

8º BRINCANDO DE MATEMÁTICO

Infinito



Imagem: M.C. Escher

9 a 12 de julho de 2012

UFPR Centro Politécnico

Realização: PET Matemática UFPR



UFPR – UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET – PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor:	Eduardo Outeiral Correa Hoefel
Editoração:	Aline Cristiane Finkler Bruno de Lessa Victor Bruno Suzuki Carlos Alberto Rezende de Carvalho Júnior Carolina de Almeida Santos Pinotti Duarte Kenyu Murakami Érika Sathie Takatsuki Jânio de Jesus Cardoso Jean Carlo Baena Vicente Larissa Kovalski Matheus Augusto Bannack Diniz Mouses Robert Nascimento Loyola Nilmara de Jesus Biscaia Pinto Thamara Petroli Wagner Augusto Almeida de Moraes
Site:	petmatufpr.wordpress.com
Telefone:	(41) 3361-3672
Data do Curso:	9 a 12 de Julho de 2012
Horários:	das 8h30 às 12h00 (turma da manhã) das 13h30 às 17h00 (turma da tarde)
Local de Realização:	PC - Bloco de Exatas, Centro Politécnico - UFPR

Sumário

I	Matemática Básica	1
1	Frações	3
1.1	Adição e Subtração	3
1.2	Multiplicação e Divisão	4
2	Potenciação	7
2.1	Definição	7
2.2	Propriedade	7
3	Funções	9
3.1	Função Injetora	10
3.2	Função Sobrejetora	10
3.3	Função Bijetora	10
3.4	Exercícios	10
4	Infinito	15
II	Funções Trigonométricas	19
5	Funções Trigonométricas	21
5.1	Intervalos e o Plano Cartesiano	21
5.1.1	Intervalos	21
5.1.2	Plano Cartesiano	22
5.2	Gráficos de Funções	24
5.2.1	Exercícios:	25
5.3	A Trigonometria	26
5.3.1	Arcos e Ângulos	26
5.3.2	Unidades de medidas de arcos e ângulos	27
5.3.3	O comprimento de um arco	28
5.3.4	Exercícios Parte 1	29
5.3.5	O Ciclo Trigonométrico	29
5.3.6	Exercícios Parte 2	31
5.3.7	Razões Trigonométricas na Circunferência	32
5.3.8	Seno de um Ângulo ou Arco	32
5.3.9	Exercícios Parte 3	35
5.3.10	Cosseno de um Ângulo ou Arco	35

5.3.11	Exercícios Parte 4	37
5.3.12	Tangente de um ângulo ou Arco	37
5.3.13	Exercícios Parte 5	38
5.3.14	Algumas relações entre Senos e Cossenos	38
5.3.15	Mais Razões Trigonômétricas	39
5.3.16	Exercícios Parte 6	40
5.3.17	Relações Trigonômétricas Adicionais	40
5.4	Exercícios Adicionais	40
6	Funções Trigonômétricas Diversas	43
6.1	As demais voltas no ciclo trigonométrico	43
6.2	Funções Periódicas	45
6.3	Função Seno	46
6.3.1	Gráfico da função $y = \sin x$	46
6.3.2	Exercícios	47
6.4	Função Cosseno	48
6.4.1	Gráfico da função $y = \cos x$	48
6.4.2	Exercícios	49
6.5	Função Tangente	49
6.5.1	Gráfico da função $y = \tan(x)$	50
6.5.2	Exercícios	51
6.6	Função Cotangente	51
6.6.1	Gráfico da função $y = \cotg x$	51
6.7	Função Cossecante	52
6.7.1	Gráfico da função $y = \operatorname{cosec} x$	53
6.8	Função Secante	54
6.8.1	Gráfico da função $y = \sec x$	55
6.8.2	Exercícios	56
7	Equações e Inequações Trigonômétricas	57
7.1	Equações Fundamentais	57
7.2	Resolução das Equações Fundamentais	57
7.2.1	Da equação $\sin x = \sin \alpha$	57
7.2.2	Da Equação $\cos x = \cos \alpha$	58
7.2.3	Da Equação $\tan x = \tan \alpha$	59
7.3	Exercícios	60
7.4	Solução Geral de uma Equação	61
7.5	Exercícios	63
7.6	Identidades	64
7.7	Exercícios	64
8	Funções Trigonômétricas Inversas	67
8.1	Função arco-seno	67
8.2	Exercícios	68
8.3	Função arco-cosseno	68
8.4	Exercícios	69
8.5	Função arco-tangente	70

8.6	Exercícios	71
III	PA e PG, Exponencial e Logaritmos	73
9	Sequência	75
10	Progressões	77
10.1	Progressão Aritmética	77
10.1.1	Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética . . .	77
10.1.2	Exercícios Resolvidos	78
10.2	Progressão Geométrica	80
10.2.1	Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica . . .	80
10.2.2	Séries Geométricas Convergentes	81
10.2.3	Exercícios Resolvidos	82
10.3	Exercícios	85
11	Função Exponencial	87
11.1	Definição:	87
11.2	Propriedades	87
11.3	Imagem	92
11.4	Gráfico	93
11.5	Equações Exponenciais	95
11.6	Método da redução a uma base comum	95
11.7	Inequações Exponenciais	96
11.8	Método de redução a uma base comum	96
12	Logaritmos	97
12.1	Definição	97
12.1.1	Exercícios:	98
12.2	Sistemas de logaritmos	99
12.3	Propriedades operatórias	99
12.3.1	Exercícios	100
12.4	Mudança de base	100
12.4.1	Exercícios	101
12.5	Equações e inequações logarítmicas	101
12.5.1	Exercícios	102
12.6	Função logarítmica	102
12.6.1	Exercícios	104
IV	Limite	105
13	Noções de Limite	107
14	Definição e propriedades do limite	111
14.1	Definição	111
14.2	Propriedades do limite	113

15 Limites Notáveis	115
15.1 O limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	115
15.2 O limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	117
15.3 Exercícios	118
A A Faixa de Moebius	121
Referências Bibliográficas	123

Parte I

Matemática Básica

Capítulo 1

Frações

1.1 Adição e Subtração

Para somar e subtrair frações devemos utilizar o seguinte algoritmo:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{\frac{mmc(b,d) \cdot a}{b} \pm \frac{mmc(b,d) \cdot c}{d}}{mmc(b,d)}$$

Ou seja, para entendermos melhor, vamos resolver alguns exercícios:¹

Exercício 1.1.1. Dados $x = -\frac{1}{5}$, $y = -\frac{1}{2}$ e $z = \frac{1}{3}$, calcule:

- a) $x + y$
- b) $x - y$
- c) $x + y + z$
- d) $-x - y$
- e) $-y - z$

Exercício 1.1.2. Dados $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$ e $z = -\frac{1}{4}$, calcule:

- a) $x + (y + z)$
- b) $y - (x + z)$
- c) $(z - x) + y$
- d) $z - (-x - y)$

Temos então, pelo Exercício 1.1.2, que as propriedades associativas e comutativas que são válidas para os números inteiros, serão também válidas para os racionais.

¹Exercícios retirados da referência [3]

1.2 Multiplicação e Divisão

Agora que já pudemos relembrar bem como somar e subtrair frações, vamos relembrar a multiplicação e divisão. Da mesma forma que somar e dividir, introduziremos um algoritmo para essas outras duas operações:

- **Multiplicação:**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

- **Divisão:**

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Resolva os exercícios a seguir:²

Exercício 1.2.1. Calcule o produto:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{8}{5}\right)$

b) $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{10}{9}$

c) $(-1) \cdot \left(-\frac{8}{9}\right) \cdot \left(-\frac{6}{5}\right)$

d) $0 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \frac{1}{6}$

Exercício 1.2.2. Determine o valor das expressões:

a) $\left(-5 + \frac{1}{2}\right) \cdot 6$

b) $\left(-\frac{4}{25}\right) \cdot \left(-\frac{5}{12}\right) - \frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{16}{3}\right) - 5 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$

d) $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{2} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$

Exercício 1.2.3. Efetue as seguintes divisões:

a) $-5 : \frac{1}{30}$

²Exercícios tirados da referência [3]

b) $-4 : \left(-\frac{4}{7}\right)$

c) $1 : \left(-\frac{5}{8}\right)$

d) $(-0,5) : \frac{1}{10}$

e) $\frac{6}{5} : \frac{36}{45}$

f) $\frac{3}{16} : (-1)$

Capítulo 2

Potenciação

2.1 Definição

Definição 2.1.1 (Potência de expoente inteiro). Sendo a um número real e n um número inteiro, tem-se que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}, \text{ se } n > 1$$
$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplo 2.1. a) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

b) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$

2.2 Propriedade

Propriedade 2.1. Dados os números reais a e b e os números inteiros m e n , obedecendo as condições de existência, temos:

- I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (conserva-se a base e adicionam-se os expoentes)
- II. $a^m : a^n = a^{m-n}$ (conserva-se a base e subtraem-se os expoentes)
- III. $(a^m)^n = a^{mn}$ (conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes)
- IV. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$ (distributiva da potenciação em relação à multiplicação)
- V. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (distributiva da potenciação em relação à divisão)

Exemplo 2.2. a) $5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$

b) $3^6 : 3^4 = 3^{6-4} = 3^2$

Exercício 2.1. Calcule os valores das potências:

a) 6^2

b) $(-6)^2$

c) $(-2)^3$

d) -2^3

e) $(-8)^0$

f) $\frac{3^4}{4}$

g) $-\frac{3^4}{4}$

i) 0^{28}

j) $(-1)^{20}$

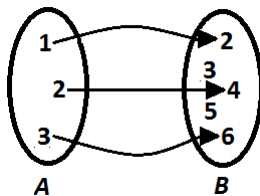
Capítulo 3

Funções

Adotando dois conjuntos não-vazios, A e B , definimos como função uma relação entre estes conjuntos, estabelecida por uma lei de formação (regra geral). Nesta relação, a cada elemento de A corresponde um único elemento do conjunto B . O conjunto A é o Domínio da função, e o conjunto B é o Contra-domínio. O conjunto Imagem da função ($Im(f)$) é o conjunto dos elementos de B (Contra-domínio) que estão relacionados a algum elemento de A (Domínio).

Exemplo:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto y = 2x \end{aligned}$$



Temos:

$$A = \text{Domínio} = 1; 2; 3$$

$$B = \text{Contra-domínio} = 2; 3; 4; 5; 6$$

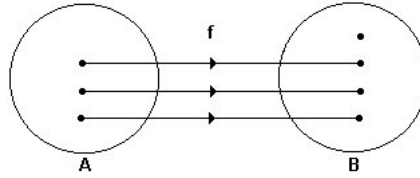
$$Im(f) = 2; 4; 6$$

A Imagem de um elemento: A cada elemento x , pertencente ao domínio de uma função f , corresponde um único valor de $y = f(x)$ do contra-domínio dessa função. Tal valor é denominado Imagem de x pela função f .

Raiz ou Zero de uma função: Dada uma função f de A em B , chamamos raiz (ou zero) da função f todo elemento de A cuja imagem é zero.

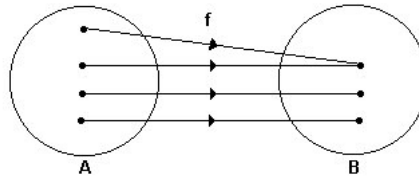
3.1 Função Injetora

Função Injetora: Para quaisquer elementos distintos do conjunto A ($x_1 \neq x_2$) correspondem elementos distintos do conjunto B ($y_1 \neq y_2$).



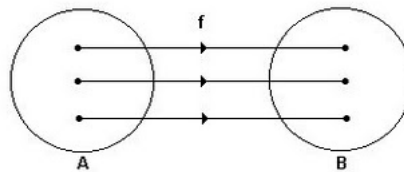
3.2 Função Sobrejetora

Função Sobrejetora: O conjunto Imagem é igual ao conjunto B , $Im(f) = B$.



3.3 Função Bijetora

Função Bijetora: A função é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.



