação e resolução de problemas; proporção; medidas; planta baixa. Durante as atividades realizadas constatamos que os estudantes sentiram bastante dificuldade em representar os cômodos na planta humanizada e muita facilidade em realizar as pesquisas de preços dos produtos na *internet*.

> Para o professor, a produção de textos em matemática auxilia a direcionar a comunicação entre todos os alunos da classe; a obter dados sobre os erros, as incompreensões, os hábitos e as crenças dos alunos; a perceber concepções de vários alunos sobre uma mesma ideia e obter evidências e indícios sobre o conhecimento dos alunos. (SMOLE; DINIZ, 2001, p. 31)

Considera-se que ao propor atividades diferenciadas, que fujam do formato que os estudantes estão acostumados, o professor incita a curiosidade e desperta o interesse dos estudantes. Durante o desenvolvimento desse projeto, os estudantes tiveram que resolver diversos problemas matemáticos, os quais se originaram das pesquisas que realizaram e pela necessidade de conquistar o objetivo, ou seja, os cálculos passaram a ter significado, deixando de ser apenas uma lista infindável de contas sem sentido.

Referências

GONZATTO, Marcelo. **Por que 89% dos estudantes chegam ao final do Ensino Médio sem aprender o esperado em matemática?** Disponível em: < https://gauchazh.clicrbs.com.br/geral/noticia/2012/10/por-que-89-dos-estudantes-chegam-ao-final-do-ensino-medio-sem-aprender-o-esperado-em-matematica-3931330.html>. Acesso em: 15 fev. 2018.

KARWOSKI, Acir Mário. et al. **Gêneros Textuais**: reflexões e ensino. 4 ed. São Paulo: Parábola Editorial, 2011.

MORAIS, Keith Gabriella Flenik. **Relatório Descritivo e Analítico-Reflexivo**: Estágio Supervisionado B. Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. Curitiba, 2017.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer Pesquisa Qualitativa**. 6 ed. Petrópolis, RJ: Vozes. 2014.

POMBO, Olga. **Epistemologia da Interdisciplinaridade**. Seminário Internacional Interdisciplinaridade, Humanismo, Universidade, Faculdade de Letras da Universidade do Porto, 12 a 14 de novembro 2003. Disponível em: <http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/investigacao/portofinal.pdf >. Acesso em: 15 mar. 2018.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e Resolver Problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Educação financeira gerando qualidade de vida

Lohana Caroline Cornelius[1]
Licenciatura em Ciências Exatas – UFPR
corneliuslohana@gmail.com

Profª. Drª. Rita de Cássia dos Anjos
Departamento de Engenharia e Exatas – UFPR
ritacassia@ufpr.br

Palavras-chave: Ensino, Educação financeira, Matemática.

Resumo:

Iniciamos o projeto de Educação Financeira nas escolas com o objetivo de conscientizar os alunos com conhecimentos básicos de educação financeira, tendo o intuito de melhorar a qualidade de vida deles, de seus familiares e da comunidade escolar, partindo dos problemas atuais de economia, principalmente o endividamento das famílias brasileiras, que chegou a uma média anual de 60% em 2015 (PEIC, 2015).

O equilíbrio financeiro é uma conquista que depende de aspectos e ações, como, principalmente, possuir noções de economia doméstica e educação fiscal (GADOTTI, 2004, MENDES, 2004). A falta de consciência financeira gera o comprometimento do orçamento familiar e, consequentemente, a perda da qualidade de vida. Espera-se que com o consumo consciente, além da diminuição das taxas de inadimplência, melhore a qualidade de vida dos alunos e familiares, dando-os liberdade e auxiliando no desenvolvimento do país.

Atuando nos 9º anos do período vespertino do Colégio Estadual Santo Agostinho, o projeto desenvolveu com os estudantes assuntos relacionados ao consumo consciente, conscientizando-os a evitar gastos supérfluos, proporcionando um equilíbrio material e um acúmulo de capital que pode ser usado para sua

1 Bolsista do Programa COEX/PROEC.

realização pessoal e material, como cursos para sua formação, uma viagem, tratamentos hospitalares e outros imprevistos. O projeto trabalhou com atividades interdisciplinares e contemporâneas, abordando a economia em diferentes aspectos do ensino-aprendizagem, de interesse comunitário, regional, social e mundial.

Para uma formação profissional de qualidade é preciso despertar o interesse dos alunos para a realidade, tornando-os críticos a partir de suas próprias experiências do dia a dia (PEFN, 2015). Aplicando na sala de aula assuntos importantes de educação financeira, como a reforma da previdência social, que afeta toda a população e, que está diretamente ligada ao planejamento econômico individual/familiar, leva o aluno a sua realidade e a importância da previdência.

Debater em sala o quanto o dinheiro pode influenciar na felicidade e na realização dos sonhos e, como ganhar dinheiro desenvolvendo atividades prazerosas para suas idades, os alunos trabalham a imaginação com alternativas de lucro, podendo, num futuro, criarem seu próprio negócio. Desenvolver atividades com investimentos básicos, como o que é a poupança, cálculo de juros e a discrepância entre contas pagas parceladas e à vista que conscientiza os estudantes sobre a importância da economia nas situações diárias. A utilização de exemplos do cotidiano dos alunos, utilizando o planejamento econômico por meio de planilhas de receitas e despesas e a forma consciente de conquistar bens pessoais, auxilia na gestão da renda individual/familiar e no desenvolvimento futuro dos alunos, quando estes começarem a trabalhar ou no momento, com o dinheiro que ganham de seus familiares. Introduzir a economia mundial, o câmbio e a conversão entre moedas de diferentes países, aperfeiçoa o aluno em realidades mundiais.

Como resultado, foi perceptível o desenvolvimento da consciência dos alunos por meio de discussões durantes as aulas, onde havia um engajamento deles com sua realidade, mostrando opiniões, questionamentos e exemplos e, debatendo nas suas casas sobre o assunto e aplicando conceitos com seus familiares. Também percebeu-se uma quantidade maior de respostas corretas comparando o questionário inicial, que foi realizado para saber o conhecimento prévio dos alunos, com o questionário final do projeto. Os resultados deste projeto mostram que a conscientização econômica gera atitudes equilibradas importantes para a capacidade financeira pessoal e familiar, possibilitando a liberdade de escolha e uma melhor qualidade de vida, diminuindo as taxas de inadimplência e desenvolvendo o país.

Referências:

Pesquisa Nacional de Endividamento e Inadimplência do Consumidor (PEIC) – março 2015. Disponível em: http://www.cnc.org.br/central-do-conhecimento/pesquisas/economia/pesquisa-nacional-de-endividamento-e-inadimplencia-do-c-4. Acesso em: 01 de maio 2015.

GADOTTI, Moacir. **Escola Cidadã**. São Paulo: Ap, Jun, 2000. MENDES, J.T.G. **Economia: Fundamentos e Aplicações**. São Paulo: Prentice Hall, 2004.

Programa de Educação Financeira nas Escolas (PEFN). Disponível em: http://www.vidaedinheiro.gov.br/. Acesso em: 01 de ago. 2015.

ATIVIDADE DIDÁTICA UTILIZANDO A MODELAGEM MATEMÁTICA

Aline Vilas Boas Ribeiro de Paula[1], Maria Elena de Oliveira Valentim[1], Matheus Vieira do Nascimento Cardoso[1] e Pâmela Ribas de Castro[1]
Alexandra A. Cousin[2] e Lucieli M. Trivizoli[2]

RESUMO: Neste trabalho apresentamos a atividade elaborada por meio do subprojeto PIBID/Matemática tendo como referência teórica e metodológica a Modelagem Matemática na Educação Matemática. Este projeto foi desenvolvido na Universidade Estadual de Maringá (UEM) no ano de 2017. A atividade que hora apresentamos foi adaptada do texto *Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: um olhar segundo as orientações didáticas presentes nos parâmetros curriculares*, das autoras Marli Schmitt Zanella e Lilian Akemi Kato (2016) conforme encontramos necessidade. A atividade foi implementada em uma das escolas parceiras do projeto, em uma turma do 8º ano, visto que o conteúdo a ser explorado é o conceito de proporcionalidade. A intenção era criar uma atividade instigante para envolver os alunos e deixá-los livres para tentar solucionar o problema proposto. Depois de pensado individualmente nos grupos a ideia era compartilhar esses pensamentos para o restante da turma e explica-los. Após a exposição de cada grupo fizemos uma intervenção fazendo a média que cada um deles encontrou para chegar em uma solução final envolvendo toda a turma.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Educação Matemática, Pibid Matemática.

INTRODUÇÃO

O Projeto PIBID promove a inserção de licenciando no contexto das escolas públicas brasileiras. Durante um período do Projeto foi proposta a elaboração de uma atividade a ser aplicada na escola parceira utilizando a tendência da Modelagem Matemática presente na Educação Matemática.

[1] Discentes do curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Maringá (UEM), bolsistas do PIBID-CAPES, e-mails: a.ribeiromatematica@gmail.com ; ra93290@uem.br ; ra83604@uem.br ; ra99270@uem.br

[2] Professoras do Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá (UEM), Coordenadoras do Subprojeto da Área da Matemática do PIBID-CAPES, e-mails: aoacousin@gmail.com ; lmtrivizoli@uem.br

Realizarmos estudos para elaboração e apresentação de seminário sobre o que é Modelagem Matemática e em um segundo momento estudamos algumas atividades que envolviam a temática proposta. Em seguida elaboramos uma atividade, adaptada de Zanella e Kato (2016) “Modelagem Matemática nos anos inicias do Ensino Fundamental: um olhar segundo as orientações didáticas presentes nos parâmetros curriculares”, para posteriormente ser aplicada no colégio parceiro do subprojeto.

A atividade foi adaptada de Zanella e Kato (2016) *Modelagem Matemática nos anos inicias do Ensino Fundamental: um olhar segundo as orientações didáticas presentes nos parâmetros curriculares.* A proposta foi um problema em que os alunos deveriam encontrar a altura de um suspeito que roubou uma joalheria. Para isso, fizemos uma gravação de um vídeo com a seguinte notícia: “*Uma joalheria foi roubada na noite passada e todas as joias foram levadas pelo meliante. A polícia não conseguiu capturar o ladrão. A única pista que os policiais encontraram na cena do roubo foi uma grande pegada deixada pelo ladrão, como você pode ver na foto*”. Em seguida, a indicação seria mostramos uma foto impressa da pegada (Figura 1), e sugerir aos alunos que encontrem mais pistas, com a intenção de determinar a altura do suspeito.

Ao final das discussões e intervenções necessárias, pediremos para os grupos exporem as ideias de seus encaminhamentos para possibilitar a discussão da classe. Nessa etapa sugeriremos que façam a média entre as alturas encontradas por cada grupo a fim de concluir a atividade, ou seja, finalmente encontrar a altura do suspeito.

Indicamos que essa atividade elaborada seja aplicada para alunos que estejam matriculados no 8ºAno do Ensino Fundamental, visto que o conteúdo a ser explorado é o conceito de proporcionalidade.

(Figura 1. Imagem da pegada.
Fonte: Os autores)

APLICAÇÃO DA ATIVIDADE PROPOSTA E RESULTADOS

A atividade proposta foi desenvolvida numa turma do 8º Ano, com 21 alunos presentes, durante duas aulas. Iniciamos mostrando a reportagem aos alunos e, em seguida, pedimos para formarem grupos e cada um desses deveria ter uma folha de registro de todo o desenvolvimento do processo.

Acrescentamos mais tempo para discussões e possíveis soluções. Na finalização solicitamos que um representante de cada grupo fosse ao quadro escrever a altura que tinham encontrado para o ladrão e explicar como chegaram a essa solução.

O grupo 1, composto por 6 alunos, iniciou seu trabalhado fazendo uma pesquisa no site google, e perceberam que o "tamanho do pé" de uma pessoa pode variar de acordo com o tipo de sapato que usa. Caso usarem um tipo de sapato que aperta o pé, ele pode atrofiar. Depois dessa rápida pesquisa começaram a comparar a altura dos membros do grupo com o tamanho do pé de cada um e a pegada que entregamos. Chegaram na conclusão que a altura do ladrão era de 1,70 m, pois um dos alunos do grupo tinha esta altura e seu pé era do mesmo tamanho que a pegada (27 cm).

O grupo 2 começou medindo a altura e o tamanho do pé de cada membro do grupo e comparando com a pegada. Nenhum tinha o mesmo tamanho de sapato que a pegada, mas um deles tinham o pé um pouco menor e outro um pouco maior e calçavam 38 e 40, respectivamente. Então fizeram uma média do tamanho do pé e da altura de ambos e chegaram que o tamanho do pé é número 39 e como a altura dos dois era de 1,67m e 1,77m, respectivamente, concluíram que o ladrão tem 1,72 m de altura.

O grupo 3 era formado por 4 alunos. Eles estavam bastante preocupados com a largura do pé e não com o comprimento ou, com qual seria o tamanho do sapato do ladrão, mas não estavam conseguindo fazer qualquer conclusão. Então, nesse momento, fizemos algumas interferências para tomarem outro caminho.

Um aluno deste grupo acabou entrando em conflito com os demais porque não conseguiam entender as ideias dele. Assim, ninguém queria ir ao quadro explicar as ideias que surgiram durante o desenvolvimento da tarefa. Mas, como durante o trabalho eles haviam explicado para o professor da sala as ideias, o mesmo se dirigiu à frente e colocou as explicações do grupo.

O grupo 4 era composto por 6 alunas e logo no início uma delas teve uma ideia de como poderia fazer e, quando explicou para o grupo todas concordaram. Quando ela foi registrar sua ideia percebemos que ela estava querendo comparar tamanhos de pés iguais fazendo regra de três para achar as alturas, mas desta forma sempre encontraria a mesma. Tentamos explicar para elas que o raciocínio utilizado deveria ser revisto. No entanto elas acreditavam que os cálculos estavam incorretos e não a forma de refletir sobre o problema. Acabaram levando para o quadro o mesmo que tinham nos explicado e, nesse momento, pelo adiantado da hora, fizemos uma intervenção, calculando a média de todas as alturas encontradas pelos alunos e chegando no resultado final que a altura do ladrão seria de 1,72m.