3.4 Exercícios

1. Determine se é uma função:

- a) Dados os conjuntos $A = \{0, 5, 15\}$ e $B = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$ e a relação de A em B expressa pela fórmula $y = x + 5$

- b) Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3\}$ e a relação de A em B expressa pela fórmula $y = x$
- c) Dados os conjuntos $A = \{-1, 1, -3, 3\}$ e $B = \{1, 3, 6, 9\}$ e a relação de A em B expressa pela fórmula $y = x^2$
- d) Dados os conjuntos $A = \{1, 4\}$ e $B = \{1, -2, 2\}$ e a relação de A em B expressa pela fórmula $y^2 = x$
- e) Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$ e a relação de A em B expressa pela fórmula $y = x + 1$
2. Determine as raízes da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
3. Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.
- a) Qual o domínio da função?
- b) Qual a raiz da função?
- c) Calcule:
- $f(3)$

- $f(-1)$

- $f(5)$

- x , de modo que $f(x) = 4$

4. Determine o domínio das seguintes funções:

a) $y = 5x^2 - 3x + 1$

b) $y = \sqrt{2x - 3}$

c) $y = \frac{x + 1}{x^2 - 9x + 20}$

d) $y = \sqrt[3]{2x + 3}$

e) $y = \frac{\sqrt{x + 1}}{x^3} + \frac{2x}{\sqrt{x + 4}}$

5. Verifique se $f : A \rightarrow B$, com $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ e $B = \{-8, -4, -1, 0, 1, 4, 8\}$, dada pela expressão $y = x^3$ é uma função. Em caso afirmativo, escreva o conjunto imagem.

6. Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, calcule a e b , sabendo que $f(1) = 7$ e $f(2) = 22$

7. Considere três funções f , g e h , tais que:

- A função f atribui a cada pessoa do mundo, a sua idade;
- A função g atribui a cada país, a sua capital;
- A função h atribui a cada número natural, o seu dobro.

Podemos afirmar que, das funções dadas, são injetoras:

- a) f , g e h
- b) f e h
- c) g e h
- d) Apenas h
- e) Nenhuma delas

8. Considere $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Verifique se a função é injetora, sobrejetora e bijetora:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = 5$

d) $f(x) = x^3$

e) $f(x) = |x|$

9. Refaça os exercícios (b), (c) e (e) acima considerando $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

10. Seja $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = (x - 2) \cdot (x - 4)$.
Então:

a) f é sobrejetora

b) f é injetora

c) f é bijetora

d) O conjunto imagem de f possui 3 elementos somente

e) $Im(f) = \{-1, 0, 1\}$

Capítulo 4

Infinito

O texto abaixo é um trecho do livro “O Diabo dos Números”, de Hans M. Enzensberger [8], onde há um menino, Robert, que não gosta de Matemática e que, em seus sonhos, encontra o Diabo dos Números, que lhe explica as maravilhas da Matemática e dos números.

O capítulo “Quarta Noite” do livro, que inicia na página 67, trata de um tema muito comum na Matemática: o infinito. Veja abaixo um trecho deste capítulo:

[...]

— Mas que tanto você fica me levando para tudo quanto é lugar? Uma hora aterrisso numa floresta só de uns, onde os cogumelos crescem até ficar grandes como poltronas; outra hora, acordo numa caverna sem saída. E hoje? Onde é que estou afinal?

— À beira-mar, como pode ver.

Robert olhou em torno.

Areia branca por toda parte, e, atrás de um bote de cabeá para baixo sobre o qual estava sentado o diabo dos números, as ondas rebentando. Uma região bastante deserta!

— E você esqueceu de novo a sua calculadora.

— Escute — disse Robert —, quantas vezes vou ter que lhe dizer? Não posso carregar todas as minhas tralhas comigo quando vou dormir. Você por acaso sabe com antecedência com que vai sonhar?

— É claro que não — respondeu o velho. — Mas quando você sonha comigo, bem que poderia sonhar também que está com a sua calculadora. Mas não! Eu é que preciso fazer uma parecer. Sempre eu! E ainda por cima tenho que ficar ouvindo que ela é muito mole ou muito verde ou que parece uma papa.

— É melhor do que nada — disse Robert.

O diabo dos números ergueu sua bengalinha, e uma nova calculadora surgiu diante dos olhos de Robert. Não se parecia tanto com um sapo quanto a anterior, mas, em compensação, era gigantesca: um móvel estofado, revestido de uma espécie de lã e tão comprido quanto uma cama ou um sofá. De um dos lados via-se um pequeno painel com muitas teclas estofadas, e o mostrador em que se podiam ler os números cintilantes ocupava todo o encosto daquele aparelho peculiar.

— Bem, agora digite um 1 dividido por um 3 — ordenou o velho.

$$\frac{1}{3}$$

repetiu Robert, digitando as teclas. Na janelinha sem fim de tão longa apareceu o resultado em números verde-claros:

0,33333333333333333333333333333333...

- Ei, mas isso não vai parar, não? — perguntou Robert.
- Vai — respondeu o diabo dos números. — Vai parar onde termina a calculadora.
- E aí?
- Aí continua. Só que você não pode ver.
- Sim, mas é sempre a mesma coisa: um 3 depois do outro. Isso está me cheirando a perigo!
- E você tem razão.
- Ah, não — murmurou Robert. — Isso é muito idiota! Prefiro então escrever simplesmente um terço. Assim:

$$\frac{1}{3}$$

E pronto. Fico sossegado.

— Está certo — disse o velho. — Mas aí você vai precisar fazer contas com frações, e suponho que contas assim você não suporta. “Se $1/3$ de 33 padeiros fazem 89 rosquinhas em $2\frac{1}{2}$ horas, quantas rosquinhas fazem $5\frac{3}{4}$ padeiros em $1\frac{1}{2}$ hora?”

— Ah, não, pelo amor de Deus! Aí já é demais. Se é assim, prefiro a calculadora e os números depois da vírgula, mesmo que eles não acabem nunca. Eu só queria saber de onde vêm todos esses três.

— É o seguinte: o primeiro 3 depois da vírgula são três décimos. Depois vem o segundo, que são três centésimos; o terceiro, três milésimos, e assim por diante. E, no fim, você pode somá-los.

0,3
0,03
0,003
0,0003
0,00003
...

Entendeu? Sim? Então tente multiplicar todos eles por 3: o primeiro 3, ou seja, os três décimos; depois, os três centésimos, e assim por diante.

— Sem problema — respondeu Robert. — Isso eu posso fazer até de cabeça:

$0,3 \times 3 = 0,9$
 $0,03 \times 3 = 0,09$
 $0,003 \times 3 = 0,009$
 $0,0003 \times 3 = 0,0009$
 ...

Bom, e por aí vai.

— Muito bem. E se agora você somar todos os números terminados em 9, o que acontece?

— Um minutinho! 0,9 mais 0,09 dá 0,99; mais 0,009 dá 0,999. Vão aparecer cada vez mais noves. E, de novo, está parecendo que essa coisa não tem fim.

— Óbvio. Mas, se você pensar bem, tem algo errado aí! $1/3$ somado 3 vezes deveria dar 1, ou não? Sim, porque $1/3$ vezes 3 dá um inteiro. Isso não se discute. E aí?

— Não faço ideia — respondeu Robert. — Está faltando alguma coisa. 0,999 é *quase* 1, mas não é 1.

— Justamente. E é por isso que você precisa continuar com os noves, sem nunca poder parar.

— ah, mas essa é muito boa!

— Fácilmo para um diabo dos números!

O velho de pôs a rir maldoso, ergueu sua bengala, começou a girá-la no ar e, num piscar de olhos, todo o céu se encheu de uma longuíssima corrente de noves, girando e girando cada vez mais alto.

— Chega! — gritou Robert. — Vou acabar passando mal!

— Basta um estalar de dedos e eles desaparecem. Mas só vou fazer isso quando você admitir que essa corrente de noves depois do 0, crescendo sem parar, é a mesma coisa que 1.

Enquanto o diabo dos números falava, a corrente seguia crescendo. Aos poucos, escureceu o céu. Contudo, embora Robert já estivesse sentindo tontura, ele não queria ceder.

— Nunca, nunquinha! — disse. — Não adianta você continuar espichando sua corrente de noves. Sempre vai ficar faltando alguma coisa: o último 9.

— Não existe esse último 9! — gritou o diabo dos números. Mas agora Robert já não estremecia quando o velho tinha um de seus pequenos acessos de raiva. Ele sabia que, sempre que isso acontecia, era por causa de algum ponto interessante, alguma pergunta que não era tão fácil responder.

No entanto, a infundável corrente saracoteava ameaçadora bem diante do nariz do Robert, enrolando-se também em torno do próprio diabo dos números, e de tal forma que já nem se podia ver muito dele.

— Está bem — disse Robert. — Eu admito. Mas só se você tirar essa corrente dos nossos pescoços.

— Melhor assim.

Com muito esforço, o velho ergueu sua bengala, já toda recoberta de noves, murmurou algo incompreensível, e pronto: o mundo estava livre outra vez daquele emaranhado.

— Ufa! — exclamou Robert. — Será que isso só acontece com os três e com os noves? Ou os outros números também formam essas correntes horríveis?

— Essas correntes intermináveis são mais comuns do que areia no mar, meu caro. Adivinhe só quantas existem somente entre 0,0 e 1,0!

[...]

Parte II

Funções Trigonométricas

Capítulo 5

Funções Trigonométricas

5.1 Intervalos e o Plano Cartesiano

5.1.1 Intervalos

Definimos um **intervalo** como sendo um conjunto que contém cada número real entre dois extremos dados. As representações para os intervalos são as seguintes:

- Intervalo Aberto: $(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$.
- Intervalo Fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$.
- Intervalo Semi-Aberto ou Semi-Fechado: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$.
- Intervalo Semi-Aberto ou Semi-Fechado: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$.

Além disso, consideramos:

- $[a, +\infty) = [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ como sendo fechado.
- $(-\infty, a] =]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$ como sendo fechado.
- $(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$ como sendo aberto.
- $(-\infty, a) =]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$ como sendo aberto.
- $(-\infty, +\infty) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Exemplo:

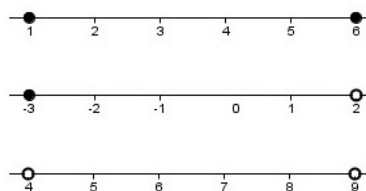


Figura 5.1: Um intervalo fechado - $[1, 6]$, um semi-aberto (ou semi-fechado) - $[-3, 2)$ e um aberto - $(4, 9)$, respectivamente .

Exercícios

1. Dê exemplos de intervalos abertos, fechados e semi-abertos.
2. Dê exemplos de intervalos fechados que contenham infinitos elementos.
3. Quantos números reais o intervalo $[2, 5]$ possui? E naturais? E inteiros? E irracionais?
4. Sejam A e B dois conjuntos. Se $A = [-4, 11]$ e $B = [5, 14]$, quantos inteiros terão os conjuntos $A \cup B$ e $A \cap B$ respectivamente?
5. Seja A o conjunto dado por $A = [1, 5] \cap [-1, 4] \cap [3, 8]$. Qual é o elemento máximo e o elemento mínimo de A ?
6. Seja B o conjunto dado por $B = ([1, 5] \cup [7, 13]) \cap ([4, 8] \cup [-1, 3])$. Qual é o elemento máximo e o elemento mínimo de B ?
7. Expresse os seguintes intervalos na forma de conjunto: $[2, 6]$, $[-1, 7)$, $[0, +\infty)$, $(-\infty, 2)$ e $(-1, 7] - \{3\}$.

5.1.2 Plano Cartesiano

O **Plano Cartesiano** é um esquema reticulado necessário para especificar pontos num determinado “espaço” com dimensões. Criado por René Descartes, o plano cartesiano consiste em dois eixos perpendiculares, sendo o horizontal chamado de eixo das abscissas e o vertical de eixo das ordenadas. As disposições dos eixos no plano formam quatro quadrantes, como mostra a figura a seguir.

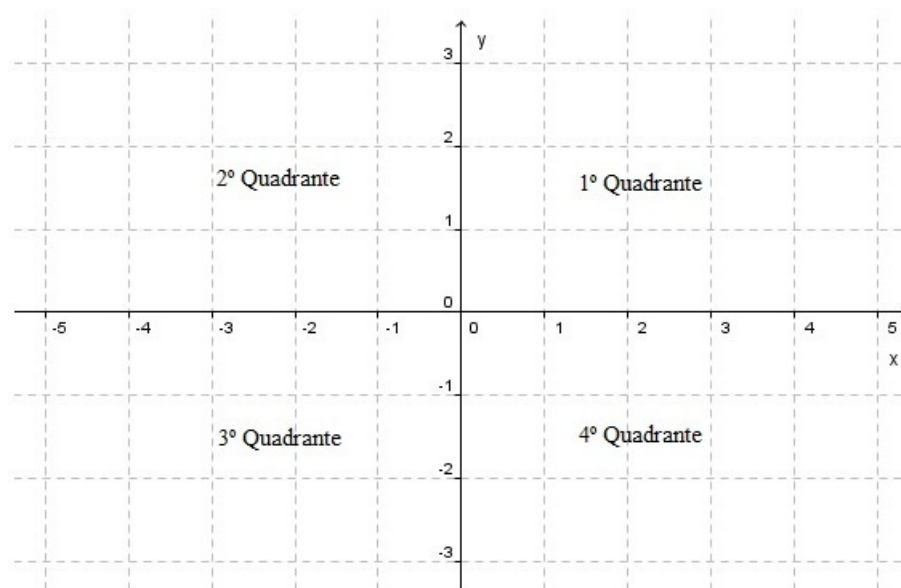


Figura 5.2: Uma representação do plano cartesiano.