REFERÊNCIAS

BUENO, V. C.. **Modelagem Matemática:** quatro maneiras de compreendê-la. Minas Gerais: Universidade Federal de Ouro Preto, 2011.

ZANELLA, M. S., & KATO, L. A. Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: Um Olhar Segundo as Orientações Didáticas Presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais. **Imagens da Educação**, v. 6, n. 1, p. 24-37, 2016.

Ladrilhamentos: Utilizando Construções Geométricas Para Obter Padrões Islâmicos

Guilherme Oliveira Santos [1] e Matheus Vieira do Nascimento Cardoso [2]
Licenciatura em Matemática – UEM
gui14gos2014@gmail.com e mv.cardas@hotmail.com

Thiago Fanelli Ferraiol (Orientador)
Departamento de Matemática – UEM
tfferraiol@uem.br

Palavras-chave: Ladrilhamentos. Padrões Islâmicos. Sequência Didática.

Resumo:

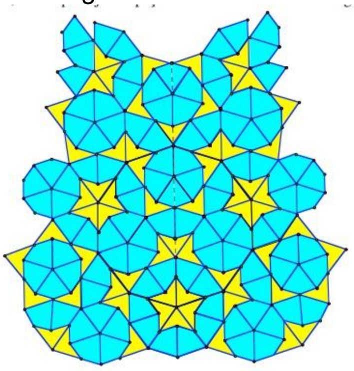
Nosso intuito neste trabalho é apresentar uma proposta metodológica e didática, utilizando conceitos de construções geométricas para se obter padrões islâmicos. Essa proposta, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), visa a interdisciplinaridade entre as disciplinas de arte, história, geografia e matemática, através de contextualizações históricas, práticas e reflexões sobre as relações matemáticas na arte dos ladrilhamentos. Nesse sentido, desenvolvemos uma sequência didática a ser aplicada, a qual proporcionará ao aluno uma prática diferenciada de ensino, através da utilização de mídias e experiências com materiais concretos.

Para a elaboração da sequência, realizamos um estudo histórico e teórico, embasados em Elvia Mureb Sallum (2015) e Rodnei Eduardo Fialho (2018), sobre a arte de ladrilhamentos e padrões islâmicos. Essa arte deve-se a diversas culturas, como persas, gregos e romanos, porém foram os povos islâmicos que a aperfeiçoaram ao longo dos séculos, em específico, os padrões islâmicos, que são tradições artísticas, eminentemente geométricas e simétricas. Essas formas notáveis e complexas, com toda a sua exuberância e magnitude, podem ser criadas através do uso de uma régua não graduada e do compasso. Para esse povo, os padrões islâmicos são considerados uma atividade nobre, sagrada, isto é, que sofre grande influência da religião, utilizando dos mais primitivos conceitos da matemática.

[1] Discente do curso de Licenciatura em Matemática, ex-Bolsista do Projeto PIBID-CAPES
[2] Discente do curso de Licenciatura em Matemática, ex-Bolsista do Projeto PIBID-CAPES

O texto de SALLUM (2015), propiciou o embasamento acerca das relações matemáticas presentes nos ladrilhamentos. Nele, os tipos de ladrilhamento apresentados estão intimamente ligados a distribuição de polígonos em cada vértice no ladrilho. Essa distribuição por sua vez, está ligada aos conceitos de ângulos internos de um polígono, que entorno de cada vértice deve resultar em 360º, pois estamos sempre trabalhando em um plano euclidiano. O texto de FIALHO (2018) propiciou o embasamento sobre as relações matemáticas nos padrões islâmicos, deixando claro que a construção de padrões, sejam mais simples ou mais elaborados, pode ser obtida através de construções geométricas.

Figura 1 – Ladrilho



Fonte: SALLUM (2015)

A sequência didática foi dividida em três momentos. No primeiro momento é apresentada uma contextualização histórica do tema a ser trabalhado, levantando questionamentos e discussões sobre o assunto. Também, esse é o momento de realizar as experimentações, onde através de materiais manipuláveis, os alunos têm a oportunidade de ladrilhar o plano euclidiano utilizando polígonos regulares. Ao final da experimentação o professor levanta questionamentos, onde os alunos refletem e trazem suas considerações para o segundo momento.

No segundo momento, o professor inicia retomando os questionamentos levantados anteriormente. Concomitantemente à discussão com os alunos, as relações matemáticas nos ladrilhos são evidenciadas, e posteriormente formalizadas pelo professor, com base nas discussões. Após essa conclusão, são apresentados alguns padrões islâmicos e como podem ser obtidos utilizando construções geométricas, assim servindo de motivação para a atividade a ser proposta. Essa atividade consiste na construção do padrão islâmico pessoal do aluno, utilizando também construções geométricas.

No terceiro momento, os alunos devem transpor o padrão construído no momento anterior, para o software GeoGebra, utilizando as ferramentas disponíveis.

Com o programa, os alunos poderão realizar o ladrilhamento do padrão obtido, construindo novas ferramentas e realizando translações do padrão islâmico pessoal.

Com essa sequência, desejamos propiciar aos alunos a interação entre as disciplinas, que muitas vezes não ocorre em sala de aula, a utilização de construções geométricas em situações do cotidiano e como a matemática está diretamente ligada com essa arte.

REFERÊNCIAS

BARICHELLO, Leonardo; LEITE, Kauan Pastini Paula; FIRER, Marcelo. **Polígonos regulares e ladrilhos.** Atividade para Sala de Aula. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1026>. Acesso em: 04 maio 2018.

BARISON, Maria Bernadete; PÓLA, Marie Claire Ribeiro. **CONSTRUÇÃO DE PADRÕES ISLÂMICOS NO ENSINO DE DESENHO GEOMÉTRICO: ARTESANATO & TECNOLOGIA.** 2007. Disponível em: <http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/artigos_graphica/CONSTRUCAODEPADROES.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2018.

CAETANO, Paulo Antonio Silvani. **Ladrilhamento do plano: ângulos internos e ladrilhos de três em três - Desafio do Ladrilhamento - Mat.** 2010. Plano de Aula. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=21085>. Acesso em: 09 maio 2018.

DESPORTO, Ministério da Educação e do. **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS.** 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2018.

FAGUNDES, Carlos Artur Nepomuceno; JOVER, Renato Rivero; SILVA, Vinícius Teixeira da. **Ladrilhos e Mosaicos.** 2007. Disponível em: <http://mdmat.mat.ufrgs.br/sead/mosaico/ajuda.htm>. Acesso em: 15 jul. 2018.

FIALHO, Rodnei Eduardo. **Construções Geométricas e Padrões Islâmicos.** 2018. 62 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2018.

MATHIAS, Carmen. **Novas Ferramentas.** Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/DqGxZZTc>. Acesso em: 30 jun. 2018.

OBM, Equipe Com –. **Pavimentação, caleidoscópios, caleidociclos, Escher e, até, . . . matemática!!!** 2015. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-1/>. Acesso em: 09 maio 2018.

SALLUM, Elvia Mureb. **LADRILHAMENTOS.** 2015. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2015/10/monografia2.pdf>. Acesso em: 04 maio 2018.

Geometria na pipa: expandindo conhecimentos matemáticos de alunos com altas habilidades/superdotação

Natalia Mota Oliveira; Eduarda Gabriele Prestes Taverna e Rafael de Castro Bonfim
Licenciatura em Matemática – UTFPR
nat.mota.oliveira@gmail.com; eduarda.taverna@gmail.com e raffa1107.com@gmail.com

Profa. Luciana Schreiner de Oliveira (Orientador)
Departamento de Matemática – UTFPR
lu_zan1@hotmail.com

Palavras-chave: Geometria Plana, ensino, Altas Habilidades.

Resumo:

O tema do projeto de extensão "Matemática Acessível" deste período – A Geometria na Pipa – foi indicado pelas professoras Anadir e Silvana, responsáveis pelas turmas de altas habilidades/superdotação atendidas na Escola Municipal Felipe Zeni e no Centro de Atendimento às Deficiências Sensoriais (CADS) Hellen Keler da Secretaria Municipal de Educação de Pinhais. O projeto que ocorre desde agosto de 2016 nas dependências da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – visa introduzir os seus participantes no mundo da docência para alunos com altas habilidades por meio da elaboração e aplicação de situações de ensino com as turmas citadas.

O primeiro plano de aula criado visava apresentar a história da pipa e os conceitos de reta, semi-reta, as posições relativas entre retas coplanares, ângulos e classificação dos ângulos, tudo através do estudo da pipa. Para isto, foi produzida por um dos participantes do projeto uma história em quadrinhos contando como surgiu e já foi utilizada a pipa através das civilizações, também foi elaborado um resumo sobre os tipos de retas e ângulos, uma atividade sobre posição relativa entre retas e outra sobre ângulos, além de pipas de papel cartão para que os alunos pudessem procurar retos e ângulos, e um transferidor em cartolina para ser utilizado na porta das salas.

O desenvolvimento da primeira atividade ocorreu antes na escola Felipe Zeni, onde são atendidas duas turmas: uma de altas habilidades e outra de alunos com dificuldades de aprendizado, ou seja, mais um desafio para aplicar o plano. Para alguns participantes era a primeira vez que entravam em sala, principalmente com estudantes daquela idade (de 8 a 12 anos), então havia receio de que os alunos com altas habilidades seriam geniais e os alunos com dificuldades ficariam quietos e não iriam absorver nada do que seria passado, mas mesmo com disparidades na turma, onde alguns alunos demonstravam muita dificuldade na abstração do conteúdo e necessitavam de atenção mais direta, foi possível contornar a situação separando o grupo e atendendo individualmente a cada dois ou três alunos para reforçar o que já havia sido explicado na lousa. Uma coisa notável foi a velocidade com que alguns alunos respondiam às perguntas, onde um deles inclusive conhecia a palavra "Pandorga", que foi planejada para aguçar a curiosidade deles. Um dos

recursos melhor utilizados nesta aula foi o transferidor de porta, pois ficou claro que os alunos compreenderam o conceito de ângulo neste momento.

No CADS a aplicação do plano foi muito parecida, mesmo que não houvesse alunos com dificuldade de aprendizado. Por se tratar de crianças entre 8 e 12 anos, havia diferentes estágios de desenvolvimento tanto matemático quanto motor, então ficou ainda mais evidente a facilidade com alguns alunos compreendiam assuntos aparentemente abstratos demais para a faixa etária, enquanto outros tinham dificuldade em operações básicas. A participação dos alunos com alguns exemplos incomuns e criativos das aplicações dos conceitos (como a comparação de ruas paralelas com retas paralelas, e do ponto de interseção de duas retas com uma rotatória) foi extremamente enriquecedora para a aula.

Figura 1 – transferidor de porta sendo apresentado aos alunos do CADS. Fonte: Autoria própria

Figura 2 - Anotações de uma aluna da Escola Felipe Zeni sobre a aula. Fonte: Autoria própria.

Entre as duas visitas, as professoras de ambas as turmas reviram os conteúdos trabalhados e aplicaram as atividades que eventualmente não foram concluídos em virtude do tempo. No segundo plano de aula elaborado havia o planejamento de uma pipa e a sua construção, tudo relembrando os conceitos apresentados na aula anterior, ou seja, fazendo um estudo geométrico da pipa.

Durante a revisão de conceitos era perceptível que os alunos lembravam bem da aula anterior, tanto que qualquer pergunta era respondida em segundos. Para a construção da pipa, os materiais foram distribuídos de pouco a pouco, começando com uma folha para que eles desenhassem a pipa usando os esquadros, depois as varetas que deveriam ser marcadas (utilizando a régua) e depois amarradas, deixando-as perpendiculares e prendiam às quatro pontas o fio chegando num formato de pipa. Logo após a pausa para o intervalo, houve a finalização da pipa com a colagem do papel seda. Infelizmente não foi possível utilizar os transferidores com os alunos na escola Felipe Zeni; o que foi feito no CADS, onde o cenário não foi muito diferente. Ficou claro que após a construção da pipa, todos sabiam identificar ângulos, triângulos e as posições relativas das retas presentes nela, apesar de alguns erros no manejo do transferidor e esquadro. Possivelmente pelo fato de os alunos são um pouco mais velhos, o desenvolvimento do projeto foi mais fácil na escola Felipe Zeni, pois eles já têm uma coordenação motora mais desenvolvida, diferentemente dos alunos do CADS, que por serem mais novos não tinham tantas habilidades no manejo dos materiais.


Figura 3 – Construção da pipa no CADS.
Fonte: Autoria própria.


Figura 4 – Construção da pipa na escola Felipe Zeni.
Fonte: Autoria própria.

De modo geral, percebe-se que a aula atingiu os objetivos planejados, realmente enriquecendo o aprendizado de matemática destes alunos, e que o projeto cumpriu com seu propósito inicial de introduzir os participantes no mundo da docência para alunos com altas habilidades/superdotação, principalmente em matemática, expandindo suas possibilidades educacionais e estimulando-os a incluir e motivar todos seus alunos sem nenhuma distinção.

Referências:

BRASIL. **Lei nº 13146, de 06 de julho de 2015**. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2015/Lei/L13146.htm>. Acesso em: 23 jul.2018.

BRASIL. **Lei nº. 13005, de 25 dejunho de 2014**. Aprova o Plano Nacional de Educação e dá outras providências. Disponível em: <http://www.jusbrasil.com.br/diarios/72231505/dou-edicao-extra-secao-1-26-06-2014-pg-3>. Acesso em 23 jul.2018.

BRASIL. **Lei nº. 9394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em 23 jul.2018.

Atividades de Simetria com Livros Espelhos

Ana Flavia Lopes[1] e Nathalie Aparecida Felicetti Luvison[2]
Licenciatura em Matemática – UFPR
lopesbenites@gmail.com e nathalie.fluvison@gmail.com

Prof. Paula Rogeria Lima Couto
Departamento de Matemática – UFPR
paulacouto@ufpr.br

Palavras-chave: Matematicativa, atividades com simetrias, exposições.

Resumo:

O projeto de extensão Matematicativa promove pequenas exposições em escolas de Ensino Médio, com atividades sobre vários temas que tem potencial para aguçar a curiosidade dos alunos e motivar o aprendizado da Matemática. Este trabalho tem o objetivo de apresentar algumas atividades sobre o assunto simetria, que possam ser desenvolvidas no contexto destas exposições. Para isso, realizou-se um estudo sobre os vários tipos de simetrias e sobre as possíveis formas de apresentá-las para a comunidade escolar. As simetrias estão quase sempre presentes na arquitetura, nas artes e, principalmente na natureza, como no nosso corpo, nas asas de uma borboleta, dentre outros exemplos. O conceito de simetria está relacionado à posição relativa das partes de um todo, em relação a um ponto, um eixo ou um plano. As atividades propostas para as exposições abordam a verificação de simetrias em figuras planas confeccionadas em papel, como as letras do alfabeto, alguns símbolos e logotipos conhecidos, figuras de animais e objetos do dia a dia. Além disso, os livros espelhos são usados como caleidoscópios diédricos para produzir vários padrões de simetria. São exploradas nestas atividades os conceitos de simetria axial, que é definida caso exista uma reta tal que a cada ponto da figura espelhada corresponda outro ponto distinto da figura situado em posição idêntica em relação à reta, de simetria rotacional, que é estabelecida se a figura permanecer inalterada ao realizar uma rotação em volta de um ponto fixo e segundo um ângulo menor do que 360° e simetria central, se existe um ponto O tal que para cada ponto da figura corresponde outro ponto da figura, sendo O o ponto médio do segmento que une esses dois pontos. A partir da aplicação das atividades de identificação de simetrias mencionadas, as quais serão realizadas até novembro deste ano, serão avaliadas a adequação do material produzido para o ambiente de uma exposição, a receptividade do público para essas atividades, se os alunos apreciaram a condução da atividade, dentre outros aspectos que são relevantes para os objetivos do projeto de extensão Matematicativa, os quais serão relatados na apresentação deste trabalho. Desse modo, tendo em vista a pesquisa realizada e os objetivos em relação a aplicação das atividades, o projeto que vem sendo desenvolvido é de suma importância na formação do licenciando, pois auxilia na busca de novos temas

[1] Voluntário do Programa de extensão Matematicativa;
[2] Bolsista do Programa de extensão Matematicativa.

que não são trabalhados dentro da sala de aula, acarretando em pesquisas acadêmicas e no preparo de materiais pedagógicos que ajudem na compreensão dos tópicos, por fim o Matematicativa estimula a comunicação e a didática dos integrantes para com os alunos nas oficinas realizadas, fazendo com que nós, futuros professores, vejamos como é a realidade no desenvolvimento e aplicação de novas atividades na área da matemática.

Referências:

LEMAT. **CALEIDOSCÓPIOS DIÉDRICOS. UnB.** Disponível em: <http://mat.unb.br/lemat/156-2/> Acesso em: 16 ago 2018.

UFRJ. **PROJETO: NOVAS TECNOLOGIAS NO ENSINO.** Disponível em:<http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap21s3.html> Acesso em: 16 ago 2018

Revisão Bibliográfica dos Trabalhos Apresentados no ENEM no Período de 1987 - 2016: Ensino de trigonometria

Neumar Regiane Machado Albertoni
Licenciatura em Matemática – UTFPR
neumarmatematica@gmail.com

Profª Drª Luciana Schreiner de Oliveira (Orientadora)
Departamento de Matemática – UTFPR
lu_zan1@hotmail.com

Palavras-chave: Trigonometria, Práticas na sala de aula, Metodologias de Ensino.

Resumo:

Este trabalho apresenta uma pesquisa realizada no curso de graduação de Licenciatura em Matemática, como proposta de Trabalho de Conclusão de Curso, na qual objetivou-se contribuir no âmbito acadêmico com o tema, para tanto, o trabalho de natureza qualitativa, fundamentado em uma pesquisa bibliográfica, apresenta como questão norteadora: Como o Ensino de Trigonometria vem sendo abordado em sala de aula? Com o objetivo de perceber como a Trigonometria vem sendo abordada em sala de aula, para responder tal questionamento, buscou-se realizar uma análise ao principal evento nacional da Educação Matemática, o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM).

Em síntese, ao realizar análise das 12 edições do ENEM, em busca de textos que apontassem perspectivas metodológicas para o ensino e aprendizagem de Trigonometria na Sala de aula, encontramos oito trabalhos que se revelaram pertinente a esta temática.

Oito foram os textos que relatam experiências ou pesquisas realizadas. Sendo assim, foram escolhidas comunicações das três últimas edições do ENEM, tais comunicações tratam do Ensino de Trigonometria na sala de aula.

Com a análise realizada dos oito artigos estudados, foi possível observar as seguintes metodologias abordadas nas atividades em sala de aula e nas propostas metodológicas dos teóricos da área em estudo.

Quadro 1 - Metodologias abordadas nos artigos.

TÍTULO	METODOLOGIA
1º - O ensino da trigonometria subsidiado pela teoria da aprendizagem significativa e pela teoria dos campos.	Utilizando a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, apresentou uma metodologia em três etapas: ✓ Identificar os conceitos prévios dos estudantes; ✓ Criação dos conceitos; ✓ Avaliação das competências e habilidades alcançadas;
2º-Trigonometria no triângulo retângulo: o aluno como protagonista na construção do conhecimento.	Ênfase na construção do conhecimento pelo sujeito aluno, do papel do professor e das situações didáticas, mediadores nesse processo.

3º-Coordenadas polares no ensino médio: contribuições para o ensino e a aprendizagem de trigonometria e números complexos.	Elaboração de três questões que compuseram uma sequência didática, pautada na transposição didática.
4º-Trigonometria: um olhar com a pesquisa e a sala de aula.	Estudo bibliográfico, destacando como as metodologias: sequência didática, Trajetória Hipotética da Aprendizagem, tecnologias, representação semiótica com o auxílio da tecnologia, abordagem histórico-filosófica e mista (várias metodologias), Abordadas pelos teóricos que trazem contribuição para o ensino de trigonometria na sala de aula.
5º-Formas de pensamento matemático evidenciadas em conceitos básicos de trigonometria.	Atividades realizadas através de uma investigação, com destaque para a visualização (no sentido de criar, manipular e compreender).
6º-Objeto de aprendizagem para o estudo das funções trigonométricas arco seno e arco cosseno.	Sequência didática com o uso da tecnologia: utilização do software Geogebra, com o objetivo de construir o conceito de funções seno e cosseno, bem como suas inversas.
7º-Relações trigonométricas no triangulo-retângulo: a construção do conceito de seno, cosseno e tangente como uma relação no ângulo agudo por meio de material manipulativo.	Utilizando a teoria dos campos conceituais de Vergnaud. A partir do uso de material concreto, realizou-se a construção do conceito de seno, cosseno e tangente, como uma relação em um ângulo agudo de um triângulo retângulo.
8º-Um estudo sobre a trigonometria no triângulo retângulo na perspectiva da teoria dos campos conceituais	Investigação pautada na teoria das situações didáticas de Guy Brousseau, a qual envolve as relações entre saber, professor e aluno e a teoria dos campos conceituais.

Fonte: Autora 2018.

As presentes metodologias relacionadas no (Quadro 1), nos remetem a prática do ensino da Trigonometria, destacando a abordagem do tema na sala de aula, a partir das metodologias diferenciadas. Destaca-se que todas estão direcionadas para o mesmo objetivo, que é aprimorar o Ensino de Trigonometria.

No primeiro artigo os autores utilizam como aporte teórico a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel e também a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, tais teorias são apresentadas pela autora de tal forma que,

> [...]pelo envolvimento dos alunos e da pesquisadora, pode-se afirmar que uma metodologia baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (TAS) e na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud provoca uma significativa mudança no processo de ensino e aprendizagem. Contribui para uma educação inovadora, mais humana, que desperta, no estudante, o interesse em participar da aula, transforma a sala de aula num rico laboratório, provocando o seu crescimento pessoal e cognitivo, considerando o aluno como um ser ativo, durante todo o processo (KLEIN, 2010, p.9).

Para isso o estudante precisa ter disposição para aprender e o conteúdo ter um significado que depende da natureza do conteúdo e das informações que possuem como experiências para si mesmo.

Notou-se que tal Teoria Teoria dos Campos Conceituais visa fornecer um panorama e também princípios para o desenvolvimento e da aprendizagem de conhecimentos que possuem algum grau de complexidade para os estudantes.

Nesse sentido temos que,

> Trata-se de uma teoria cognitivista, que busca analisar o desenvolvimento e a aprendizagem de competências complexas dos estudantes. Para isso, subsidia o professor de modo que ele possa compreender os processos e as práticas de ensino que possibilitem o desencadeamento dos processos de aprendizagem (SANTANA et al, 2015, p.1163).

Na sequência, o segundo artigo traz uma ênfase para o na construção do conhecimento pelo estudante, do papel do professor e das situações didáticas. Através de experiências anteriores do estudante no meio que está inserido, a partir de um diálogo rever alguns conceitos, dando voz para estudante.

No terceiro artigo sintetizado, a metodologia aplicada foi uma sequência didática para o Ensino de Trigonometria e Números Complexos, tal sequência enfatizou a importância do conhecimento prévio de Trigonometria para o Ensino de Números Complexos com ênfase nas coordenadas polares.

O quarto artigo apresenta um estudo bibliográfico sobre o Ensino de Trigonometria e destacando as metodologias mais estudadas.

No quinto artigo, notou-se um destaque para a forma como o estudante representa a solução, ou seja, na forma gráfica ou algébrica e também na questão da abstração, na qual as autoras identificaram uma necessidade de trabalhar com questões que exijam a interpretação de textos e que incentivem a descrição formal das relações e processos matemáticos

Com essa análise dos artigos, percebeu-se que o uso da tecnologia pode colaborar nesse processo, no sexto artigo sintetizado observou-se uma aplicação para um curso técnico, o que proporcionou que estes estudantes vivenciassem de uma forma diferenciada um conteúdo que é aplicado em uma disciplina específica do curso. Dando continuidade, foi possível verificar outras metodologias, como Situações Didáticas de Guy Brousseau mencionada e aplicada no oitavo artigo.

Sendo assim, tomando como base os trabalhos sintetizados, observamos importância de a escola trabalhar a Trigonometria, notamos que o interesse sobre o Ensino da Trigonometria vem avançando no âmbito das publicações, estes avanços são essenciais e mostram o interesse dos envolvidos em suprir a “dificuldade no processo de ensino e aprendizagem”. Diante disso temos as metodologias, as quais foram identificadas nos artigos publicados no ENEM e apresentadas nesta pesquisa, que reforçam essa afirmação.

Destaca-se a utilização da Didática Francesa na pesquisa realizada, com aporte na teoria dos campos conceituais, situações didáticas e transposição didática.

Referências:

KLEIN, M. É. Z. **O ensino da trigonometria subsidiado pela teoria da aprendizagem significativa e pela teoria dos campos conceituais**. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 2010, Salvador - BA. Anais eletrônicos SBEM. Disponível em: < http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/CC/T11_CC301.pdf>. Acesso em: 18 mar. 2018.

SANTANA, E; ALVES, A, A; NUNES, C. B. A. **Teoria dos Campos Conceituais num Processo de Formação Continuada de Professores**. BOLEMA, Rio Claro, SP, v. 29, n. 53, p. 1162-1180, dez. 2015.

ENSINO DE MATEMÁTICA E A FORMAÇÃO PARA A CIDADANIA: UMA PROPOSTA ENVOLVENDO A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA

Otto Eiglmeier Neto
Licenciatura em Matemática – UFPR
otto.nod@gmail.com

Tania Teresinha Bruns Zimer
Departamento de Teoria e Prática de Ensino/Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática (PPGECM) – UFPR
taniatbz@ufpr.br

Palavras-chave: Formação do Cidadão, Educação Matemática Crítica, Aulas Diferenciadas.

Resumo:

Na área da Educação Matemática busca-se constantemente aulas diferenciadas para a disciplina de Matemática afim de melhorar a qualidade das práticas de ensino, despertar nos alunos interesse por este conhecimento e alcançar uma Educação para a formação do aluno para o exercício da cidadania. Com o olhar para o Ensino Básico e para Formação de Professores que ensinam Matemática para este ciclo, almeja-se uma Educação voltada para a cidadania conforme a proposta pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, ou seja, uma Educação que capacite o indivíduo a: trabalhar com dignidade, melhorar sua qualidade de vida e de sua comunidade, tomar decisões de forma pessoal e clara, continuando a aprender mesmo fora da escola e entendendo seu lugar no mundo e nas diversas comunidades ao qual faz parte.

A partir de aulas e propostas voltadas para temas políticos, sociais e/ou culturais vivenciados pelos alunos e/ou por suas comunidades, utilizando a Matemática como campo fundamental para compreensão e estudo destes temas e tendo o aluno como centro deste processo, tem-se uma possível alternativa para dar sentido às aulas da disciplina. A pesquisa a qual esse artigo se insere, que se refere ao Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “Ensino de Matemática e a Formação para a Cidadania: Estratégias de Sala de Aula” (EIGLMEIER NETO, 2018), objetivou analisar atividades, propostas ou ideias que relacionem a Matemática com a Educação voltada para a formação dos alunos para o exercício da cidadania, ou seja, fez-se uma análise de possibilidades para o ensino de Matemática, tanto no Ensino Básico, quanto no processo de Formação de Professores, que apresentassem relação direta a uma Educação que tenha como foco a formação do cidadão, analisando cada proposta à luz da Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2001; 2012).

O aluno e o professor então, seguindo as ideias da Educação Matemática Crítica (EMC), devem possuir uma competência crítica, ou seja, questionar o processo de aprendizagem sempre que necessário, principalmente o aluno, em vista que este

está no centro deste processo e os conteúdos devem ser relacionados à sua realidade, valorizando as experiências vividas pelo estudante. Para Skovsmose (2001) a EMC propõe mudanças sobre o atual sistema de ensino e para cada tema abordado deve-se haver uma reflexão sobre alguns pontos: a aplicabilidade real do assunto; os interesses envolvidos pelo assunto; quais questões e problemas geram os conceitos e resultados na Matemática; qual função social pode ter o assunto; e a relevância do assunto.