O encontro dos eixos é chamado de origem. Cada ponto do plano cartesiano é formado por um par ordenado (x, y) , onde x : abscissa e y : ordenada.

Como dito, podemos encontrar pontos no plano cartesiano. Dados os pontos $A = (-5, 3)$, $B = (6, 5)$, $C = (4, -3.5)$, $D = (0, 0)$, como devemos fazer para marcá-los no plano cartesiano?

Vamos seguir os passos seguintes para verificar como é feita a marcação de um ponto no plano cartesiano. Peguemos como exemplo, o ponto $A = (-5, 3)$.

Primeiro, localiza-se o ponto -5 no eixo das abscissas. Em seguida, localiza-se o ponto 3 no eixo das ordenadas. Por fim, traça-se a reta perpendicular aos eixos, o encontro delas será o local do ponto em questão. Os pontos B, C, D são encontrados de forma análoga, como mostra a figura a seguir.

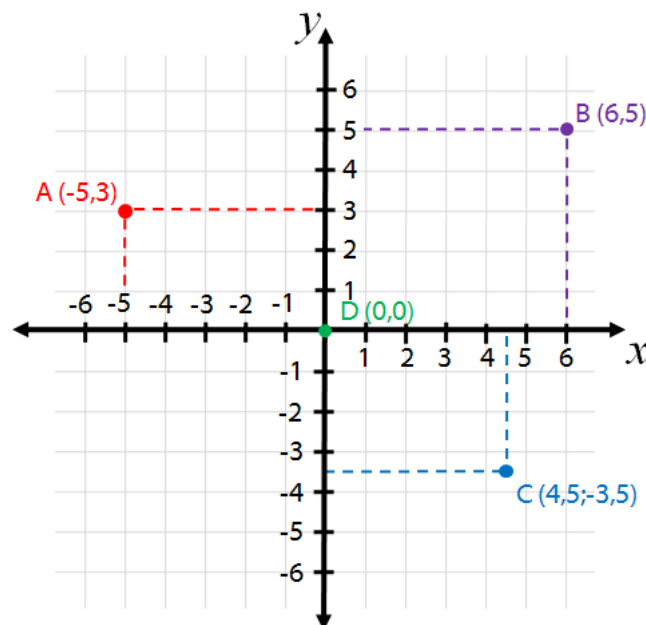


Figura 5.3: Alguns pontos representados no plano cartesiano.

Exercícios

1. Na figura 5.3, marque os pontos $E = (2, 4)$, $F = (-1, -2)$, $G = (-2, -1)$ e $H = (0, 4)$.
2. Trace uma reta passando pelos pontos D e E . Perceba que um novo ponto, $I = (1, 2)$ pertencerá a essa reta. Tente descobrir porque isso ocorre e em seguida, dê mais 5 pontos que pertencem a esta reta sem precisar desenhá-los.
3. Desenhe um plano cartesiano. Em seguida, faça o que se pede:
 - a) Encontre a origem e chame tal ponto de O .
 - b) Encontre um ponto no segundo quadrante cuja soma das coordenadas seja -1 . Desenhe-

o e chame esse ponto de A . É possível encontrar um ponto B no terceiro quadrante cuja soma das duas coordenadas seja 1? Se sim, dê um exemplo e se não, explique.

c) Encontre 4 pontos (x, y) que satisfaçam a igualdade $x = \frac{y}{2}$. É verdade que existe uma reta que passa por todos esses pontos?

5.2 Gráficos de Funções

Função é um dos conceitos mais importantes da matemática. Existem várias definições, dependendo da forma como são escolhidos os axiomas. Função é uma relação entre dois conjuntos, onde há uma relação entre cada um de seus elementos. Também pode ser uma lei que para cada valor x é correspondido por um elemento y , também denotado por $f(x)$.

Um dos aspectos mais importantes do estudo de uma função é a construção de seu **gráfico**. Se temos uma função f qualquer, como por exemplo, $f(x) = x^2$, como saber qual é seu “comportamento” no plano cartesiano? A figura 4 representa o gráfico dessa última função. Mas o que isso significa?

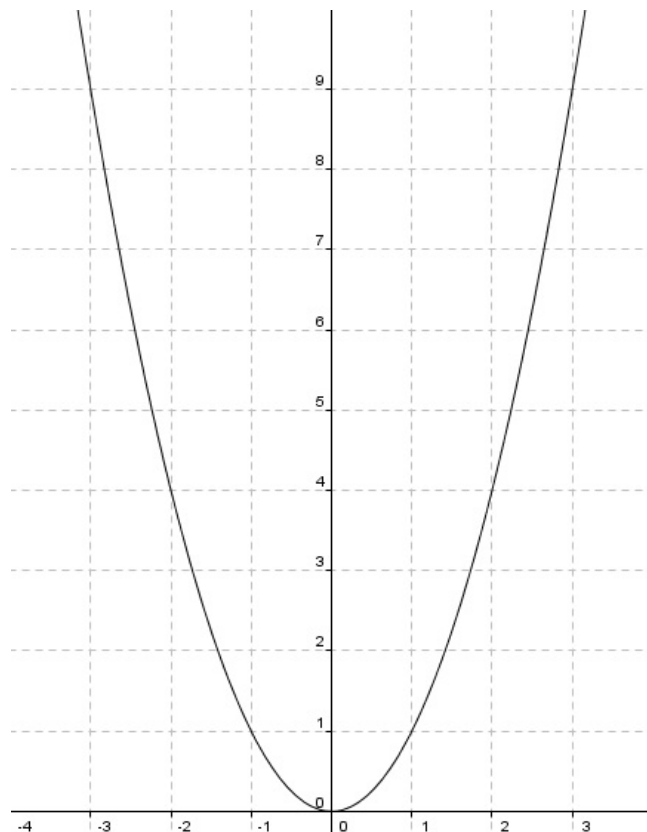


Figura 5.4: Gráfico da Função $f(x) = x^2$

Para que possamos fazer o gráfico de uma determinada função, chamemos $f(x) = y$. Com isso, $y = x^2$. Em seguida, podemos montar uma tabela, onde para cada valor que quisermos aplicar a y , encontraremos o valor correspondente para $f(x) = y$. Por exemplo, se tivermos que $x = 1$, valerá que $y = 1$, pois se $y = 1^2 \Rightarrow y = 1$. Analogamente,

se $x = 2$, teremos $y = 4$, pois $y = 2^2 \Rightarrow y = 4$. Mas vamos construir uma tabela onde iremos atribuir mais valores de y a fim de encontrar mais valores de x .

x	$y=f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Note que, se atribuirmos o valor -2 para x , temos que, como $y = x^2$, $y = (-2)^2 = 4$. Analogamente para todos os outros valores. Assim, já temos como construir o gráfico para nossa função $f(x) = x^2$.

E isso é muito simples! Vamos começar pegando $x = -2$. Pelo que encontramos na tabela, para $x = -2$, temos que $y = 4$. Então, no nosso plano cartesiano, marcamos o ponto $(-2, 4)$. Para $x = -1$, $y = 1$, ou seja, também marcamos o ponto $(-1, 1)$. Sucessivamente marcamos os pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$, $\dots$ no plano cartesiano. Em seguida, os unimos a fim de obter o gráfico para aquela função dada.

5.2.1 Exercícios:

1. Esboce o gráfico da função $f(x) = x$
2. Esboce o gráfico da função $g(x) = 4x$
3. Esboce o gráfico da função $h(x) = \frac{1}{3}x$
4. Esboce o gráfico da função $f(x) = 5$
5. Esboce o gráfico da função $g(x) = x^3$
6. Esboce o gráfico da função $h(x) = x^2 + 1$
7. Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 + 4x + 3$
8. Esboce o gráfico da função $g(x) = x^4 - 4$

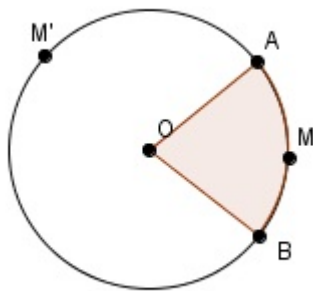
5.3 A Trigonometria

5.3.1 Arcos e Ângulos

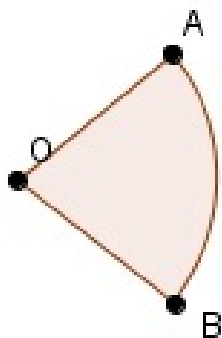
Seja uma circunferência de centro O sobre a qual tomamos dois pontos distintos A e B . A seguir, ainda sobre a circunferência, tomemos um terceiro ponto M , distinto dos anteriores. Então, relativamente a A e B ,

- a) M pode estar situado na parte assinalada na figura (percurso mais curto entre A e B);
- b) M pode estar situado na outra parte, não assinalada (percurso mais longo entre A e B).

Cada uma dessas duas partes em que fica dividida a circunferência por dois de seus pontos é chamado **arco de circunferência**. No caso, temos os arcos $\widehat{AMB}$ e $\widehat{AM'B}$, ambos com extremidades A e B .

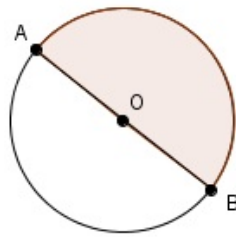


Podemos escrever simplesmente $\widehat{AB}$ quando não houver dúvidas sobre qual arco fazemos referência, como na figura a seguir.

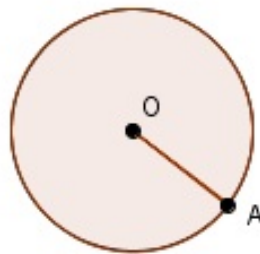


Casos particulares:

- a) Se A e B são simétricos em relação ao centro O , o segmento $\overline{AB}$ é um diâmetro e cada um dos arcos iguais é uma semicircunferência, ou um **arco de meia volta**.



b) No caso extremo de A não ser distinto de B , o arco determinado é a circunferência (ou arco de uma volta) e a outra parte se chama **arco nulo**.

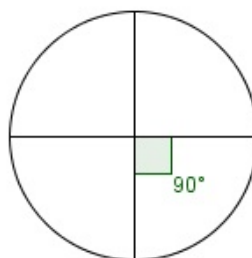


5.3.2 Unidades de medidas de arcos e ângulos

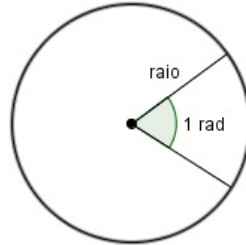
Quando medimos o comprimento de um arco, a unidade adotada é a mesma unidade (linear) do raio: metro, centímetro, milímetro, etc. Ao tratarmos da medida (angular) de um arco, adotamos o grau ($^\circ$) ou radiano (rad).

- O grau corresponde $\frac{1}{360}$ da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido.

A circunferência comporta quatro arcos de 90° :



- O radiano é o arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido.



Como o comprimento de uma circunferência vale $2\pi r$, o raio r “cabe” 2π nesse comprimento. Ainda, se a uma raio corresponde um arco de 1 radiano, é correto que em uma volta completa há 2π radianos. Ou seja, $2\pi = 360^\circ$ e é possível estabelecer a seguinte tabela:

2π rad	360°
π rad	180°
$\frac{\pi}{2}$ rad	90°
$\frac{\pi}{3}$ rad	60°
$\frac{\pi}{4}$ rad	45°
$\vdots$	$\vdots$

5.3.3 O comprimento de um arco

Mantido o ângulo central, o comprimento de um arco é diretamente proporcional ao raio da circunferência em que o arco é tomado.

Para determinar o comprimento de um arco de circunferência adotamos os procedimentos descrito a seguir. Sendo $\widehat{AOB}$ o ângulo central de medida α rad e $\widehat{AB}$ o correspondente arco, de comprimento l , podemos estabelecer uma regra de três simples para obter a seguinte relação:

$$l = \alpha \cdot r$$

Exemplo: Se uma circunferência de 3m de raio contém um arco de 6m de comprimento, tanto o ângulo central correspondente quanto o arco medem $\alpha = \frac{6m}{3m} = 2$ rad.

Se quisermos medir o comprimento de um arco, dado em graus o ângulo central correspondente, deve ser considerado o comprimento da circunferência da qual o arco faz parte e qual parcela do arco total (ou seja, 360°) representa o ângulo central dado. Uma regra de três básica providencia a seguinte relação:

$$l = \frac{\alpha r \pi}{180^\circ}$$

Com essa fórmula é possível calcular o comprimento de um arco de circunferência em função do raio e do ângulo central correspondente, medido em graus.

Observação: se r é o raio da circunferência de um círculo, temos que:

- i) $C = 2\pi r$ é o comprimento da circunferência;
- ii) $A = \pi r^2$ é a área do círculo.

Exemplo: O comprimento l de um arco de 72° sobre uma circunferência de 8cm de raio é dada por:

$$l = \frac{72^\circ \cdot 8 \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{16\pi}{5} = 3,2\pi \text{ cm} = 10,048 \text{ cm}.$$

Perceba que todo arco de 72° mede a quinta parte do comprimento da circunferência em que está contido. Como $C = 2\pi r$ e no nosso caso $r = 8$, então $C = 50,24$ e portanto, $l = \frac{1C}{5} = 10,048 \text{ cm}.$

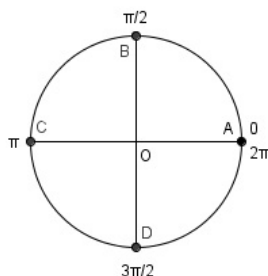
5.3.4 Exercícios Parte 1

1. Calcule o ângulo entre os ponteiros do relógio ao meio-dia e o ângulo entre os ponteiros do relógio às 4 horas e 20 minutos.
2. Exprima em graus: $\frac{\pi}{3}$ rad, $\frac{\pi}{5}$ rad, $\frac{2\pi}{9}$ rad e $\frac{3\pi}{8}$ rad.
3. Determine o comprimento de uma circunferência cujos raios são: 10cm, 0,5m, 1m e $\frac{\pi}{3}$ m.
4. A área de um círculo é $28,26m^2$. Calcule o comprimento de sua circunferência.

5.3.5 O Ciclo Trigonométrico

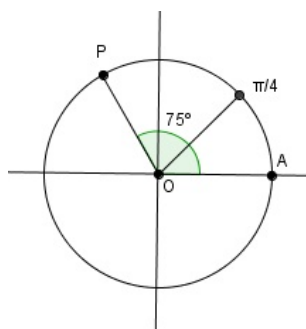
Fixemos dois eixos perpendiculares cruzando-se em O e orientados conforme as indicações: o vertical com sentido para cima e o horizontal, para a direita. Sobre o sistema assim descrito, tomemos um círculo com centro O e raio unitário. Associaremos a cada ponto da circunferência um número real. Para tanto, faremos com que um ponto P desloque-se sobre ela a partir de um ponto A (inicialmente associado ao número zero) no sentido anti-horário, considerado positivo. Como $r = 1$, o comprimento da circunferência é 2π , o que garante que a cada posição de P , ou seja, que a cada ponto da circunferência

associa-se um número real pertencente ao intervalo $[0, 2\pi)$.



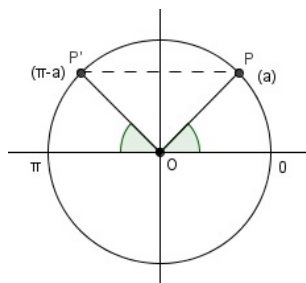
Por exemplo, ao ponto C da figura anterior foi associado o número π . Ao ponto B , foi associado o ponto $\frac{\pi}{2}$. Já a D foi associado o valor $\frac{3\pi}{2}$ e a A , 0 .

Exemplo: na figura abaixo, qual seria o número real associado ao ponto P ?

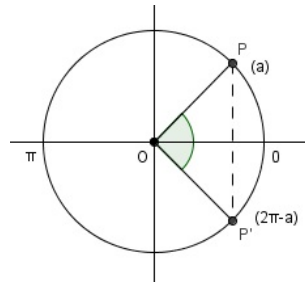


No ciclo trigonométrico, interessam-nos diretamente três tipos de **simetrias**: em relação ao eixo vertical, em relação ao eixo horizontal e em relação ao centro.

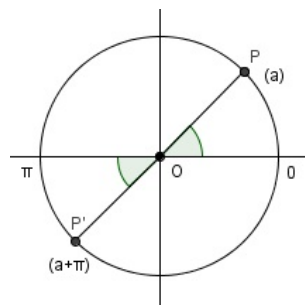
- Em relação ao eixo vertical: Seja P a extremidade do arco de medida a . O simétrico de P em relação ao eixo vertical é o ponto P' , imagem do número $\pi - a$, visto que os ângulos centrais assinalados na figura são congruentes.



- Em relação ao eixo horizontal: Levando em conta a congruência entre os ângulos centrais assinalados na figura, podemos afirmar que o número que possui imagem simétrica à imagem de a é o número $2\pi - a$.



- Em relação ao centro do ciclo: Quando dois pontos são extremidades opostas de um diâmetro, como P e P' da figura, a diferença entre os números correspondentes vale π .



5.3.6 Exercícios Parte 2

1. Construa um ciclo trigonométrico e marque os pontos correspondentes aos números $0, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}$.
2. Use V ou F mostrando a veracidade de sua afirmação:
 - a) Os pontos P representado por $\frac{\pi}{4}$ e P' representado por $\frac{3\pi}{4}$ são simétricos em relação ao eixo vertical.
 - b) Os pontos Q representado por $\frac{\pi}{3}$ e Q' representado por $\frac{5\pi}{3}$ são simétricos em relação ao eixo horizontal.
 - c) Os pontos R representado por $\frac{\pi}{6}$ e R' representado por $\frac{7\pi}{6}$ são simétricos em relação ao centro.
3. Marque num ciclo trigonométrico os pontos correspondentes aos números $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$ e cite a simetria se houver.
4. Marque num ciclo trigonométrico os pontos correspondentes aos números $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{3}$ e cite a simetria se houver.
5. Marque num ciclo trigonométrico os pontos correspondentes aos números $\frac{\pi}{8}$ e $\frac{15\pi}{8}$ e

cite a simetria se houver.

6. Marque num ciclo trigonométrico os pontos correspondentes aos números 0 e π e cite a simetria se houver.

7. (Universidade Federal de Ouro Preto - Minas Gerais) Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 500km em torno de uma pista circular de raio 200m. O número aproximado de voltas que ele deve dar é:

- a) 100 b) 200 c) 300 d) 400 e) 500

8. (Universidade Federal do Amazonas) A medida do menor ângulo central formado pelos ponteiros de um relógio que está marcando 10h30min, em graus, é: a) 150 b) 105 c) 115 d) 120 e) 135

9. (FMU/Fiam/Faam-SP) Uma pessoa dá 5 voltas ao redor de uma praça circular de 32m de raio. Essa pessoa percorre, aproximadamente:

- a) 502,40m b) 1004,80m c) 549,50m d) 175m e) 200,96m

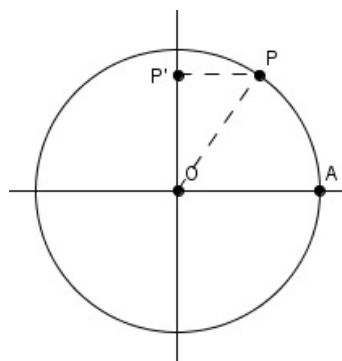
5.3.7 Razões Trigonômétricas na Circunferência

Será de extrema importância daqui para frente que tenhamos conhecimento da seguinte tabela.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

5.3.8 Seno de um Ângulo ou Arco

Seja P um ponto sobre a circunferência, por exemplo, no primeiro quadrante. Ao projetarmos ortogonalmente esse ponto P sobre o eixo vertical, obteremos o ponto P' , conforme a figura a seguir.



Chamaremos daqui em diante de **eixo dos senos** o eixo vertical.

À medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$ damos o nome de **seno** de $\widehat{AP}$, ou seja,

$$\boxed{\widehat{\text{sen}} \widehat{AP} = OP'}$$

Como por definição temos que o raio do ciclo trigonométrico é 1, o segmento $\overline{OP'}$ correspondente ficará sempre interno ao círculo, qualquer que seja a posição assumida por P sobre a circunferência. Sendo assim,

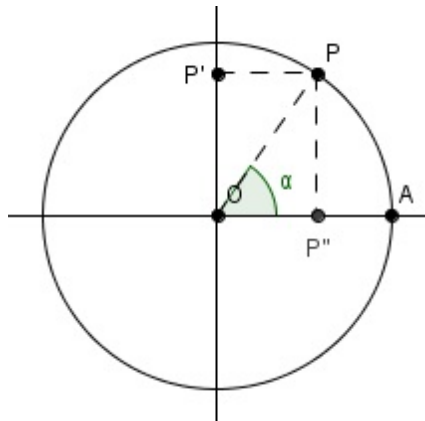
$$\boxed{-1 \leq \widehat{\text{sen}} \widehat{AP} \leq 1}$$

Observe a figura a seguir. Define-se como $\text{sen } \alpha$ a razão:

$$\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}}$$

Dissemos acima que $\text{sen } \alpha = OP'$. De fato,

$$\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{PP'}{OP} = \frac{PP''}{1} = PP'' = OP'}$$



Obs.: Os sinais que o seno assume nos quadrantes são: $+$ no primeiro e no segundo quadrantes e $-$ no terceiro e quarto quadrantes.

Note que, à medida que P avança no 1º quadrante, os valores dos senos dos arcos correspondentes aumentam de 0 a 1; já entre o 2º e o 3º quadrantes, os valores dos senos decrescem, de 1 a -1, para voltar a crescer no 4º quadrante.

A tabela a seguir representa os valores notáveis (ou seja, valores que estamos familiarizados) para a função seno:

	1º quadrante					2º quadrante				3º quadrante				4º quadrante			
Arco (ângulo)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
	crescente					decrecente				decrecente				crescente			

Faremos alguns exemplos a seguir para fixar algumas ideias.

Exemplos:

1. Estabelecer os sinais para pontos simétricos para o $\sin \frac{\pi}{6}$.

2. Estabelecer os sinais para pontos simétricos de $\sin 135^\circ$.

3. Estabelecer os sinais para pontos simétricos de $\sin \frac{11\pi}{6}$.

5.3.9 Exercícios Parte 3

1. Simplifique a expressão $y = \frac{\operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}$.

2. Simplifique a expressão $y = \operatorname{sen} 0 \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{7\pi}{13}}{\operatorname{sen} \frac{8\pi}{5}} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$.

3. Determine $x \in [0, 2\pi)$ tal que:

- a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$
- b) $\operatorname{sen} x = 0$
- c) $\operatorname{sen} x = -1$

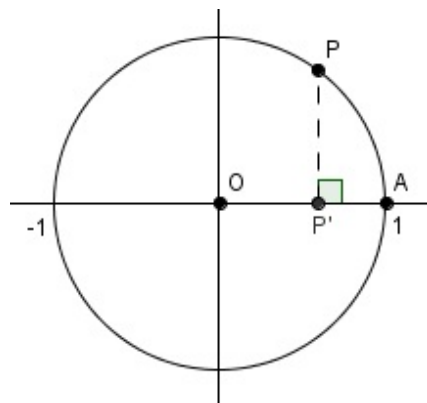
4. Obtenha os valores reais de m para que se possa ter $\operatorname{sen} x = \frac{2-m}{3}$.

5. Sem usar tabelas, responda qual é o seno dos ângulos:

- a) 120°
- b) 135°
- c) 210°
- d) 225°
- e) 315°
- f) 330°

5.3.10 Cosseno de um Ângulo ou Arco

Seja P um ponto sobre a circunferência, por exemplo, no primeiro quadrante. Ao projetarmos ortogonalmente esse ponto P sobre o eixo horizontal, obteremos o ponto P' , conforme a figura a seguir.



Chamaremos daqui em diante de **eixo dos cossenos** o eixo horizontal.

À medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$ damos o nome de **cosseno** de $\widehat{AP}$, ou seja,

$$\boxed{\cos \widehat{AP} = OP'}$$

Como por definição temos que o raio do ciclo trigonométrico é 1, o segmento $\overline{OP'}$ correspondente ficará sempre interno ao círculo, qualquer que seja a posição assumida por P sobre a circunferência. Sendo assim,

$$-1 \leq \cos \widehat{AP} \leq 1$$

Define-se como $\cos \alpha$ a razão:

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Obs.: Os sinais que o seno assume nos quadrantes são: $+$ no primeiro e no quarto quadrantes e $-$ no segundo e terceiro quadrantes.