Tendo essas perspectivas, decidiu-se por realizar uma busca entre os trabalhos apresentados nas últimas duas edições dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM) e dos Seminários Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), cujos Anais estão disponíveis no site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Para o levantamento dos trabalhos nos Anais do XII ENEM (2016), XI ENEM (2013), VI SIPEM (2015) e V SIPEM (2012) foram utilizadas as seguintes palavras-chave: Político, Sócio, Cultural e Crítica. Foram encontrados 79 artigos. Após a leitura destes trabalhos, foram selecionados 18 artigos que de alguma forma traziam ideias, através de estratégias em sala de aula ou conceitos referentes a uma Educação voltada para a formação do cidadão, sendo analisados sob o olhar da EMC. Vale ressaltar que os 18 trabalhos selecionados são decorrentes do ENEM.

Os artigos selecionados foram organizados por níveis de ensino, sendo: Ensino Fundamental I (1º ao 5º ano); Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano); Ensino Médio e Formação de Professores. Cabe ressaltar que em Formação de Professores foram inseridos os artigos que envolviam tanto as propostas de formação inicial como as de formação continuada. Após essa organização, os artigos foram analisados de forma a contemplar os seguintes pontos: autonomia; contextualização do tema; conscientização por parte dos alunos; reflexão sobre o tema e sobre a Matemática inserida a cada proposta de ensino.

Optou-se para esse artigo, apresentar um conceito, resumidamente, sobre EMC, uma análise e apresentação dos resultados obtidos na pesquisa ao qual esse artigo se origina e exemplificar através de uma das propostas em conformidade com os pontos analisados, que é o trabalho de Santos Cavalcante e Luiz Cavalvante em “Educação Matemática crítica: uma aplicação em sala de aula utilizando-se de situações problematizadoras como recurso na proposição, formulação e exploração de problemas matemáticos” de 2013, através de duas atividades. Essas atividades, trazem como conceitos fundamentais para a formação para cidadania, a autonomia através da valorização das falas e decisões dos alunos para sequência da aula, conhecimento e compreensão de temas relacionados a nossa sociedade enquanto país e mundo, além de tratar, na segunda atividade, um tema abordando qualidade de vida. Vale ressaltar que as atividades em questão estão baseadas na Educação Matemática Crítica e valorizam a cada momento a reflexão sobre o tema apresentado e a Matemática a ser aplicada. É proposto pelos autores a leitura de um texto comparando uma ponte de 2,9 km construída no Brasil, com gasto de 1,16 bilhões e outra de 42 km construída na China, com gasto de 2,4 bilhões. Após a leitura, questionou-se aos alunos sobre o que o texto falava, o que ele trazia de importante e como poderíamos fazer para que nosso dinheiro não fosse tão desperdiçado, neste primeiro momento refletindo-se sobre o tema. A aula então seguiu através de comentários dos alunos, assim levando o professor a questioná-los em como a Matemática poderia ajudá-los para entender o problema, valorizando cada fala dos alunos, diversos problemas e conceitos matemáticos surgiram, neste momento refletindo-se sobre a Matemática proposta e utilizado, sempre considerando as falas dos alunos como meio para construção da aula de Matemática.

As atividades da referida proposta trazem como conceitos fundamentais para a formação para a cidadania, a autonomia por meio da valorização das falas e decisões dos alunos para a sequência da aula, conhecimento e compreensão de temas relacionados à sociedade enquanto país e mundo, além de tratar, na segunda atividade, de um tema abordando qualidade de vida.

Esta segunda atividade valoriza uma reflexão mais voltada para o lado humano, o professor propôs a leitura de um texto, contendo a informação de que em determinada cadeia, 85 presos ocupam uma cela destinada a 12 pessoas. Após a leitura, segundo os autores do artigo, iniciou-se um debate sobre o tema, onde novamente toda fala foi e deve ser valorizada. Apesar de alguns alunos concordarem com uma visão de que os presos mereciam sofrer, uma indagação mudou o rumo da aula, um aluno colocou que a intervenção criminosa dos presidiários nem sempre é questão de escolha, mas sim de falta de oportunidade. Aproveitando esta fala o professor questionou os alunos sobre se um ser humano merece passar por tanto sofrimento, mesmo sendo um presidiário e se aqueles maus tratos e más condições sanitárias e de saúde colaborariam para o presidiário retornar para a sociedade como um indivíduo melhor. Neste ponto é valorizada a reflexão sobre o tema, após breve diálogo e apresentação de leis referentes a celas e presídios no Brasil, os alunos utilizaram a Matemática para entender e dar significados aqueles dados e entender melhor a situação daquele presídio, neste momento valorizando uma reflexão sobre a Matemática.

Ao final detectou-se que, em muitos casos, as atividades propõem aulas que desenvolvam a autonomia, o senso crítico e a conscientização do papel do aluno na comunidade ao qual faz parte. Pode-se observar a Matemática como área fundamental para se alcançar uma Educação que vise a transformação e ascensão social, sendo possível conciliar a Matemática e suas aulas para alcançar uma Educação destinada à formação do cidadão.

Referências:

CAVALCANTE, N. I. S.; CAVALCANTE, J. L. **Educação matemática crítica: uma aplicação em sala de aula utilizando-se de situações problematizadoras como recurso na proposição, formulação e exploração de problemas matemáticos.** IN. Anais XI ENEM, Curitiba, 2013.

Eiglmeier Neto, O. **Ensino de Matemática e a Formação para a Cidadania: Estratégias de Sala de Aula**. Trabalho de Conclusão de Curso de Matemática. UFPR: Curitiba-PR, 2018.

SKOVSMOSE, O. **Ole Skovsmose e a sua Educação Matemática Crítica.** RPEM, Campo Mourão, v.1, n.1, p. 9-20. jul-dez. 2012. Entrevista.

_____. **Educação Matemática Crítica a Questão da Democrácia.** 6ª ed. Campinas: Papirus, 2001

Brincando de Matemático e Um Dia na Matemática: a experiência do PET Matemática na divulgação do conhecimento científico e do ambiente acadêmico para alunos do ensino médio

Bianca Elena Wiltuschnig*, Gabriel Alves de Lima*, Gabriel Felipe Dalla Stella*, Gustavo Henrique Silva Sarturi*, João Antonio Francisconi Lubanco Thomé*, Lais Gabrielle Barboza Maciel*, Letícia do Rocio Oliveira*, Letícia Ferreira Gomes*, Lucas Nacif Giacomin*, Luiz Henrique Lara dos Santos*, Marcel Thadeu de Abreu e Souza*, Matheus Daniel Galvão de Melo*, Nelson Ivo de Souza Ferreira*, Rogério Otávio Mainardes da Silva*, Vinicius Medeiros Prantl dos Santos*, Vitor Emanuel Gulisz *
Matemática - UFPR
petmatufpr@gmail.com

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
zeca77@gmail.com

Palavras-chave: Brincando de Matemático, Extensão universitária, Divulgação científica.

Resumo

O "Brincando de Matemático" é uma das atividades de extensão desenvolvidas pelo PET-Matemática desde 2005. O objetivo do evento é desenvolver junto aos alunos um tema que possa enriquecer sua formação matemática e ao mesmo tempo propiciar-lhe um contato direto com o ambiente acadêmico. Para isso, são ofertadas um conjunto de aulas e, ao final de cada dia, são realizadas brincadeiras que fixam o conteúdo matemático aprendido. Para não prejudicar o período letivo dos estudantes, o evento ocorre durante quatro dias no mês de julho (férias escolares). As aulas são elaboradas pelos petianos, bem como o material didático utilizado na atividade, o qual

*Membros do Programa PET-Matemática.

consiste de apostila e outros equipamentos necessários para o desenvolvimento do tema. O conteúdo escrito passa por uma cuidadosa revisão de uma equipe formada por alunos do PET e pelo tutor do grupo. Também é oferecido um lanche aos alunos, visando proporcionar aos participantes uma maior convivência dentro do espaço da Universidade. O “Brincando de Matemático” constitui-se em uma experiência especial tanto para o PET quanto para os alunos atendidos, já que promove um ambiente adequado para o desenvolvimento daqueles que apresentam um interesse maior pela matéria, e ao mesmo tempo divulga ideias matemáticas sofisticadas em uma linguagem mais acessível. Esta atividade aumentou a visibilidade do curso de Matemática entre os alunos dos estabelecimentos de ensino de Curitiba e Região Metropolitana. A experiência do grupo nessa atividade nos inspirou a buscar alunos do ensino médio para um novo projeto de divulgação do curso de Matemática, intitulado “Um dia na Matemática”. Este evento de extensão, cuja primeira edição ocorreu em 2016, acontece uma semana antes do início das inscrições para o vestibular da UFPR. O evento consiste em um ciclo de palestras e momentos de tira-dúvidas oferecidos por professores do Departamento de Matemática e petianos, com o intuito de oferecer aos estudantes do 3º ano do ensino médio uma oportunidade de “imersão universitária”. Nosso objetivo é que o aluno interessado em Matemática possa conhecer melhor o ambiente acadêmico da UFPR, especialmente o âmbito do curso de Matemática. Após a realização deste evento, pudemos notar um sensível aumento na procura pelo curso de Matemática no vestibular da UFPR. Sendo assim, percebemos que estas são atividades que incentivam o estudante dos últimos anos do ensino básico a conhecer melhor o que a UFPR tem a oferecer e, portanto, ajudam a Universidade a cumprir melhor seu papel de difusora de conhecimento.

POTI e OPRM: contribuindo para a difusão do conhecimento matemático para alunos de ensino fundamental e médio

Bianca E. Wiltuschnig*, Gabriel A. Lima*, Gabriel F. D. Stella*, Gustavo H. S. Sarturi*, João A. F. L. Thomé*, Lais G. B. Maciel*, Letícia F. Gomes*, Letícia R. Oliveira*, Lucas N. Giacomin*, Marcel T. A. Souza*, Matheus D. G. Melo*, Nelson I. S. Ferreira*, Vinicius M. P. Santos *

Matemática - UFPR

petmatufpr@gmail.com

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam (Orientador)

Departamento de Matemática - UFPR

eidam@ufpr.br

Palavras-chave: Matemática, Olimpíadas, Treinamento.

Resumo: Com o intuito de oferecer um treinamento de qualidade para os estudantes de Curitiba e Região Metropolitana que desejam participar de Olimpíadas Matemáticas em geral, alguns professores do Departamento de Matemática da UFPR iniciaram em 2016 um Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI), nos mesmos moldes de outros polos que já funcionam em outras localidades brasileiras. Esta iniciativa é apoiada pela SBM – Sociedade Brasileira de Matemática e pelo IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Iremos retratar a experiência do PET-Matemática no POTI, cujas aulas ocorrem aos sábados pela manhã. Os alunos são divididos em 3 níveis, Nível 1: 6º e 7º anos, Nível 2: 8º e 9º anos e Nível 3: Ensino Médio. O material didático é fornecido pelo IMPA e pela OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática e pode ser acessado via internet livremente. Qualquer aluno da rede pública ou privada pode participar do POTI, sendo que as inscrições são online. O número de alunos inscritos vem aumentando pois, ano passado tivemos cerca de 400 alunos inscritos, já este ano, tivemos aproximadamente 500. O material a ser trabalhado é dividido em disciplinas adequadas em cada nível e o polo conta com a participação de professores voluntários, entre eles, alunos do PET-Matemática, alunos e ex-alunos do Curso de Matemática (atuais professores de Ensino Fundamental). Esta atividade é registrada no SIGEU como curso de extensão e conta horas formativas para todos os estudantes de graduação envolvidos. Os alunos que recebem o treinamento participam periodicamente de simulados a fim de verificar seus conhecimentos e mensurar de maneira

*Bolsistas do Programa PET-Matemática

mais efetiva o conhecimento matemático que estão retendo. A OPRM - Olimpíada Paranaense de Matemática é uma competição matemática organizada e concebida por docentes do Departamento de Matemática e visa incentivar e estimular os estudantes paranaenses ao estudo da Matemática através de problemas desafiadores e instigantes, promovendo uma integração bastante saudável da UFPR (através do Departamento de Matemática) com a Escola Básica. O POTI impacta de maneira muito profunda a dinâmica da participação dos estudantes na OPRM, uma vez que permite que o conteúdo explorado neste tipo de competição fique mais próximo do cotidiano do estudante. A OPRM teve sua 1a edição em 2016 e está, este ano, em sua 3ª edição. Neste ano a prova da 1ª fase da OPRM conteve, aproximadamente, um número de 11900 alunos inscritos, de todo o Estado do Paraná, sendo que, desses, 357 foram selecionados para a 2ª fase. Estes projetos são coordenados pelos Professores Diego Otero e José Carlos Eidam, do DMAT-UFPR.

EXPLORANDO A GEOMETRIA NO CENTRO HISTÓRICO DE PARANAGUÁ – UMA PRÁXIS INTERDISCIPLINAR

Stephany de Oliveira Theodoro[1]
Licenciatura em Matemática – Unespar
stephany.oliveiratheo@gmail.com

Profª MS Cristienne do Rocio de Mello Maron (Orientadora)
Departamento de Matemática – Unespar
cristienne.maron@unespar.edu.br

Palavras-chave: Interdisciplinaridade, Geometria, História.

Resumo:

Esta pesquisa tem como objetivo discutir o tema interdisciplinaridade e propor um caminho possível para o trabalho docente na educação básica. Buscou-se uma aproximação de dois campos de conhecimento aparentemente distintos e desconexos, as Ciências Exatas e Humanas, mas que tendo um objetivo comum traz sentido a esta justaposição, neste caso, o conhecimento não fragmentado. Essa dinâmica pedagógica propõe que a interdisciplinaridade não seja meramente um fim, mas um caminho possível a todas as disciplinas, para um olhar às problemáticas de cada campo. Este trabalho surge do interesse pela aproximação da Matemática e da História - buscando trabalhar a interdisciplinaridade como caminho para a compreensão mais significativa de temas como: a geometria no cotidiano, educação patrimonial, memória e identidade. A proposta é analisar a arquitetura do Centro Histórico de Paranaguá com um olhar mais atento aos elementos geométricos presentes nas construções, movimento arquitetônico e contexto histórico de cada edificação. A prática iniciou-se com uma aula de campo, com alunos do sétimo ano do ensino fundamental do Colégio Estadual Helena Viana Sundin, visando analisar as edificações históricas da cidade e em seguida relacionar os elementos geométricos observados nestas edificações com as construções geométricas baseadas nestes elementos.