A tabela a seguir representa sos valores notáveis (ou seja, valores que estamos familiarizados) para a função cosseno:

	1º quadrante				2º quadrante				3º quadrante				4º quadrante			
Arco (ângulo)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
Cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	← decrescente				← decrescente				→ crescente				→ crescente			

Faremos alguns exemplos a seguir para fixar algumas ideias.

Exemplos:

1. Estabelecer os sinais para pontos simétricos de $\cos \frac{\pi}{6}$.

2. Estabelecer os sinais para pontos simétricos de $\cos 210^\circ$.

3. Estabelecer os sinais para pontos simétricos de $\cos \frac{11\pi}{6}$.

5.3.11 Exercícios Parte 4

1. Quais são os valores reais de m para que se tenha $\cos x = 2m - 1$?

2. Calcule o valor da expressão:
$$\frac{\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2}}$$

3. Compare os seguintes valores:

- a) $\cos 65^\circ$ e $\cos 70^\circ$
- b) $\cos 100^\circ$ e $\cos 260^\circ$
- c) $\cos 50^\circ$ e $\cos 340^\circ$
- d) $\cos 91^\circ$ e $\cos 89^\circ$

4. a) Quais são os valores reais de p para que se tenha $1 + \cos x = \frac{2p - 3}{5}$?

- b) Qual é o valor de x quando p assume o menor valor possível?

5. Se $k \in \mathbb{N}$ e $k < 4$, quanto vale a soma dos números da forma $\cos(k \cdot \frac{\pi}{2})$?

6. Determine $x \in [0, 2\pi)$, tal que:

- a) $\cos x = 1$
- b) $\cos x = 0$
- c) $\cos x = \frac{1}{2}$
- d) $\cos x = -\frac{1}{2}$

5.3.12 Tangente de um ângulo ou Arco

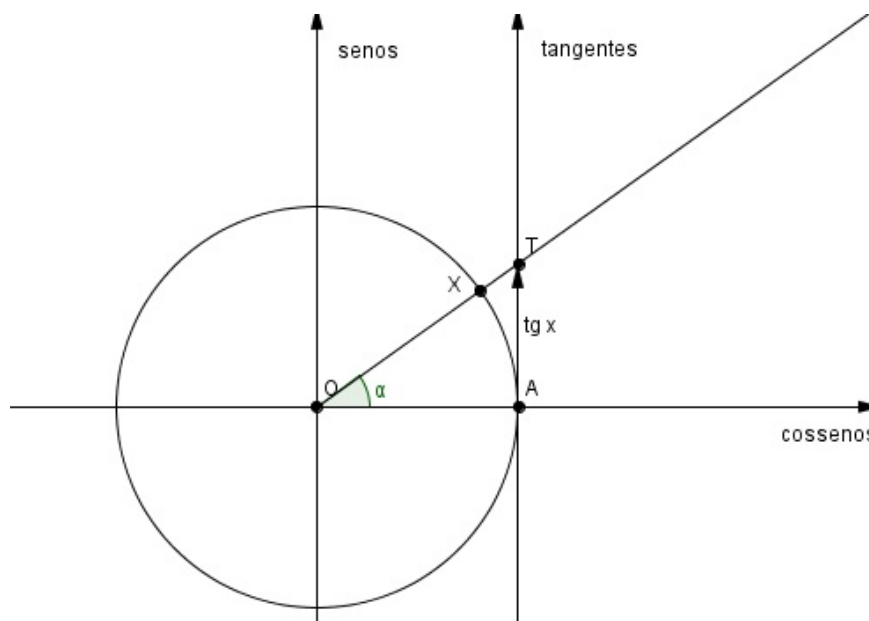
Para estabelecer a tangente de um arco α , é necessário acrescentar um terceiro eixo ao ciclo trigonométrico. O eixo das tangentes é um novo eixo vertical e é obtido ao se tangenciar, por uma reta, o ciclo no ponto A .

Unindo-se o centro O à extremidade do arco α , que não pode ter a extremidade sobre o eixo dos senos, e se prolongarmos esse raio, teremos uma interseção no eixo das

tangentes e chamaremos esse ponto de T .

Por definição, a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$ é a tangente do arco de α rad. A orientação do eixo das tangentes é para cima. Sendo A sua origem e, como no caso presente, sendo α do primeiro quadrante, temos:

$$\boxed{tg \alpha = AT > 0}$$



Define-se como $tg \alpha$ a razão:

$$\boxed{tg \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}}$$

5.3.13 Exercícios Parte 5

1. No ciclo trigonométrico, marque os quadrantes nos quais a função tangente é definida positiva e nos quais a função tangente é definida negativa.
2. Sabendo que $\text{sen } 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e que $\text{cos } 120^\circ = -\frac{1}{2}$, calcule $tg 120^\circ$. Da mesma maneira, calcule a tangente de 45° .
3. Diga para quais $x \in [0, 2\pi)$ a função tangente não está definida e explique sua resposta.

5.3.14 Algumas relações entre Senos e Cossenos

1. $\text{sen } x = \text{cos } (\frac{\pi}{2} - x)$, válida para todo $x \in [0, 2\pi)$.

2. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, válida para todo $x \in [0, 2\pi)$.

3. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Exemplo: Dado que $\sin \frac{1}{3}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, para obtermos $\cos x$, usamos a relação fundamental 3.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

5.3.15 Mais Razões Trigonométricas

Cotangente de um arco:

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Cossecante de um arco:

$$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\sin x}$$

Secante de um arco:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Exemplos:

1. Qual é a $\operatorname{cossec} \frac{5\pi}{4}$?

2. Qual é a $\sec \frac{5\pi}{3}$?

3. Qual é a $\cotg \frac{5\pi}{6}$?

5.3.16 Exercícios Parte 6

1. Forneça os arcos x da primeira volta para os quais não está definida:

- a) $\operatorname{tg} x$
- b) $\sec x$
- c) $\cotg x$
- d) $\operatorname{cossec} x$

2. Calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{\cotg \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \cotg \frac{\pi}{6}}$$

3. Faça uma tabela contendo $\cotg$, $\sec$ e cossec para os ângulos de 30° , 45° e 60° .

5.3.17 Relações Trigonométricas Adicionais

- $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$
- $\cotg^2 x + 1 = \operatorname{cossec}^2 x$

5.4 Exercícios Adicionais

1. (UF-ES) Suponha que, diariamente, uma colônia de formigas, partindo de um certo ponto P fixado de uma região plana, percorre completamente a área circular centrado em P , de raio 52m e comprimento de arco 8π metros, retornando ao ponto P ao final do dia. Admitindo que a colônia percorre cada setor circular uma única vez e que, em cada dia, o setor circular percorrido seja adjacente ao setor circular percorrido no dia anterior, conclui-se que o número mínimo de dias necessários para que a colônia percorra a área de um círculo inteiro é:

- a) 13
- b) 14
- c) 15
- d) 16
- e) 17

2. Considere a função quadrática $f(x) = x^2 + x \cos \alpha + \sin \alpha$. Resolva a equação $f(x) = 0$, para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

3. Sendo $\cos \frac{\pi}{12} = p$, calcule $\sin \frac{5\pi}{12}$.

4. (Cefet-MG) Os valores de x de modo que a expressão $\cos \alpha = \frac{2x^2-3}{5}$ exista, são:

- a) $-1 \leq x \leq 1$
- b) $-2 \leq x \leq 2$
- c) $-1 \leq x \leq 2$
- d) $1 \leq x \leq 2$
- e) $-2 \leq x \leq -1$ ou $1 \leq x \leq 2$

5. (Mackenzie-SP) A soma dos valores máximo e mínimo de $2 + \frac{2}{3} \cos^2 x$ é:

- a) $\frac{8}{3}$
- b) $\frac{10}{3}$
- c) 4
- d) $\frac{14}{3}$
- e) $\frac{16}{3}$

6. (UF-PB) Qual o maior valor da constante real k , para que a equação $3 \sin x + 13 = 4k$ possua solução?

7. (Mackenzie-SP) Sejam $f(x) = 2 - \cos x$, com $0 \leq x \leq 2\pi$, M o valor máximo de $f(x)$ e m o seu valor mínimo. O valor de $\frac{M}{2m}$ é:

- a) $\frac{3}{2}$
- b) $\frac{2}{3}$
- c) 3
- d) $\frac{1}{6}$
- e) $\frac{1}{3}$

8. (Cefet-MG) Dados os números reais a e b , com $\frac{\pi}{2} \leq a \leq b$, é falso afirmar que:

- a) $\operatorname{tg} a < \operatorname{tg} b$
- b) $\cos a > \cos b$
- c) $\sin a > \sin b$
- d) $\sec a > \sec b$
- e) $\operatorname{cosec} a < \operatorname{cosec} b$

9. (UF-PI) O menor valor de $\frac{3}{5+\sin x}$, para $x \in \mathbb{R}$ é:

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{3}{4}$
- c) $\frac{1}{5}$
- d) 1
- e) $\frac{2}{7}$

10. Calcular os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 6 cm e um dos ângulos mede 60° .

11. Quando o ângulo de elevação do sol é de 65° , a sombra de um edifício mede 18m. Calcule a altura do edifício. ($\sin 65^\circ = 0,9063$, $\cos 65^\circ = 0,4226$ e $\operatorname{tg} 65^\circ = 2,1445$)

12. Quando o ângulo de elevação do sol é de 60° , a sombra de uma árvore mede 15m.

Calcule a altura da árvore.

13. Uma escada encostada em um edifício tem seus pés afastados a 50 m do edifício, formando assim, com o plano horizontal, um ângulo de 32° . Qual é a altura do prédio, aproximadamente? ($\sin 32^\circ = 0,5299$, $\cos 32^\circ = 0,8480$ e $\operatorname{tg} 32^\circ = 0,6249$).

14. Um avião levanta vôo sob um ângulo de 30° . Depois de percorrer 8 km, o avião se encontra a qual altura?

15. Calcule a medida da altura de um triângulo equilátero de lado 20 cm.

16. Um alpinista deseja calcular a altura de uma encosta que vai escalar. Para isso, afasta-se, horizontalmente, 80 m do pé da encosta e visualiza o topo sob um ângulo de 55° com o plano horizontal. Calcule a altura da encosta. (Dados: $\sin 55^\circ = 0,81$, $\cos 55^\circ = 0,57$ e $\operatorname{tg} 55^\circ = 1,42$)

17. Um guarda florestal, postado numa torre de 20 m no topo de uma colina de 500 m de altura, vê o início de um incêndio numa direção que forma com a horizontal um ângulo de 30° . A que distância aproximada da colina está o fogo?

18. Quais são os valores de y que satisfazem a ambas as igualdades:

a) $\sin(x) = \frac{y+2}{y}$

b) $\cos(x) = \frac{y+1}{y}$

19. Mostre que a função definida por $f(x) = \cos(x)$ é par, isto é, $\cos(-a) = \cos(a)$, para qualquer a real.

20. Mostre que a função definida por $f(x) = \sin(x)$ é ímpar, isto é, $\sin(-a) = -\sin(a)$, para qualquer a real.

21. Se x pertence ao segundo quadrante e $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{26}}$, calcular o valor de $\operatorname{tg}(x)$.

Capítulo 6

Funções Trigonômétricas Diversas

6.1 As demais voltas no ciclo trigonométrico

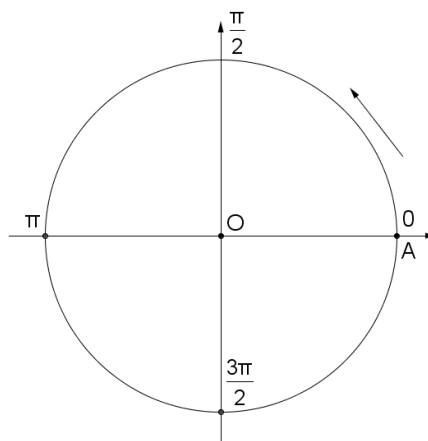
Quando estabelecemos o ciclo trigonométrico, associamos a cada par de ponto da circunferência um número real pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Essa associação possui caráter biunívoco, ou seja, além de a cada ponto da circunferência estar relacionando um número x , $x \in [0, 2\pi]$, também inversamente, a cada número desse intervalo associa-se um ponto sobre a circunferência trigonométrica.

Entretanto, por motivos didáticos, a partir de agora faremos outra associação:

A cada número real está associado um ponto da circunferência. Isso permitirá a definição das funções circulares (ou funções trigonométricas), além de garantir o seu caráter cíclico (ou periódico).

Até agora trabalhamos apenas na primeira volta, ou seja, para valores de x variando no intervalo $[0, 2\pi]$.

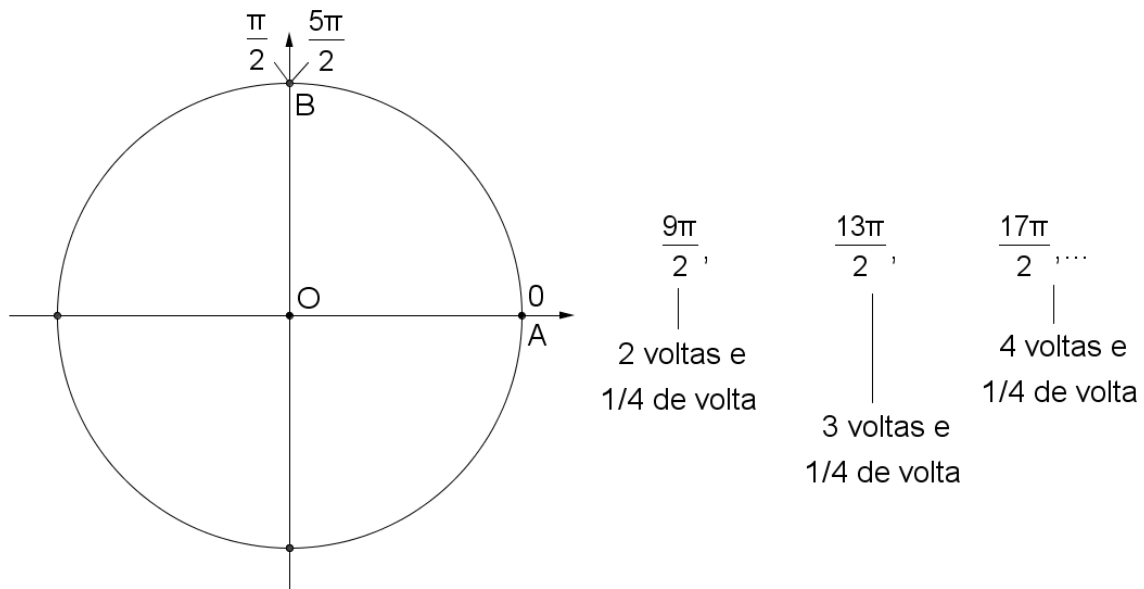


Com a inclusão dos números negativos e dos maiores que (ou iguais a) 2π , poderemos trabalhar nas demais voltas do ciclo. Como isso é feito?

Tomemos um número real x , tal que $x \geq 2\pi$; por exemplo, $x = \frac{5\pi}{2}$. Desmembrando-o convenientemente, temos:

$$x = \frac{5\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

Associamos, então, ao número $\frac{5\pi}{2}$ o ponto B da figura, o qual é a imagem também do número $\frac{\pi}{2}$. Há outros infinitos números reais maiores que 2π e que possuem a mesma imagem do ponto B . Entre eles são:



Por outro lado, tomemos o número real negativo $x = -\frac{3\pi}{2}$.

Como foi estabelecido como positivo sentido anti-horário, o sinal negativo significa percurso de $\frac{3\pi}{2}$ $\left(\frac{3}{4}\right)$ de volta no sentido horário, o que conduz novamente ao ponto

B . Assim, como esse, infinitos números negativos possuem a mesma imagem B : $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{11\pi}{2}$, $-\frac{15\pi}{2}$, etc.

Generalizando, podemos escrever que todos números da forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, possuem a mesma imagem B . Para verificar esse fato, basta substituir k por qualquer valor inteiro e obter, entre outros, os números dados como exemplos.

Fazendo:

$$k = -2 \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2}$$

$$k = -1 \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
k = 0 &\rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \\
k = 1 &\rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \\
k = 2 &\rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}
\end{aligned}$$

Todos os arcos de origem A e extremidade em B (diferindo apenas por um número inteiro k de voltas) apresentam como medidas, em radianos, os números obtidos acima e são considerados arcos congruos entre si.

A inserção da variável inteira k possibilita a escrita de todos esses arcos de uma forma generalizada:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Daqui em diante, ao citarmos qualquer número real, estaremos nos referindo indistintamente a tal número ou a um arco de medida igual a ele.

Assim, o número $\frac{5\pi}{2}$ é um dos números cuja imagem é B , como também é um arco de extremidade B e de medida $\frac{5\pi}{2}$ rad.

No exemplo, o arco $\frac{\pi}{2}$ é chamado primeira determinação positiva dos arcos da forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pois o único representante desses arcos que se encontra na primeira volta, retrata o menor valor positivo que a expressão $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ assume.

6.2 Funções Periódicas

Existem muitas funções $y = f(x)$ que repetem valores de y para um determinado acréscimo no valor de x . Por exemplo, a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} | f(x) = (-1)^x$ é uma delas. Veja a tabela:

x	$f(x) = (-1)^x$
0	1
1	-1
2	1
3	-1
4	1
5	-1

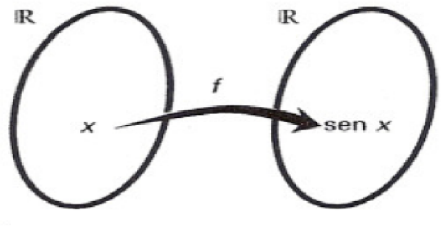
Funções como essa são chamadas periódicas. Uma definição formal para função periódica seria:

Definição 6.2.1. Uma função $f(x)$ de domínio D é periódica se existir $p \in \mathbb{R}$ tal que $f(x + p) = f(x), \forall x \in D$. Nessas condições, o menor valor de p para que isso ocorra é chamado período de f .

Como, para a função acima, ocorre $f(x) = f(x+2) = f(x+4) = \dots$, o seu período vale $p = 2$.

6.3 Função Seno

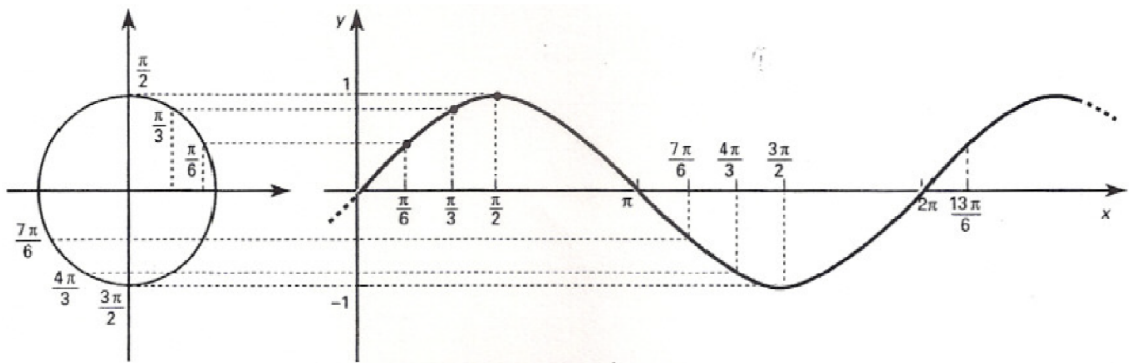
Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo que associa cada número real x ao $\text{sen } x$. O domínio e a imagem de f , são respectivamente, os conjuntos: $D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.



6.3.1 Gráfico da função $y = \text{sen } x$

x	$y = \text{sen}(x)$
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

$$D = \mathbb{R}; Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}.$$



Observação:

Se uma função f , de domínio D , satisfaz a condição $f(p+x) = f(x)$, para qualquer $x \in D$, se p é o menor valor positivo que satisfaz tal condição, então dizemos que a função f é periódica e que seu período é p . Note que a função seno satisfaz as condições:

$$\text{sen}(2\pi + x) = \text{sen } x$$

$$\text{sen}(4\pi + x) = \text{sen } x$$

$$\text{sen}(6\pi + x) = \text{sen } x$$

$$\vdots$$

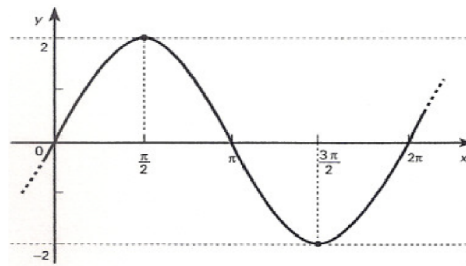
$$\sin(k \cdot 2\pi + x) = \sin x, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

O menor número positivo p tal que $\sin(x + p) = \sin x$ é $p = 2\pi$. Portanto, a função seno é periódica e seu período é $p = 2\pi$.

Exemplo 6.3.1. Esboce o gráfico da função $y = 2 \sin x$

x	$y = \sin(x)$	$y = 2 \sin(x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
2π	0	0

$$D = \mathbb{R}; \text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}.$$



6.3.2 Exercícios

1. Esboce o gráfico de cada uma das funções:

(a) $y = 3 \sin x$

(b) $y = -4 \sin x$

(c) $y = 3 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

(d) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

(e) $y = 2 + 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

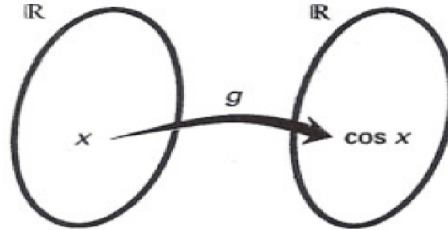
2. Para quais valores de k a equação $\sin x = 3k - 1$ admite solução?

3. Determine os valores de k de modo que exista a igualdade $2 \sin x = 3k + 1$.

4. Para quais valores de k podemos ter $\sin x^2 = 2k - 1$?

6.4 Função Cosseno

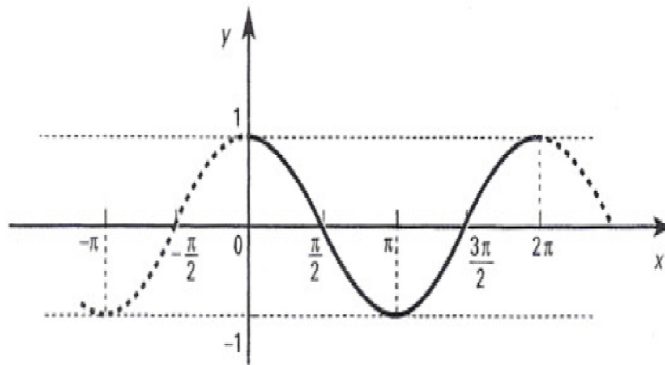
Consideramos a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo que associa cada número real x ao $\cos x$. O domínio e a imagem de g , são respectivamente, os conjuntos: $D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.



6.4.1 Gráfico da função $y = \cos x$

x	$y = \cos(x)$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

Observação: Sabemos que $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; então o gráfico da função $y = \cos(x)$ é o gráfico da função $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, isto é:

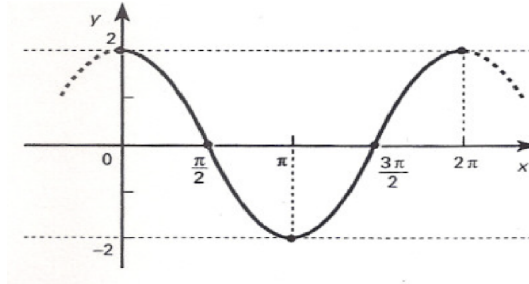


$D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$; período $p = 2\pi$.

Exemplo 6.4.1. Esboce o gráfico da função $y = 2 \cos(x)$

Resolução

x	$\cos(x)$	$2 \cos(x)$
0	1	2
$\frac{\pi}{2}$	0	0
π	-1	-2
$\frac{3\pi}{2}$	0	0
2π	1	2



$$D = \mathbb{R}; \text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}.$$

6.4.2 Exercícios

1. Esboce os gráficos de cada uma das funções:

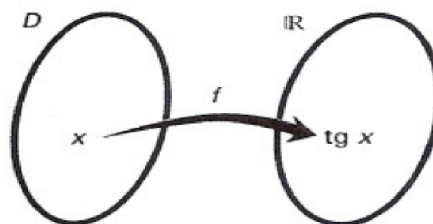
- (a) $y = \cos x$
- (b) $y = \cos(4x)$
- (c) $y = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
- (d) $y = \cos\left(x - \frac{x}{4}\right)$
- (e) $y = -3 + \cos x$

2. Para quais valores de k podemos ter $\cos x = 2k - 5$?

3. Para quais valores de k a equação $\cos^2 x = 3k - 2$ admite solução?

6.5 Função Tangente

Consideremos o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Chama-se **função tangente** a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada x , $x \in D$, a $\text{tg } x$.