A aula de campo inicia com o trajeto do colégio Helena Viana Sundin ao Centro Histórico da cidade, feito com os alunos a pé. Antes de sairmos do colégio, pedimos que os alunos observassem com atenção os detalhes das construções e os elementos geométricos que encontrassem, registrando as imagens que achassem relevantes. A primeira parada, foi na praça Rosa Andrade, também conhecida como praça do Guincho, antiga instalação do porto de Paranaguá. Em seguida, seguimos pela Rua da Praia, passando pelos casarões que fazem parte da identidade de nossa cidade. A rota segue então em direção ao palacete Mathias Bohn, Mercado do Artesanato e Mercado do Café, finalizando com parada nas escadarias em frente ao relevo de Emir Roth, renomado artista paranaense. Em cada pausa ocorre a observação da arquitetura, relatando um breve contexto histórico sobre cada

[1] Voluntária do Programa PIC Unespar.

construção, dando ênfase para os elementos geométricos (em especial os arcos, bem presentes na arquitetura das edificações). No segundo momento desta prática, em sala de aula, foram observados os registros fotográficos feitos pelos alunos e pela autora, atentando aos elementos geométricos encontrados. Logo após, foi feita a construção geométrica dos arcos, já observados em campo.

Figura 1.
Fonte: Autora 2017.

Figura 2.

Fonte: Autora 2017.

Figura 3.

Fonte: Autora 2017.

Referências:

- PASSOS, C. L. B. Representações, interpretações e prática pedagógica: **A Geometria na sala de aula**. 348 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000;
- OLIVEIRA, C. L. de. **Importância do desenho geométrico**. Trabalho de graduação (Licenciatura em Matemática). 8 f. Departamento de Ciências Exatas, Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2005;
- BLOG DO ARQUITETO EDISON ELOY DE SOUZA. **Arquitetura e Geometria**. Não paginado. Disponível em: <http://edisoneloy.blogspot.com/2014/11/arquitetura-e-geometria-jul-2011>. Acesso em 13/10/2018.

GEOMETRIA DO TÁXI: UMA FERRAMENTA PARA CONTEXTUALIZAÇÃO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Viviane Mauricio[1]
Licenciatura em Matemática – UNESPAR
vivmmauricio@gmail.com

Prof. Fernando Yudi Sakaguti (Orientador)
Departamento de Matemática – UNESPAR
fernando.sakaguti@unespar.edu.br

Palavras-chave: Geometria do Táxi, Contextualização, Educação de Jovens e Adultos

Resumo:

Trata-se do resultado de uma pesquisa de Iniciação Científica na qual utilizou-se a Geometria do Táxi, uma geometria considerada não euclidiana visto que a distância entre dois pontos não é dada por uma reta mas sim como o trajeto percorrido de um ponto ao outro dentro de uma malha quadriculada, como uma ferramenta metodológica capaz de interligar e contextualizar conteúdos matemáticos na Educação de Jovens e Adultos. Foi descrita por Krause (1975) em uma concepção educacional, como ferramenta para estudo da geometria, e também como uma geometria de importantes aplicações práticas, razões que levam a considerar sua abordagem nas aulas de matemática da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Fundamenta-se esta pesquisa no que designam as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE) da Rede Pública de ensino do Paraná de 2008 que incluem ao conteúdo estruturante Geometrias, noções básicas de Geometrias não euclidianas, nas Diretrizes curriculares da Educação de Jovens e Adultos que contemplam dos mesmos conteúdos, desde que estes sejam estruturados obedecendo às exigências presentes nesta modalidade de ensino e no que orientam os Parâmetros Curriculares Nacionais no bloco de espaço e forma, que "é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico" (BRASIL, 1998, p. 51). A pesquisa ocorreu no Colégio Estadual Professora Tereza da Silva Ramos em Matinhos – Paraná, em uma turma do ensino médio de matemática nos meses de maio e junho de 2018. Para a pesquisa foram analisados os conteúdos da disciplina trabalhados pelo professor e dados do perfil dos alunos levantados através de um questionário por eles respondido. Após esta análise elaborou-se atividades abordando conceitos da Geometria do Táxi baseando-se nos conteúdos por eles já aprendidos e em seu perfil. Segundo SKOVMOSE (2000),

[1]Voluntário do Programa de Iniciação Científica Unespar

há diferentes tipos de referências que atividades matemáticas podem abordar. Questões que se refiram apenas à matemática, a semi-realidade ou ainda a realidade. Na elaboração das atividades observou-se como é possível abordar inúmeros conteúdos matemáticos relacionando-os e contextualizando-os, seja tratando de situações-problemas de semi-realidade ou de realidade fazendo uso da Geometria do Táxi. As atividades foram aplicadas em quatro aulas (uma noite) cedidas pelo professor regente da turma e com autorização da equipe pedagógica no mês de junho de 2018.

FIGURA 01 – DISTRIBUIÇÃO DOS ALUNOS EM SALA

FONTE: AUTORA 2018

FIGURA 02 – DISTRIBUIÇÃO DOS ALUNOS EM SALA

FONTE: AUTORA 2018

Aplicaram-se cinco atividades em forma de exercícios divididas nos três tipos de referências descritas acima. O objetivo foi relembrar os conteúdos por eles já estudados anteriormente, associá-los entre si e contextualizá-los. Durante a resolução das atividades muitas observações foram feitas pelos alunos. Ao analisar as observações apontadas durante a resolução das atividades, constatou-se que ao abordar uma geometria diferente do habitual os alunos se sentem motivados, o que os leva a uma alta participação em sala. Verificou-se também como esta geometria auxilia no trabalho dos conteúdos matemáticos de uma forma não fragmentada, deixando claro assim aos estudantes a correlação entre os conteúdos. Sua correspondência com meio urbano foi um facilitador no que diz respeito ao dar significado aos conteúdos. Constatou-se também, como esperado, que a Geometria do Táxi pode ser utilizada como uma metodologia aliada contra a fragmentação e abstração dos conteúdos matemáticos.

Referências:

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher. 1974

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

KALEFF,AnaMaria ; NASCIMENTO, Rogério Santos. Atividades Introdutórias às Geometrias Não Euclidianas: o exemplo da Geometria do Taxi, In: **Boletim Gepem**. 2004. Rio deJaneiro. Anais. Rio deJaneiro.

KRAUSE, Eugene.**Taxicab Geometry: anadventure in non EuclideanGeometry**. Nova York:Dover, 1975.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. Matemática. Curitiba: SEED. 2008.

_________. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação de Jovens e Adultos.** Curitiba: SEED. 2006.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, n. 14, p. 66- 91, 2000.

Oficinas integradas de Geografia e Matemática - GEOMAT

Mateus Testoni Carvalho e Yuri Farias Lima
Licenciatura em Geografia e em Matemática – UFSC
testoni.carvalho@outlook.com e yurifarias10297@gmail.com

Profa. Regina Célia Grando (Orientadora)
Departamento de Metodologia de Ensino – UFSC
regrando@yahoo.com.br

Palavras-chave: Interdisciplinaridade, prática docente, educação matemática, educação geográfica.

Resumo:

Atualmente a formação de professores possui um tempo destinado à prática docente somente nos semestres finais da graduação, ocasionando um distanciamento entre a teoria vista nos semestres iniciais e a sala de aula. Sendo assim, depende dos acadêmicos buscarem ferramentas que diminuam tal afastamento.

O GEOMAT, fruto de uma relação interdisciplinar entre alunos dos cursos de Geografia e Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, vem como um complemento à formação de futuros professores, buscando introduzir novas formas de tratar conteúdos curriculares e responder frente às demandas dos novos processos educacionais.

Reunidos por iniciativa própria, os graduandos procuraram a orientação de uma professora do departamento de Metodologia do Ensino do Centro de Ciências da Educação (MEN-CED), que tem como linha de pesquisa a formação de professores, buscando inserir práticas interdisciplinares logo no início da formação docente, tendo o GEOMAT como uma forma de colocar isso em prática.

As instituições de ensino apresentam problemas, tendo a necessidade de se rediscutir o perfil de trabalho de quem educa e das disciplinas escolares. Um exemplo disso é que muitas escolas não conseguem promover ações que articulem o conteúdo com o dia-a-dia dos alunos, sendo estimulados insuficientemente a formarem uma visão global do mundo (GARRUTTI; SANTOS, 2017).

Como uma tentativa de responder as demandas por atividades que façam mais sentido ao dia a dia dos alunos e a integração dos saberes, surge a interdisciplinaridade, cuja abordagem metodológica é capaz de acarretar no desenvolvimento de conhecimentos diferenciados resultantes da relação complementar entre disciplinas, sendo um mecanismo capaz de modificar a estrutura das instituições de ensino, por conseguir correlacionar as necessidades acadêmicas com as da sociedade contemporânea (FORTES, 2017); (GUIMARÃES, 2017).

Tendo em vista o que já foi discutido, o GEOMAT teve como objetivo fazer com que futuros professores vivenciem momentos diferenciados com respeito à prática docente, bem como utilizar a interdisciplinaridade entre Geografia e Matemática, elaborar materiais que abarquem o conteúdo e atividades a serem propostas, e tornar a aprendizagem significativa pelos participantes.

As oficinas integradas foram aplicadas de modo que os conceitos da Geografia são utilizados para tornar a Matemática mais significativa e vice e versa: Introdução ao espaço e localização; Movimentos da Terra, eclipses e cálculos astronômicos; Elementos cartográficos e plano cartesiano; Coordenadas geográficas e fuso horário; Cálculo de distância em mapas com o Teorema de Pitágoras; Cálculo de áreas poligonais com o Teorema de Pick.

Os encontros desenvolvem-se na E.B.M. Donicia Maria da Costa, localizada no bairro Saco Grande, Florianópolis, para os estudantes interessados do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental. Uma vez por semana, as oficinas trataram sobre temas presentes desde o início da formação do indivíduo no âmbito escolar, trabalhando não só aspectos já vistos, totalizando 16 encontros distribuídos ao longo do segundo semestre de 2017.

As reuniões com os alunos foram dadas, inicialmente, por uma apresentação do que seria oferecido no dia, através de explicitação do assunto e desenvolvimento do conteúdo com atividades e jogos para um entendimento lógico. Além disso, oficinas foram reservadas para resgatar conceitos que não foram apropriados pelos discentes.

Os materiais foram fornecidos pela instituição citada, sendo: materiais de escritório, mapas, globos e apostilas referentes aos assuntos que estão sendo explanados no dia da oficina. Além disso, um *feedback* era escrito e verbalizado pelos alunos de como foi a experiência, de modo a fomentar a argumentação do estudante dos pontos fracos e fortes do que estava sendo feito.

A observação dos alunos foi um elemento fundamental para a realização do GEOMAT. Os alunos encararam os oficineiros com um olhar de desconfiança, compactuando com a relação formal existente na sala de aula regular. Contudo, com o passar das semanas, a situação se modificou com os estudantes mostrando-se muito entusiasmados com a dinâmica dos encontros.

Por outro lado, nos *feedback's* aplicados, conquanto a resposta verificada confirmou a percepção descrita no parágrafo anterior, no quesito uso da escrita, notou-se que eles reproduzem a linguagem oral, apresentando erros gramaticais.

Considerando os imprevistos que ocorrem em trabalhos dessa ordem, percebeu-se que para alcançar o resultado esperado das oficinas, que é ampliar a visão dos participantes do mundo que os cerca, é necessário que haja a frequência constante dos alunos, tendo em vista que os conteúdos possuem uma sequência. Isso vai de encontro ao fato de ter havido uma flutuação na participação dos estudantes, com uma média de três alunos por encontro que não necessariamente eram os mesmos, totalizando seis pessoas, às quais restaram apenas duas fixas até o término.

Foi atestado, também, que os participantes apresentaram falta de confiança e também falta de conhecimentos elementares prévios de ambas as ciências para lidar com os temas propostos. Em decorrência deste fato, foi visto que há uma dificuldade em transmitir saberes mais abstratos para eles. Outro ponto de embate é que há uma dificuldade em articular atividades práticas que façam um sentido concreto para os estudantes, porque em nível acadêmico os universitários não são estimulados a desenvolvê-las.

Há, além disso, de se considerar que as produções feitas na academia são muito distantes da realidade que vive um aluno de ensino básico, o que aumenta o desafio de conseguir apresentar alguns aspectos vistos em nível superior de forma entendível. A título de exemplo, a produção de apostilas para que os estudantes pudessem acompanhar o que foi realizado em sala de aula num segundo momento foi de difícil adequação à linguagem que os estudantes pudessem compreender, já que a linguagem matemática é carregada por símbolos próprios e a geográfica por conceitos específicos, o que acarreta numa dificuldade de compreensão, havendo a necessidade de reestruturá-las de forma mais acessível.

Por outro lado, houve participantes engajados que, mesmo com suas dificuldades, procuraram sair do que lhes é proposto tradicionalmente, mesmo tendo como oficineiros profissionais relativamente inexperientes.

O erro foi um elemento do processo, já que os autores tiveram diversas situações não previstas que geraram equívocos, os quais puderam ser trabalhados nas retomadas ou ainda serviu para um aprendizado mútuo dos envolvidos e também para aproximar os participantes dos autores, diminuindo o clima de insegurança. Outro ponto importante é que algumas oficinas foram estendidas além do previsto, havendo a necessidade de readequar constantemente o cronograma.

Com o que foi feito por meio do GEOMAT, é possível afirmar que a interdisciplinaridade pode ser utilizada como instrumento eficaz na prática docente e as oficinas demonstram um grande potencial, podendo serem aplicadas em outras instituições, nesse sentido, o presente trabalho pode servir de exemplo para outros interessados em práticas desse porte. Vale ressaltar que a realização deste trabalho ocorreu voluntariamente (i.e. sem apoio financeiro por parte da UFSC) considerando o tempo livre comum dos oficineiros e, mesmo assim, obteve-se bons resultados como os já citados.