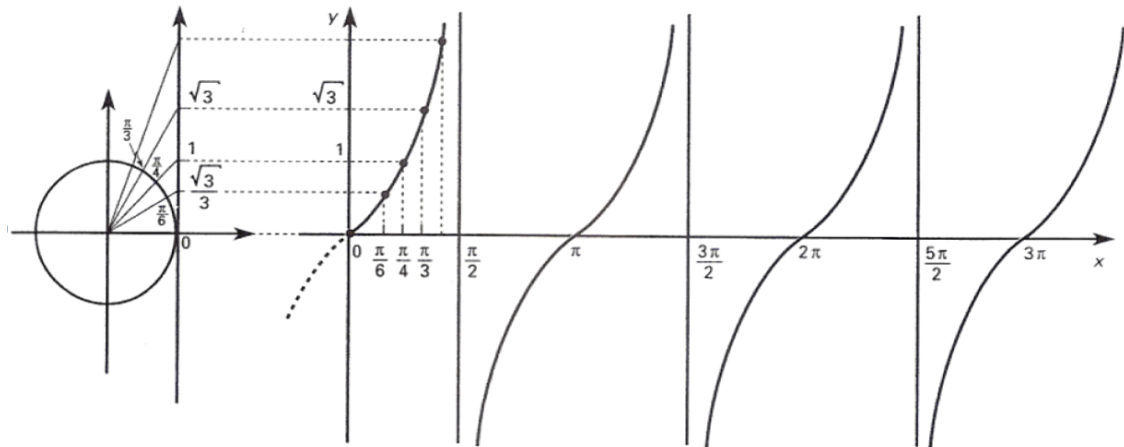


O domínio e a imagem de f são, respectivamente, os conjuntos:

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

6.5.1 Gráfico da função $y = tg(x)$

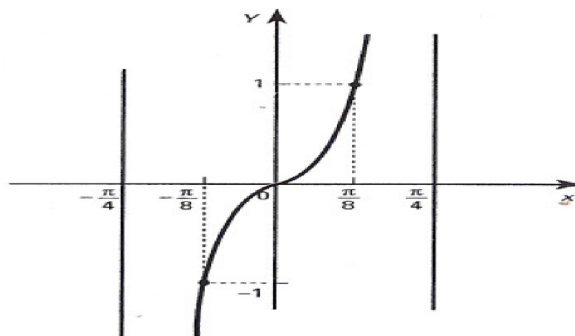


$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}; Im(f) = \mathbb{R}; p = \pi$$

Exemplo:

Esboce o gráfico da função $y = tg(2x)$

x	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\nexists$



$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}; Im = \mathbb{R}; p = \frac{\pi}{2}$$

6.5.2 Exercícios

1. Esboce o gráfico de cada uma das funções:

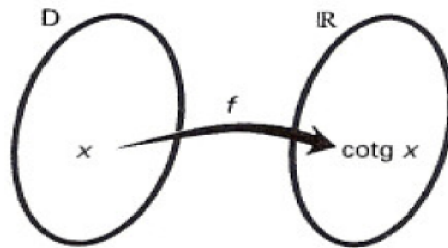
(a) $y = \operatorname{tg} 3x$

(b) $y = 3 + \operatorname{tg} 2x$

(c) $y = |\operatorname{tg} x|$

6.6 Função Cotangente

Consideremos $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Chama-se **função cotangente** a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada $x, x \in D$, a $\cotg x$.



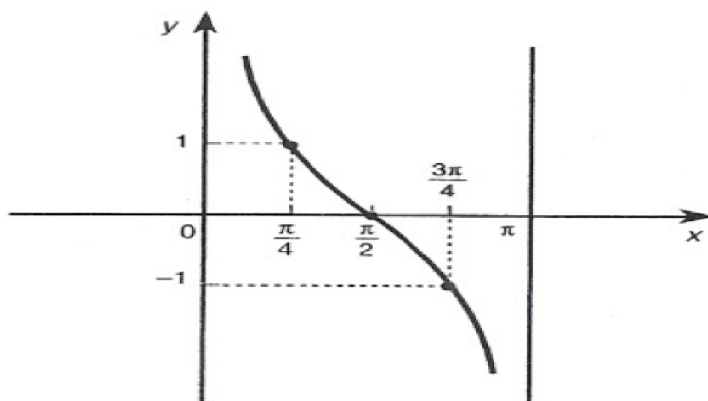
O domínio e a imagem de f são respectivamente os conjuntos: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

6.6.1 Gráfico da função $y = \cotg x$

Sabemos que $\cotg x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$. Logo o gráfico de $y = \cotg x$ é o gráfico de $y = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$. Observe a tabela:

$\frac{\pi}{2} - x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	π	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
0	$\frac{3\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0	$\nexists$

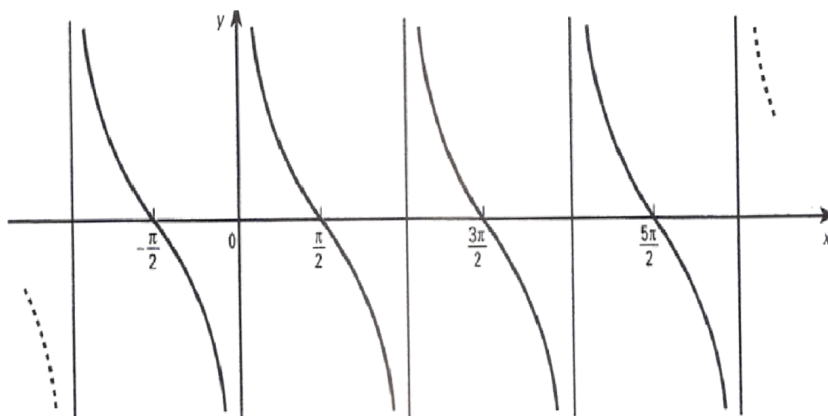
Assim, um período do gráfico é:



$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \text{ e } Im(f) = \mathbb{R}; p = \pi$$

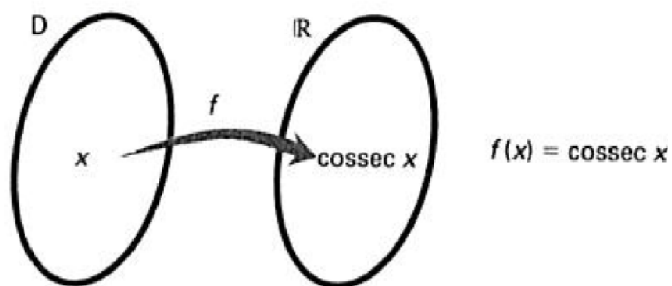
Nota

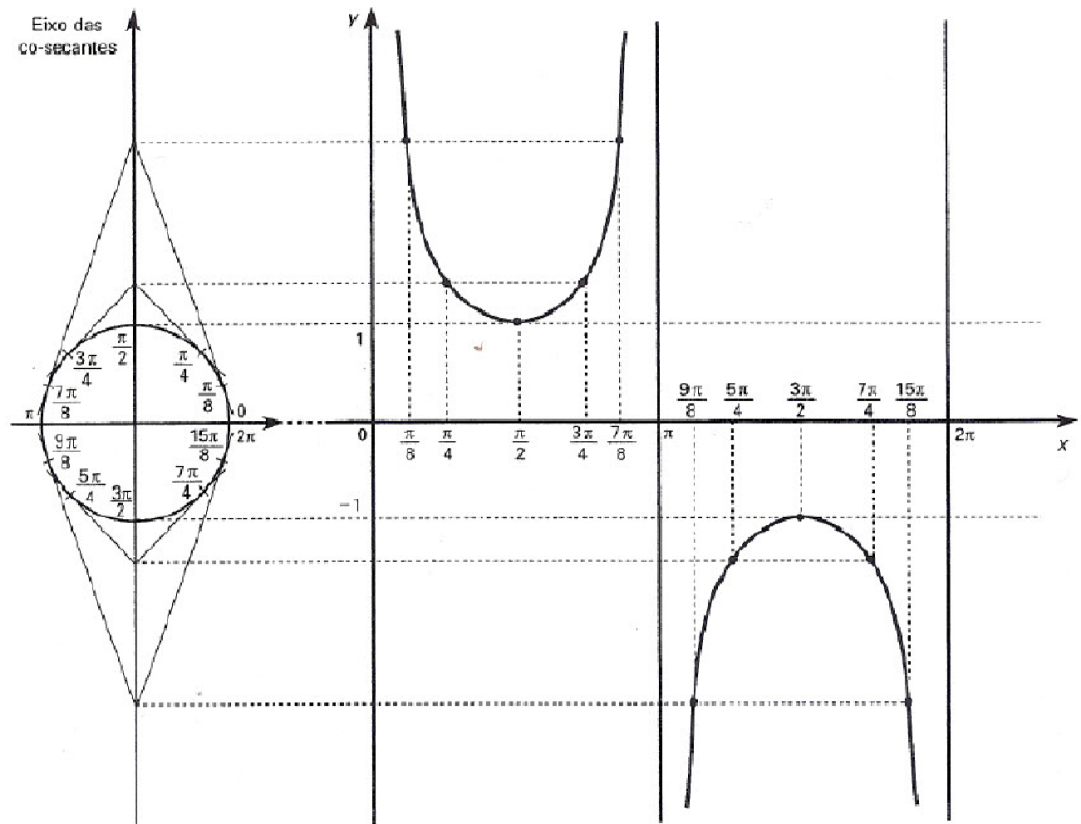
Construímos apenas um período do gráfico da função cotangente. Essa figura se repete indefinidamente:



6.7 Função Cossecante

Seja $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Chama-se **função cossecante** a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número x , $x \in D$, a $\text{cossec } x$.

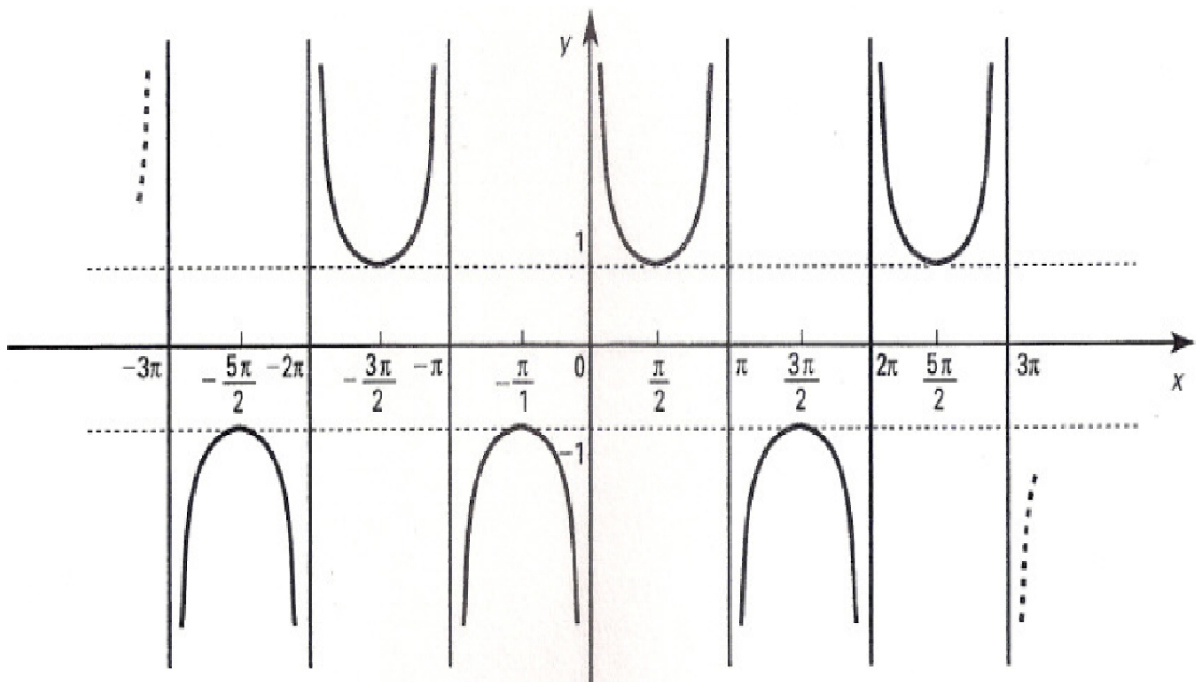


6.7.1 Gráfico da função $y = \operatorname{cossec} x$ 

- O domínio de f é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- O conjunto imagem de f é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$.
- O período de f é $p = 2\pi$.