Por fim, deve-se salientar que, para existir uma prática desse porte, do ponto de vista institucional, todas as partes envolvidas no processo educacional devem estar comprometidas, articulando materiais e recursos humanos com o intuito de tornar a relação entre diferentes ciências mais natural desde cedo.

Referências:

FORTES, Clarissa Corrêa. *Interdisciplinaridade: origem, conceito e valor*. Disponível em: <http://www.pos.ajes.edu.br/arquivos/referencial_20120517101727.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2017.

GARRUTTI, É. A; SANTOS, S. R. dos. *A interdisciplinaridade como forma de superar a fragmentação do conhecimento.* Disponível em: <www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/ric/article/download/92/93>. Acesso em: 13 set. 2017.

GUIMARÃES*,* P. B. A importância da interdisciplinaridade no ensino superior universitário no contexto da sociedade do conhecimento. *Vozes dos vales.* n. 9, 17 p. 2016. Disponível em: <http://site.ufvjm.edu.br/revistamultidisciplinar/files/2016/06/Patricia.pdf>. Acesso em: 18 set. 2017.

Geometria & Topologia

Grafos, Topologia e a Fórmula de Mason

Daniel José Schulmeister *
Bacharelado em Matemática Aplicada - UEPG
danielschul18@gmail.com

Prof. Marcos Calçada (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
mcalcada@uepg.br

Palavras-chave: Fórmula de Ganho de Mason, Grafo de Fluxo de Sinal, Matrizes Topológicas.

Resumo:

A fórmula de ganho de Mason é utilizada por engenheiros para obter a função de transferência de um grafo de fluxo de sinal. Tal fórmula possui diversas aplicações em Engenharia e Teoria de Controle.

Como qualquer conjunto de equações lineares pode ser descrito em termos de um grafo de fluxo de sinal, é possível resolver sistemas lineares e calcular determinantes por meio de métodos topológicos. Em essência, trata-se de contar com pesos caminhos e loops em um grafo.

O principal objetivo deste trabalho é introduzir os conceitos e as definições pertinentes que nos permitam entender e provar a fórmula de Mason. Em particular, estudamos a matriz de incidência de um grafo e suas variantes de entrada e saída e a matriz de transmissão, que carrega informação não apenas topológica, mas também dos pesos das arestas. Também procuramos entender a correspondência entre propriedades algébricas dessas matrizes e propriedades topológicas do grafo. Por exemplo, a relação entre submatrizes não-singulares das matrizes anteriores e loops do grafo que não se interceptam.

Outro objetivo é mostrar a aplicação da fórmula de Mason na resolução de problemas envolvendo cadeias de Markov. De fato, cadeias de Markov podem ser vistas como exemplos de sistemas lineares invariantes no tempo, de modo que as técnicas anteriores se aplicam. Em particular, é possível calcular e entender de forma gráfica sistemas estocásticos markovianos.

Referências:

ASH, R.B. Topology and the Solution of Linear Systems. **Journal of Franklin Institute.** Vol. 268, Issue 6, 1959.

*Bolsista PICME.

BRUALDI, R.A. & CVETKOVIC, D. **A Combinatorial Approach to Matrix Theory and its Applications.** CRC Press, 2009.

GREENMAN, J. V. **Graphs and Determimants.** Math. Gazette, 60(1976), 241–246.

GREENMAN, J. V. **Graphs and Markov Chains.** Math. Gazette 60(1976), 49–54.

HOWARD, R.A. **Dynamic Probabilistic Systems. Vol. 1 and 2.** New York: John Wiley & Sons, 1971.

Espaços de Minkowski e a Geometria Hiperbólica

Gabriel Felipe Dalla Stella *
Bacharelado em Matemática - UFPR
gabrielstella28@gmail.com

Prof. Diego Otero (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
otero.ufpr@gmail.com

Palavras-chave: Relatividade Especial, Espaços de Minkowski, Hiperbolóide.

Resumo: A relatividade especial surgiu através da análise de diversos experimentos feitos para verificar a existência do éter luminífero, meio material pelo qual se supôs que a luz se propagava, semelhante às ondas mecânicas. O ponto crucial para o questionamento da existência do éter foi o experimento de Michelson-Morley, onde, devido à precisão das medidas, negava a existência de ventos de éter, pois não existia velocidade relativa entre a Terra e o éter [1]. A partir da interpretação de diversos desses experimentos Einstein postulou os seguintes princípios: (i) As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais; (ii) A velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais. A partir disso, ele obteve diversos resultados de sua teoria chamada de relatividade especial.

A introdução de tais postulados implica diversos fenômenos físicos contraintuitivos, tais como a dilatação do tempo, a contração do espaço, e as transformações de Lorentz, que são maneiras de converter medidas entre referenciais inerciais. Uma afirmação equivalente ao segundo postulado da relatividade especial, que afirma que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais, é que o intervalo de espaço tempo $I = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ é preservado por mudança de referenciais inerciais.

A partir disso temos uma maneira geométrica de descrever a relatividade especial, munindo o espaço $\mathbb{R}^4$, com a forma bilinear $g(u, v) = -u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, teremos o que chamamos de espaço de Minkowski (o espaço $\mathbb{R}^n$ com uma forma bilinear similar à g generaliza o espaço de Minkowski para dimensão $n \geq 2$), e seu grupo de isometrias lineares, chamado de grupo de Lorentz, é composto por mudanças de referenciais inerciais e irão preservar o intervalo de espaço-tempo.

A partir do estudo dos espaços de Minkowski emergiu o estudo do hiperbolóide, superfície equivalente à esfera, em $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, isto é, os hiperbolóides são definidos

*Bolsista do Programa PET-Matemática

como sendo os pontos $x \in \mathbb{R}^3$ tais que $g(x, x) = k$, onde k é uma constante fixada. Estudamos o caso especial em que $k = -1$, onde g induz métrica Riemanniana, e tal métrica faz com que o hiperboloide tenha curvatura negativa constante, o que nos fornece um modelo de geometria hiperbólica. De modo que a superfície seja conexa (por caminhos), e assim podendo definir a distância geodésica entre pontos, nos restringimos somente à folha superior do hiperbolóide.

Com o estudo do grupo de Lorentz , que funciona de maneira análoga às rotações nas esferas, e a partir das geodésicas dadas pelos meridianos do hiperbolóide, é possível obter todas as geodésicas, que são todas intersecções de planos passando pela origem com o hiperbolóide. Além disso obtemos a distância no hiperbolóide dada por $d(x, y) = \cosh^{-1}(-g(x, y))$, onde g é a métrica no espaço de Minkowski.

Essa superfície nos permite também contrastar com teorema de Hilbert que diz que não existe superfície com curvatura negativa constante completa imersa isometricamente em $\mathbb{R}^3$, com a métrica usual, mas em $(\mathbb{R}^3, g)$, o hiperbolóide é uma superfície completa com curvatura negativa constante.

Referências

[1] DECAEN, C. A. **Aristotle's Aether and Contemporary Science**. The Thomist: A Speculative Quarterly Review, Santa Paula, v. 68, n. 3, p. 375 - 429, jul. 2004.

[2] O'NEILL, B. **Semi-Remannian Geometry**. Londres: Academic Press, 1983.

[3] SOLHEIM, Z. S. L. **The hyperboloid model of hyperbolic geometry**. Tese (Mestrado em Ciência) - Mathematics Department, Eastern Washington University, Cheney, 2012.

[4] SCHUTZ, B. **A First Course in General Relativity**. Nova Iorque: Cambridge University Press, 2009.

Curvas no Espaço de Minkowski

João Vitor Parada Poletto *
Licenciatura em Física - UFPR
jvppoletto@gmail.com

Prof. Dr. Rodrigo R. Montes e Prof. Dr. Hudson do N. Lima (orientadores)
Departamento de Matemática - UFPR
ristow@ufpr.br e hudsonlima@ufpr.br

Palavras-chave: Curvas, Espaço de Minkowski, Aplicações na Relatividade Especial.

Resumo

Uma das aplicações do estudo das curvas no espaço de Minkowski é na teoria da relatividade especial. Pode-se associar determinadas curvas às trajetórias das partículas materiais ou das partículas do tipo luz, por exemplo. Neste trabalho é discutido como é feita a definição de curvas neste espaço, além da comparação com curvas no espaço euclidiano. Outrossim, é possível dar interpretações físicas a alguns resultados obtidos. A partir desse contexto, o objetivo do trabalho é a apresentação dessas definições e comparações e mostrar o teorema das equações de Frenet no espaço de Minkowski.

Inicialmente, podemos comentar sobre as dimensões do espaço newtoniano (isométrico ao $\mathbb{R}^3$) e do espaço-tempo newtoniano. No primeiro, as três dimensões são espaciais, enquanto que no segundo, além das três dimensões espaciais, existe uma quarta dimensão perpendicular, que representa o tempo. Assim, no espaço-tempo newtoniano tem-se um espaço quadrimensional, onde as dimensões são independentes entre si. O espaço-tempo de Minkowski é semelhante, porém, nele existe uma dependência entre as quatro dimensões.

A fim de visualizarmos melhor os resultados, consideramos duas dimensões espaciais (plano) e uma dimensão temporal. Dessa maneira, definimos o $\mathbb{R}^3_1$ como o espaço que é usualmente o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consistindo de vetores $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, mas munido do produto interno $\langle X, Y\rangle_1 = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Esse espaço é chamado de espaço de Minkowski ou espaço de Lorentz, onde os vetores tangentes são definidos da mesma forma que no espaço euclidiano. Nesse espaço um vetor X é dito:

- tipo-espaço, se $\langle X, X\rangle_1 > 0$
- tipo-tempo, se $\langle X, X\rangle_1 < 0$
- tipo-luz, se $\langle X, X\rangle_1 = 0$, mas $X \neq 0$

*Bolsista do PICME

Dessa maneira, definimos o cone de luz como o conjunto de todos os vetores tipo-luz.

Na física, geralmente se toma a coordenada temporal como "$\underline{c}t$", onde "$\underline{c}$" representa a velocidade da luz e "t" o tempo. Assim, no caso de um vetor tipo-luz, tem-se que : $\underline{c}^2t^2 = {x_2}^2 + {x_3}^2$, se x_1 representar a coordenada temporal.

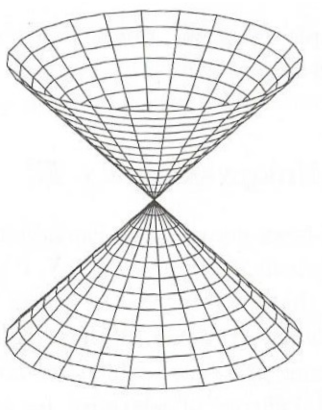


Figura 1: Cone de luz no espaço de Minkowski

Uma partícula que se move no espaço de Minkowski é definida como uma curva $c : I \to \mathbb{R}^3_1$. Além disso, nesse espaço, uma curva regular é definida de acordo com o seu vetor tangente, isto é, a curva pode ser tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz.

Um dos postulados da relatividade afirma que não existem velocidades superiores a da luz, portanto, as curvas do tipo-tempo são as únicas que podem representar alguma partícula material, ou seja, os vetores tangentes a essas curvas sempre estão dentro do cone de luz. Sendo assim, podemos mencionar os "eventos" que, no espaço de Minkowski, são tratados como pontos. Em relação a um dado referencial, a projeção desses pontos nas dimensões espaciais indicam a posição dos eventos, e a projeção dos pontos na dimensão temporal indica o tempo em que esses eventos ocorrem.

Por fim, o trabalho mostra um lema que diz que toda curva tipo-espaço ou tipo-tempo pode ser parametrizada pelo comprimento do arco, ou seja, $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle_1 = \pm 1$. Além disso, pode ser definido o referencial de Frenet para este espaço, que consiste numa base ortonormal, onde $e_1 = \dot{c}$, $e_2 = \dfrac{\ddot{c}}{\sqrt{|\langle \ddot{c}, \ddot{c} \rangle|_1}}$ e $e_3 = e_1 \times e_2$, semelhante a como é definido no $\mathbb{R}^3$. A diferença é que tem-se $\epsilon, \eta \in \{1, -1\}$ com $\langle e_1, e_1 \rangle_1 = \epsilon$, $\langle e_2, e_2 \rangle_1 = \eta$ e, consequentemente, $\langle e_3, e_3 \rangle_1 = \epsilon\eta$. Assim, um vetor indica uma direção negativa no eixo de coordenadas, enquanto os outros vetores indicam direções positivas. Com esse referencial, pode-se provar as equações de Frenet no espaço de Minkowski:

$$\begin{pmatrix} {e_1}' \\ {e_2}' \\ {e_3}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\eta & 0 \\ -\kappa\epsilon & 0 & -\tau\epsilon\eta \\ 0 & -\tau\eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

onde as quantidades κ e τ, chamadas *curvatura* e *torção*, são definidas pelas seguintes equações:

$$\kappa = \langle {e_1}', e_2 \rangle_1 \text{ e } \tau = \langle {e_2}', e_3 \rangle_1.$$

Referências:

[1]WOLFGANG, K. **Differential Geometry:** Curves - Surfaces - Manifolds. Providence: AMS, 2006.

[2]O'NEIL, B. **Semi-Riemannian Geometry:** With Applications to Relativity. San Diego: Academic Press, 1983.

[3]CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[4]TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. São Paulo: Blucher, 2008.

Passeios Aleatórios sobre Grafos e Circuitos Elétricos

Luna Rhaine Nascimento Oliveira *
Bacharelado em Física - UEPG
lunarhaineoliveira@gmail.com

Prof. Marcos Calçada (Orientador)
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG
mcalcada@uepg.br

Palavras-chave: Passeio Aleatório, Difusão, Circuitos Elétricos, Problema de Dirichlet, Cadeias de Markov.

Resumo:

Os passeios aleatórios ou *random walks* formam uma classe de processos estocásticos bastante estudada em virtude de sua simplicidade e do grande número de aplicações, como por exemplo na matemática financeira, no movimento de uma molécula em um gás, em circuitos elétricos, entre outros. Neste trabalho estamos interessados em passeios aleatórios sobre grafos com um número finito de vértices ou nós e em suas relações com circuitos elétricos. Por causa disso, podemos fazer uso da teoria de cadeias de Markov com um número finito de estados.

As cadeias de Markov podem ser vistas como um processo de difusão sobre um grafo. A hipótese markoviana afirma que apenas o último estado ocupado é relevante para a determinação do próximo estado ocupado [1]. De fato, temos definido um laplaciano sobre o grafo e a lei de evolução da cadeia de Markov pode ser entendida como uma espécie de equação do calor (discreta). Dessa forma, também existe uma conexão com circuitos elétricos resistivos.

Um problema importante no estudo de passeios aleatórios é calcular a probabilidade de um caminhante atingir um determinado estado absorvente antes de atingir outro estado absorvente, sendo que ele começou seu passeio em um estado não-absorvente. Essa quantidade é dada pela função probabilidade. Um exemplo de passeio aleatório é dado na Figura 1. Por outro lado, um problema importante na teoria de circuitos elétricos é determinar as voltagens de um circuito elétrico, ou seja, o potencial de voltagem em cada vértice. Temos por objetivo mostrar que esses dois problemas estão relacionados matematicamente. Para isso estudamos a formulação matemática dos dois problemas em termos de grafos, de modo que concluímos que tanto a função probabilidade quanto o potencial elétrico de um nó são funções harmônicas e ainda constatamos que essas quantidades são iguais [2].

*Bolsista PICME.

Figura 1: Exemplo de passeio aleatório linear com $N+1$ estados.

Outra questão estudada neste trabalho é a relação entre estados estacionários da cadeia de Markov e a topologia do grafo [3]. Procuramos formular nossos problemas em termos da matriz laplaciano, a qual é construída a partir da matriz de incidência, que contém informações sobre a topologia do grafo (que representa o passeio aleatório) ou do circuito, e de uma matriz peso, que carrega informação sobre as condutâncias no caso dos circuitos elétricos e probabilidades de transição no caso de passeios aleatórios. Com efeito, algumas das questões estudadas podem ser formuladas como um problema de Dirichlet (discreto) envolvendo esse laplaciano.

Referências:

[1] HOWARD, R.A. **Dynamic Probabilistic Systems. Vol. 1 and 2.** New York: John Wiley & Sons, 1971.

[2] DOYLE, P. G. ; SNELL, J.L. **Random Walks and Electrical Networks.** GNU FDL, 2006. (https://math.dartmouth.edu/ doyle/docs/walks/walks.pdf).

[3] BRUALDI, R.A. ; CVETKOVIC, D. **A Combinatorial Approach to Matrix Theory and its Applications.** CRC Press, 2009.

Otimização

Newton Modificado usando Busca Linear Inexata

Fillipe Rafael Bianek Pierin *
Bacharelado em Matemática - UFPR
bianekpierin@gmail.com

Prof. Abel Soares Siqueira (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
abel.s.siqueira@gmail.com

Palavras-chave: Otimização, Newton Modificado, Busca Linear Inexata.

Resumo:

A otimização é uma vertente da matemática para resolução de problemas, onde buscamos encontrar uma opção menos custosa dentre as disponíveis. Essa opção é chamada de minimizadores e maximizadores de uma função objetivo do problema em que se esteja analisando. Problemas de otimização podem ou não possuir restrições, da modelagem. Neste projeto discutimos o método de Newton e a sua modificação Newton Modificado, para problemas irrestritos.

O problema de minimização irrestrita consiste em

$$\min_x f(x),$$

em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com $f \in C^2$.

O objetivo deste projeto é entendermos o método de Newton, a busca linear inexata de Armijo e os motivos que levam a fazer mudanças no método de Newton para resolver diferentes tipos de problemas. Em seguida, fazemos a comparação do método de Newton Modificado com busca de Armijo com outros métodos:

- Newton "puro" vs Newton Modificado;
- Newton Modificado vs BFGS[1] com busca de Armijo;
- Newton Modificado com diferentes estratégias de atualização.

O método de Newton para o caso irrestrito é um método de otimização baseado na linearização da condição de otimalidade. Tem-se três variações deste método: Newton "puro", onde fixa-se $t_k = 1, \forall k \in \mathbb{N}$, uma em que fazemos busca exata, e outra

*Iniciação Científica.

[1] O nome do método BFGS, é uma sigla, que tem referência aos nomes dos criadores do método: Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno.

para busca inexata. Encontramos a direção d^k do método de Newton resolvendo o sistema.

$$\nabla^2 f(x^k)d^k = -\nabla f(x^k)$$

Em posse da direção, fazemos a busca na direção d^k. Neste projeto a busca inexata é feita pela condição de Armijo, em que se varia o parâmetro t_k para obter

$$f(x^k + t_k d^k) < f(x^k) + \alpha_k t_k \nabla^2 f(x^k)^T d^k,$$

onde $\alpha \in (0,1)$ é o parâmetro de Armijo e $t_k \in (0,1]$. Fazemos essa busca através do *backtracking*, em que encontramos a menor potência $t_k = \sigma^p, p = 0, \ldots, n$ que satisfaça a condição de Armijo.

A busca de Armijo com $backtracking$ só funciona se a matriz Hessiana $\nabla^2 f(x^k)$ for definida positiva. Para escapar desse problema, sugerimos a modificação da Hessiana $\nabla^2 f(x^k)$ por $B_k = \nabla^2 f(x^k) + \rho_k I$, com $\rho_k \geq 0$ escolhido de forma que B_k seja definida positiva. Esse método é chamado de método de Newton modificado.

Neste projeto buscamos encontrar ρ_k, que além de tornar a Hessiana definida positiva no método de Newton, melhore o desempenho do método de Newton Modificado tornando-o mais eficiente em termos de tempo para encontrar o minimizador e a quantidade de iterações para tal minimização.

No método de Newton Modificado, uma maneira para verificar se a matriz B_k é definida positiva, é usando a decomposição de Cholesky, pois esta só existe se a matriz é definida positiva. Neste projeto também implementamos a decomposição de Cholesky.

Referências:

RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. **Otimização Contínua: aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES V. L. d. R. **Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Markon Books Brasil, 1997.

WRIGHT, S.; NOCEDAL, J. **Numerical optimization**. Springer Science, v. 35, n 67-68, p. 7, 1999.

Redes Neurais e Deep Learning: CNN Aplicada na Transformada de Hough

Gustavo Cordeiro Libel*
Engenharia de Computação - UTFPR
gustavolibel@alunos.utfpr.edu.br

Prof. Dr. Francisco Ganacim (Orientador)
Departamento Acadêmico de Matemática - UTFPR
ganacim@utfpr.edu.br

Palavras-chave: redes neurais, otimização, machine learning, deep learning, transformada de Hough.

Resumo:
As Redes Neurais Artificiais ou *Artificial Neural Networks* (ANNs) são modelos de classificação ou regressão baseados nas redes neurais biológicas. As Redes Neurais são alguns dentre os métodos mais conhecidos no universo de *Machine Learning*. As Figuras 1 e 2 ilustram o modelo de uma rede.

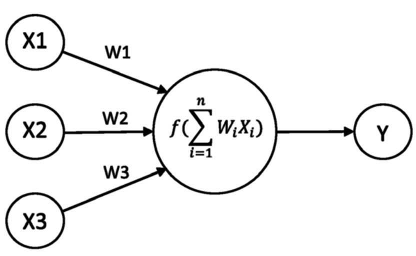


Figura 1: Modelo dos Neurônios

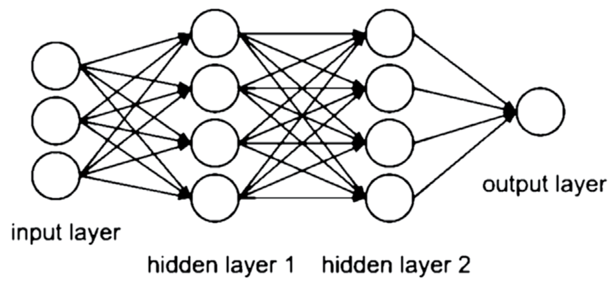


Figura 2: Estrutura em Camadas

Rede Neural Artificial

O *pipeline* tradicional de aprendizado de máquinas supervisionado consiste em:

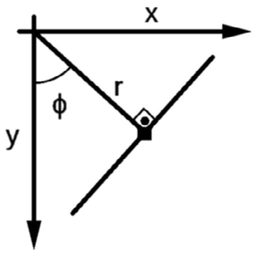
- Extrair *features* de modo específico para o problema.
- Treinar um método de classificação a partir de dados rotulados.
- Extrair as mesmas *features* de uma amostra de teste para classificá-la pelo método treinado anteriormente.

*Bolsista do Programa PICME.

Deep Learning ou Aprendizagem Profunda é uma abordagem atribuída a modelos que não apenas treinam como no *pipeline* tradicional, como também as *features* são aprendidas a partir dos dados. São modelos de elevado grau de complexidade por possuírem várias camadas na sua estrutura.

A Transformada de Hough é utilizada na detecção de linhas numa imagem. A transformada analisa todas as linhas possíveis de uma imagem na forma (ϕ, r).

$$\begin{aligned} r &= xsin(\phi) + ycos(\phi) \\ r &\in \left[-\sqrt{M^2+N^2}, \sqrt{M^2+N^2}\right] \\ \phi &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$



Sendo que M e N representam a altura e a largura da imagem original respectivamente. As retas são adicionadas numa matriz de votação com eixos (ϕ, r) como indicado na Figura 3 que foi gerada pela Figura 4. Dado a matriz de votação o problema passa a identificar os pontos ou picos que representam uma reta na imagem original.

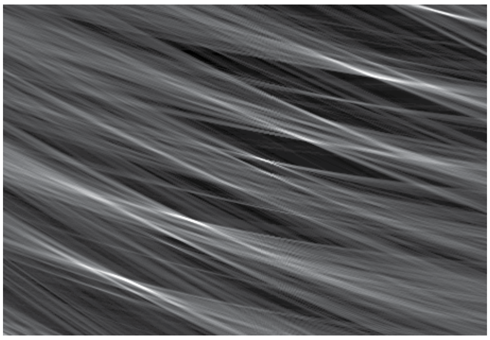


Figura 3: Matriz de Votação

Figura 4: Imagem Original

Transformada de Hough

Utilizamos uma Rede Neural Convolucional ou *Convolutional Neural Network* (CNN), que é um modelo de *Deep Learning*, para a detecção de picos na transformada. A rede surgiu de estudos sobre córtex cerebral e é muito utilizada na área de visão computacional para detecção de padrões em imagens.

O modelo foi treinado e testado utilizando um gerador de imagens. Para uma validação final utilizamos uma imagem real comparando com outros processos.

Referências:

1. NIELSEN, M. A. **Neural Networks and Deep Learning**. Determination Press, 2015.

2. GÉRON, A. **Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn and TensorFlow**. O'Reilly, 2017.

3. LIMA, E. L. **Curso de análise**. 9ed. IMPA, 2006.

Método de Newton Inexato

Miriane Souza Bueno
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
marianeb4@hotmail.com

Prof. Abel Siqueira
Departamento de Matemática - UFPR
abelsiqueira@ufpr.br

Palavras-chave: Metodo, minimizar, inexato.

Resumo:

Um método famoso e muito eficiente para minimização de funções é o Método de Newton. Porém, para alguns casos o método não pode ser aplicado, como por exemplo quando a Hessiana da função que quero minimizar não é definida positiva. O objetivo do método de Newton Inexato é manter a eficiência de convergência do método de Newton, mas tratar essas situações.

O método de Newton Inexato consiste em resolver de forma aproximada o sistema:

$$\begin{cases} \nabla^2 f_k p_k = -\nabla f_k \\ x_{k+1} = x_k + t_k p_k \end{cases}$$

em que, consideramos o resíduo:

$$r_k = \nabla^2 f_k p_k + \nabla f_k$$

e encontramos um p_k que satisfaz:

$$||r_k|| \leq \eta_k ||\nabla f_k||,$$

para algum $\eta_k \in [0, \eta]$, com $\eta \in [0, 1)$.

Nesse estudo, para encontrar a direção p_k, utilizamos o método de Gradientes Conjugados com algumas modificações.

Além de mostrar brevemente a construção do Método de Newton Inexato, implementamos o método na linguagem Julia, aplicamos o método nas funções da biblioteca CUTEst e comparamos o desempenho do método com outros métodos que também são utilizados para minimização de função.

Referências:

NOCEDAL, J.; Wright, S. J. Numerical optimization. New York: Springer, 2006.

Atualização da Decomposição LU no Método Simplex

Renan Oclides Domingues
Engenharia Química - UFPR
renan.oclides@hotmail.com

Prof. Abel Soares Siqueira (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
abel.s.siqueira@gmail.com

Palavras-chave: Otimização Linear, Simplex, Atualização LU.

Resumo:

A otimização linear é frequentemente usada para resolver problemas, pois muitas aplicações são bem representadas por modelos lineares de otimização. A minimização de custos, por exemplo, permite maior eficiência na administração de recursos. Esse trabalho estuda o método Simplex Revisado para otimização linear, que foi implementado com atualização Suhl e Suhl da decomposição LU da matriz de variáveis básicas, buscando melhor desempenho computacional.

O modelo de otimização simplifica o problema real, sendo o objetivo minimizar ou maximizar uma função objetivo $z(x)$ que representa a qualidade da escolha. As variáveis de decisão x incluem as escolhas possíveis que influenciam a função objetivo. Essas variáveis são, no geral, limitadas por restrições, como limites físicos ou a disponibilidade de recursos.

Na otimização linear tanto a função objetivo quanto as restrições das variáveis são funções lineares. As restrições dadas por desigualdades, bem como variáveis livres, podem ser convertidas em igualdades pela introdução de variáveis de folga que não alteram a função objetivo. Assim, sem perda de generalidade, utiliza-se a Forma Padrão (1) para problemas de otimização linear,

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & c^T x \\ \text{sujeito a } & Ax = b, \quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $c^T x$ a função objetivo e $Ax = b, x \geq 0$ as restrições.

Pode ser demonstrado que se existe uma solução ótima viável (que minimiza z na região viável) então existe uma solução básica ótima viável, isto é aquelas onde no máximo m variáveis são não nulas, e sua interpretação geométrica são os vértices da região viável. Com isso, para resolver o problema basta encontrar o mínimo entre um número finito de soluções básicas viáveis. O Simplex é caracterizado pela busca entre soluções básicas viáveis sempre reduzindo ou mantendo o valor da função objetivo.

Durante a busca do método Simplex Revisado são resolvidos dois sistemas lineares por iteração, de forma $B^T\lambda = b$ e $Bd = A_q$. A matriz $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ é composta pelas colunas de A relativas as variáveis básicas, que são as m variáveis que podem ser não nulas, e o vetor A_q é a q-ésima coluna da matriz A. A solução desses sistemas corresponde a grande parte do custo computacional do método.

Na busca do Simplex é alterada uma variável básica por iteração, o que corresponde a atualizar B por uma única coluna. Para facilitar a solução dos sistemas com B, uma estratégia clássica é calcular B^{-1} somente na primeira iteração e então atualizar a inversa nas demais iterações.

Outra estratégia é calcular a decomposição $B = LU$ e então resolver $Bd = A_q$ pelos sistemas triangulares $Ly = A_q$ e $Ud = y$. A solução desses sistemas triangulares é feita por substituição direta, sendo assim muito mais eficiente que resolver o sistema original. A dificuldade dessa estratégia é o custo computacional para obter a decomposição LU.

Inicialmente temos $B = LU$, mas na iteração seguinte teremos B_+, que diferencia de B numa coluna p substituída por A_q. Essa relação entre B e B_+ pode ser escrita como

$$B_+ = B + (A_q - Be_p)e_p^T,$$

sendo e_p a p-ésima coluna da matriz identidade. Com isso podemos escrever para B_+ a relação

$$L^{-1}B_+ = R = U + (L^{-1}Aq - Ue_p)e_p^T.$$

A matriz R é triangular superior exceto pela coluna p.

Nesse trabalho foi estudada a atualização de LU proposta por Suhl e Suhl [3] na qual primeiramente é aplicada a permutação P^T deslocando a coluna p para o final da matriz e então são anulados os elementos da linha p, exceto o último, por meio de operações elementares com as linhas $p+1$ até m dadas pela matriz M. Após essas operações, basta aplicar P nas linhas da matriz para obter $\tilde{U} = PM^{-1}RP^T$, que é triangular superior. Todas as etapas da atualização estão ilustradas na Figura 1.

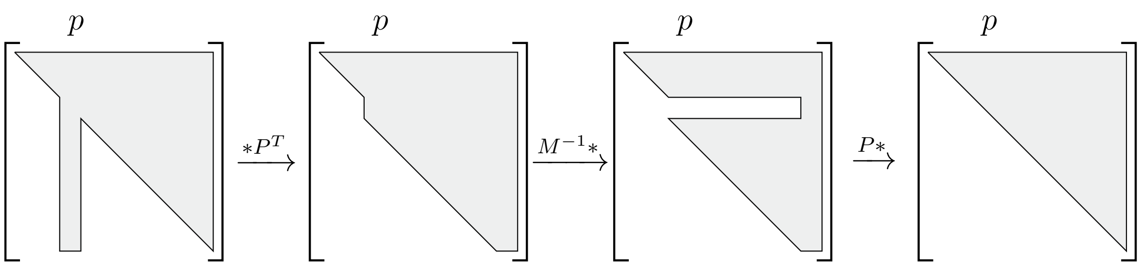


Figura 1: Etapas da atualização da matriz U.

Definindo a matriz $\tilde{L} = PMP^T$, após k atualizações o sistema original $LUd = A_q$ se torna

$$L_kU_kd = LP_1^T\tilde{L}_1\cdots P_{k-1}^T\tilde{L}_{k-1}P_k^T\tilde{L}_kU_kd = A_q.$$

Dessa forma a matriz U é transformada em outra triangular superior $\tilde{U}$ usando matrizes de permutações P_i's e matrizes triangulares $\tilde{L}_i$'s, conservando a matriz L. Embora várias novas matrizes sejam criadas durante as atualizações o sistema pode ser resolvido de forma recursiva, e todas as matrizes são triangulares. Além disso, uma matriz $\tilde{L}_i$ possui no máximo $(m-1)$ elementos que precisam ser armazenados para sua aplicação, assim como cada permutação P pode ser armazenada em um vetor de m valores inteiros, resultando em baixo custo de memória.

A vantagem de atualizar a decomposição LU em vez de recalcular toda iteração é perdida após muitas atualizações sucessivas, pois as operações de atualização se acumulam. Assim, após certo número de atualizações torna-se mais vantajoso recalcular a decomposição LU e reiniciar as atualizações. Esse número depende muito da eficiência do método utilizado para obter LU e também do tamanho da matriz B.

O método Simplex foi implementado em três variantes: (i) com a atualização da matrix inversa, (ii) com decomposição LU em cada iteração, e (iii) com decomposição LU e atualização da decomposição. Comparamos as três variantes em relação ao tempo e capacidade de resolver problemas, para vários problemas conhecidos da literatura.

Referências:

[1] BERTSIMAS, D. e TSITSIKLIS, J. N. **Introduction to LINEAR OPTIMIZATION.** Athena Scientific, Belmont, Massachussets, 1997.

[2] MAROS, I. **Computational Techniques of the Simplex Method.** Springer Science+Business Media New York, 2003.

[3] Suhl, L. e Suhl, U. **A fast LU update for linear programming.** Annals of Operations Research, 1993.

[4] Netlib Repository. `<http://www.netlib.org/lp/>`

Problema de Estoque e Roteirização

Thaiza Rafaele dos Santos Rievrs
Matemática Industrial - UFPR
thaizarievrs@hotmail.com

Prof. Abel Soares Siqueira
Departamento de Matemática - UFPR
abel.s.siqueira@gmail.com

Palavras-chave: Problema de estoque e roteirização, estoque gerenciado pelo fornecedor, pesquisa operacional.

Resumo: O Problema de Estoque e Roteirização ou *Inventory Routing Problem* (IRP) consiste nas decisões de gerenciamento de estoque, roteirização de veículos e programação de entrega feitas pelo fornecedor para os seus clientes. O *Vendor Managed Inventory* (VMI) é uma das técnicas propostas pelo Movimento *Efficient Consumer Response* (ECR) ou Resposta Eficiente ao Consumidor e desenvolve metodologias para solução deste problema com base em políticas específicas de estoque e da cadeia de suprimentos. Essa técnica beneficia ambos os lados, o fornecedor reduz os custos totais de estoque e transporte e os clientes aumentam o nível de serviço e investem menos recursos no controle do nível de estoque e pedidos.

As decisões que o fornecedor tem que tomar simultaneamente são:

- Quando reabastecer cada cliente,
- Quanto entregar a cada cliente quando ele é reabastecido,
- Qual o roteiro de abastecimento,

com o objetivo de minimizar os custos de estoque e transporte, de modo que as demandas de todos os clientes sejam atendidas.

Muitas versões do IRP foram descritas ao longo dos anos desde Bell et al. (1983), não existe uma versão padrão do problema. Veremos aqui uma versão básica que é classificada com sete critérios: horizonte de planejamento, estrutura, roteiro, políticas de estoque, decisões de estoque, tamanho e composição da frota de veículos.

Cada critério é definido de acordo com as suas opções, para esta versão básica o horizonte de planejamento é finito. A estrutura do problema será com um fornecedor e vários clientes e conhecemos as demandas dos clientes no início do horizonte de planejamento, ou seja, determinística. No roteiro teremos vários clientes na mesma rota. A política de estoque que define a regra para reabastecer os clientes será a política *Order-up-to Level* (OU), ou seja, sempre que um cliente é visitado a quantidade a ser

entregue será para preencher a capacidade de estoque deste cliente. As decisões de estoque determinam como o gerenciamento do estoque é modelado, para isso vamos restringir o estoque como não negativo. Teremos uma frota de veículos composta por mais de um veículo. Já o critério para a composição da frota de veículos será homogêneo, então todos os veículos vão ter a mesma capacidade.

O modelo estudado é uma extensão do artigo de Archetti et al. (2007) proposta por outros dois artigos, Coelho and Laporte (2013) e Adulyasak et al. (2013). Ele foi desenvolvido assumindo que a matriz de custo de roteamento ($c_{ij}, i, j \in \mathcal{V}$) é simétrica, então o IRP básico é definido em um grafo não direcionado $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ onde $\mathcal{V} = \{0, \cdots, n\}$ é o conjunto de vértices e $\mathcal{E} = \{(i,j) : i, j \in \mathcal{V}, i < j\}$ é o conjunto de arcos. O vértice 0 representa o fornecedor, e os vértices de $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \backslash \{0\}$ representam clientes. Tanto o fornecedor quanto os clientes possuem custo unitário de manutenção de estoque h_i, $i \in \mathcal{V}$, e cada cliente tem uma capacidade máxima de estoque C_i, $i \in \mathcal{V}'$. A duração do horizonte de planejamento é p, onde cada período de tempo $t \in \mathcal{T} = \{1, \cdots, p\}$. A quantidade de produto disponível no estoque do fornecedor é r^t. Assumimos que o fornecedor tem estoque suficiente para atender todas as demandas durante o horizonte de planejamento. As variáveis I_0^t e I_i^t, $i \in \mathcal{V}'$, são definidas como os níveis de estoque no final do período t. O nível de estoque de cada cliente nunca poderá exceder a sua capacidade máxima.

No início do horizonte de planejamento, conhecemos o nível de estoque atual do fornecedor e de todos os clientes (I_0^0 e I_i^0 para $i \in \mathcal{V}'$), a demanda d_i^t de cada cliente i para cada período de tempo t e o conjunto $\mathcal{K} = \{1, \cdots, K\}$ de veículos com capacidade $\mathcal{Q}_k$, que não podem ser excedidas. Cada veículo pode realizar no máximo uma rota por período de tempo, para entregar produtos do fornecedor a um subconjunto de clientes. Definimos a variável x_{ij}^{kt} como o número de vezes que a borda (i,j) é usada na rota do veículo k no período t. Note que x_{ij}^{kt} pode assumir os valor 0, 1 ou 2, onde 2 significa que ela é usada na ida do fornecedor para um determinado cliente e na volta deste cliente para o fornecedor, o que faz sentido porque garantimos que não haverá *loop*. A variável y_i^{kt} é uma variável de decisão e será igual a 1 se, e somente se, o cliente i é visitado pelo veículo k no período t, e a variável q_i^{kt} é a quantidade de produto entregue ao cliente i pelo veículo k no período t.

O problema pode então ser formulado como:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{t \in \mathcal{T}} h_i I_i^t + \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{j \in \mathcal{V}, i<j} \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t \in \mathcal{T}} c_{ij} x_{ij}^{kt} \\
\text{s. a} \quad & I_0^t = I_0^{t-1} + r^t - \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{i \in \mathcal{V}'} q_i^{kt}, \\
& I_i^t = I_i^{t-1} + \sum_{k \in \mathcal{K}} q_i^{kt} - d_i^t, \ i \in \mathcal{V}', \\
& I_i^t \geq 0, \ i \in \mathcal{V}, \quad I_i^t \leq C_i, \ i \in \mathcal{V}', \\
& \sum_{k \in \mathcal{K}} q_i^{kt} \leq C_i - I_i^{t-1}, \ i \in \mathcal{V}', \\
& C_i y_i^{kt} - I_i^{t-1} \leq q_i^{kt} \leq C_i y_i^{kt}, \ i \in \mathcal{V}', \\
& \sum_{i \in \mathcal{V}'} q_i^{kt} \leq Q_k y_0^{kt}, \\
& \sum_{j \in \mathcal{V}, i<j} x_{ij}^{kt} + \sum_{j \in \mathcal{V}, i>j} x_{ji}^{kt} = 2 y_i^{kt}, \ i \in \mathcal{V},
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i\in\mathcal{S}}\sum_{j\in\mathcal{S},i<j} x_{ij}^{kt} \leq \sum_{i\in\mathcal{S}} y_i^{kt} - y_m^{kt},\ \mathcal{S}\subseteq\mathcal{V}',\ m\in\mathcal{S},$$
$$q_i^{kt}\geq 0,\quad x_{i0}^{kt}\in\{0,\ 1,\ 2\},\quad x_{ij}^{kt}\in\{0,\ 1\},\ \forall\, i,j\in\mathcal{V}',$$
$$y_i^{kt}\in\{0,\ 1\},\ i\in\mathcal{V},\forall\, k\in\mathcal{K},\ \forall\, t\in\mathcal{T}.$$

Implementamos esse algoritmo na linguagem de programação Julia (Bezanson et al. (2017)), através do pacote JuMP (Dunning et al. (2017)) que é específico para modelagem de problemas de otimização, e usamos o solver Gurobi testando com as instâncias citadas no artigo do Archetti et al. (2007), para problemas de baixo e alto custo com horizonte de planejamento igual a 3 e 6. Este algoritmo foi estudado a partir do artigo do Coelho et al. (2014).

Referências

Y. Adulyasak, J. F. Cordeau, and R. Jans. Formulations and branch-and-cut algorithms for multivehicle production and inventory routing problems. `http://dx.doi.org/10.1287/ijoc.2013.0550`, 2013. INFORMS J, Comput., ePub ahead of print June 14.

C. Archetti, L. Bertazzi, G. Paletta, and M. Speranza. A branch-and-cut algorithm for a vendor-managed invertory-routing problem. *Transportation Sci*, 41(3):382–391, 2007.

W. J. Bell, L. M. Dalberto, M. L. Fisher, A. J. Greenfield, R. Jaikumar, P. Kedia, R. Mack, and P. Prutzman. Improving the distribution of industrial gases with an on-line computerized routing and scheduling optimizer. *Interfaces*, 13(6):4–23, 1983.

J. Bezanson, A. Edelman, S. Karpinski, and V. B. Shah. Julia: A fresh approach to numerical computing, 2017.

L. C. Coelho and G. Laporte. The exact solution of several classes of inventory-routing problems. *Comput. Oper. Res.*, 40(2):558–565, 2013.

L. C. Coelho, J. F. Cordeau, and G. Laporte. Thirty years of inventory routing. *Transportation Sci*, 40(1):1–19, 2014.

I. Dunning, J. Huchette, and M. Lubin. Jump: A modeling language for mathematical optimization. *SIAM Review*, 59(2):295–320, 2017.