Nota

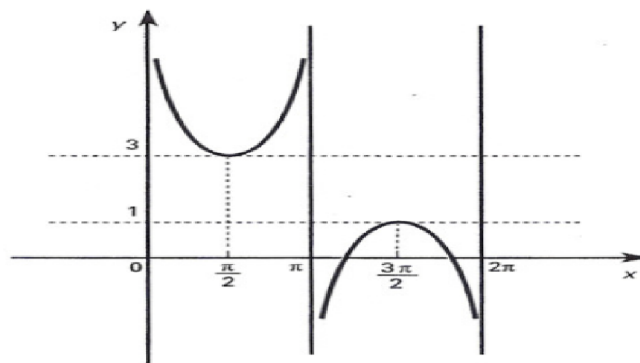
Cosntruímos apenas um período do gráfico da função cossecante. Essa figura se repete indefinidamente.



Exemplo 6.7.1. Exemplo: Esboce o gráfico da função $f(x) = 2 + \operatorname{cosec} x$.

Resolução

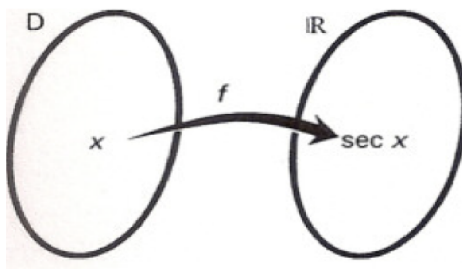
Basta transladar duas unidades verticalmente para cima o gráfico da função $y = \operatorname{cosec} x$. Logo, um período do gráfico da função $f(x) = 2 + \operatorname{cosec} x$ é:



$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}; \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}; p = 2\pi;$$

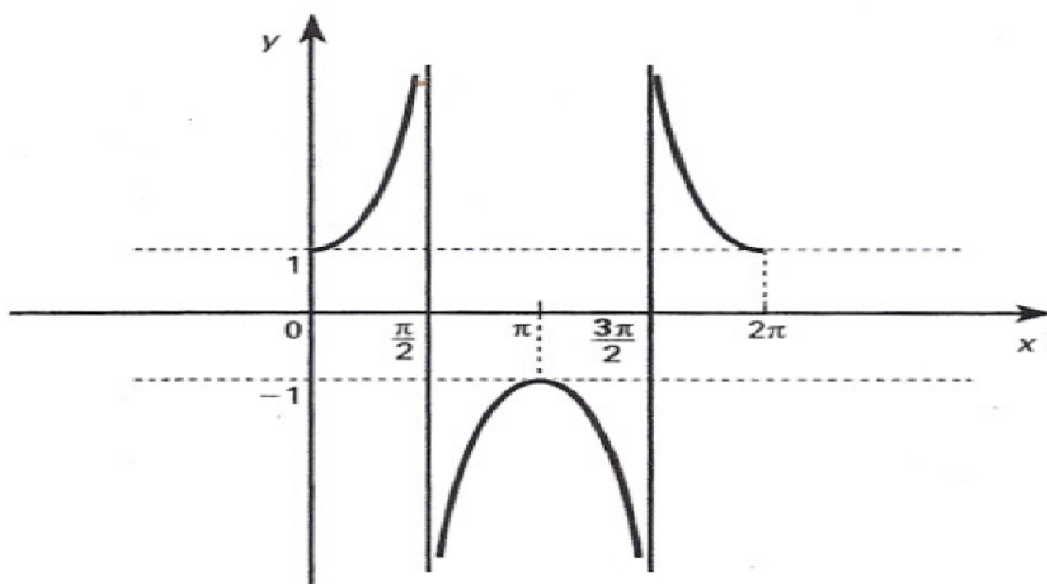
6.8 Função Secante

Seja $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Chama-se **função secante** a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número x , $x \in D$, a $\sec x$.



6.8.1 Gráfico da função $y = \sec x$

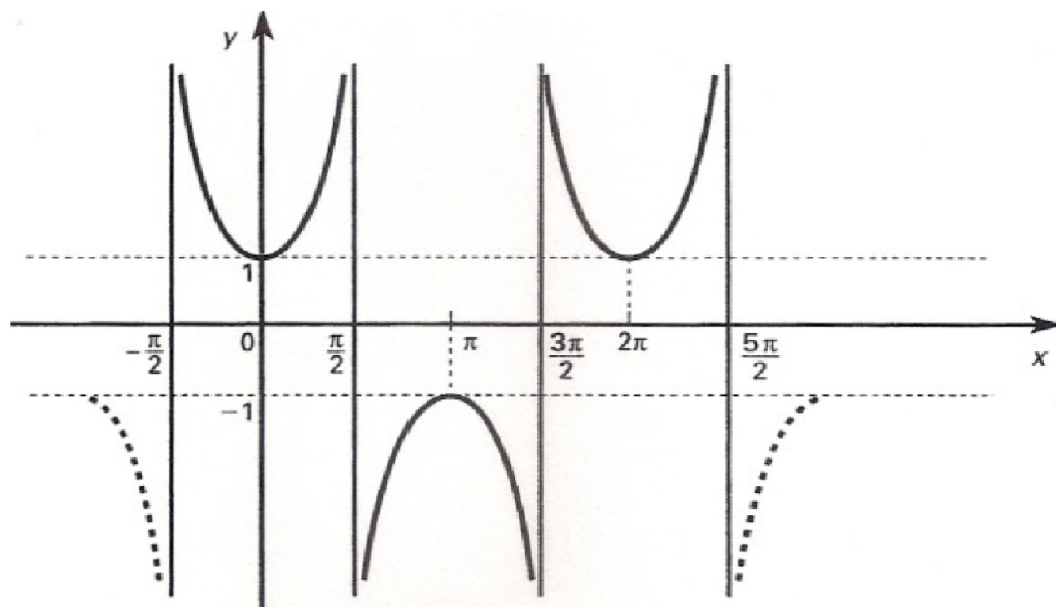
O gráfico da função $f(x) = \operatorname{cosec} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ é obtido por uma translação horizontal para a “esquerda” do gráfico da função $y = \operatorname{cosec} x$. Assim sendo, um período do gráfico da função $f(x) = \sec x$ é:



O domínio de f é $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. O conjunto imagem de f é $Im(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1 \}$. O período de f é $p = 2\pi$.

Nota

Construímos apenas um período do gráfico da função secante. Esta figura se repete indefinidamente:



6.8.2 Exercícios

1. Esboce o gráfico de cada uma das funções:

- (a) $y = -\cotg x$
- (b) $y = |\operatorname{cosec} x|$
- (c) $y = \sec x$
- (d) $y = 3 + \sec x$
- (e) $y = -\sec x$
- (f) $y = -2 + \operatorname{cosec} x$
- (g) $y = 1 + |\cotg x|$

Capítulo 7

Equações e Inequações Trigonométricas

Já apresentamos algumas relações entre as razões trigonométricas de um mesmo arco. Mas nem sempre isso ocorre, há igualdades que são verdadeiras apenas para alguns valores particulares atribuídos à variável correspondente.

Neste capítulo iremos estudar tais relações, aprender como resolvê-las e estudar o conjunto solução da equação dada (que chamamos de *conjunto universo da equação dada*).

7.1 Equações Fundamentais

De modo geral, por mais complicada que possa parecer uma equação, é possível reduzi-la a uma equação de um dos seguintes tipos:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{cos} x = \operatorname{cos} \alpha$$

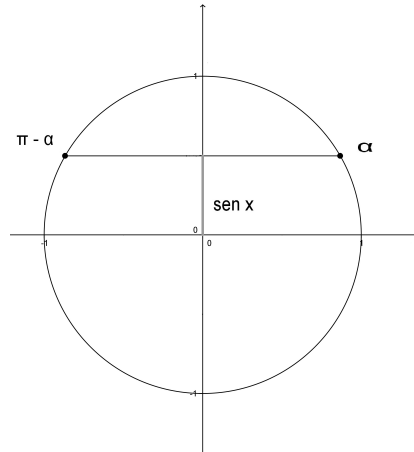
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$$

Sendo x a incógnita e α um arco de medida conhecida. Onde as equações citadas acima são chamadas de *equações fundamentais*.

7.2 Resolução das Equações Fundamentais

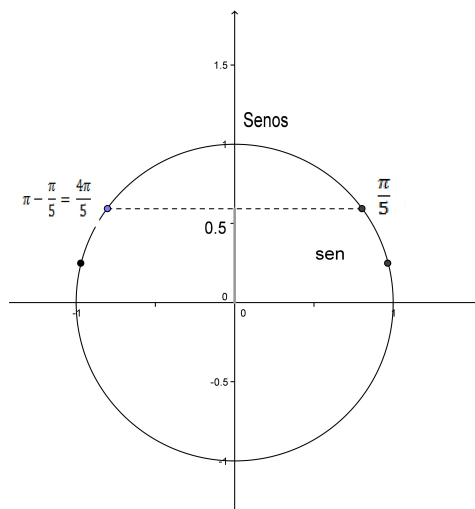
7.2.1 Da equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha$

Para que dois arcos x e α da primeira volta possuam o mesmo seno, é necessário que suas extremidades estejam sobre uma única horizontal. Podemos dizer também que basta que suas extremidades coincidam ou sejam simétricas em relação ao eixo dos senos. Assim, os valores de x que resolvem a equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha$ são $x = \alpha$ ou $x = \pi - \alpha$ (com α conhecido). Veja a figura:



Exemplo 7.2.1. Vamos resolver a equação $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$, no intervalo $[0, 2\pi[$
 Temos

$$x = \frac{\pi}{5} \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$$

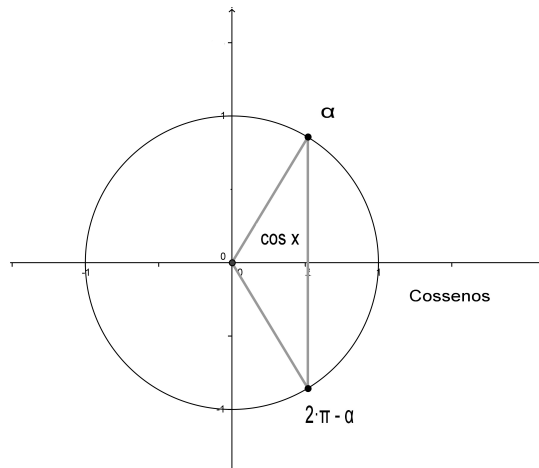


Daí, segue que o conjunto universo será: $S = \left\{ \frac{\pi}{5}, \frac{4\pi}{5} \right\}$

7.2.2 Da Equação $\cos x = \cos \alpha$

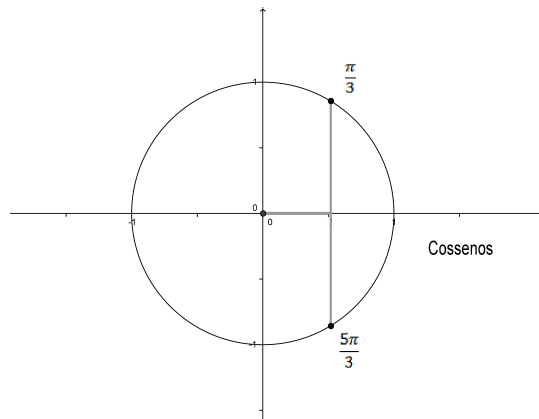
Como no caso do seno, no cosseno também é necessário que as extremidades coincidam ou sejam simétricas em relação ao eixo dos cossenos. Assim, com α dado, os valores de x que resolvem a equação $\cos x = \cos \alpha$ são:

$$x = \alpha \text{ ou } x = 2\pi - \alpha.$$



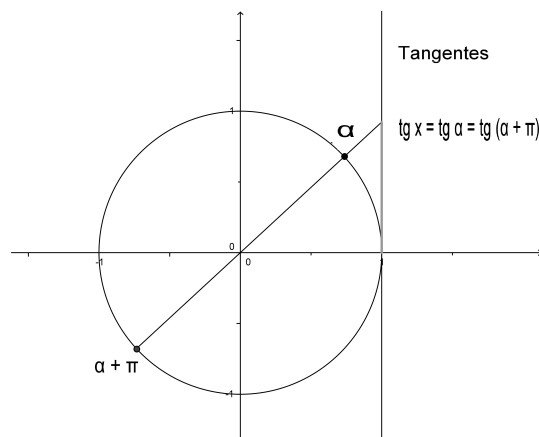
Exemplo 7.2.2. Vamos resolver a equação $\cos x = \cos \frac{5\pi}{3}$, no intervalo $I = [0, 2\pi[$.

Então temos $x = \frac{5\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. Assim, $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$.



7.2.3 Da Equação $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$

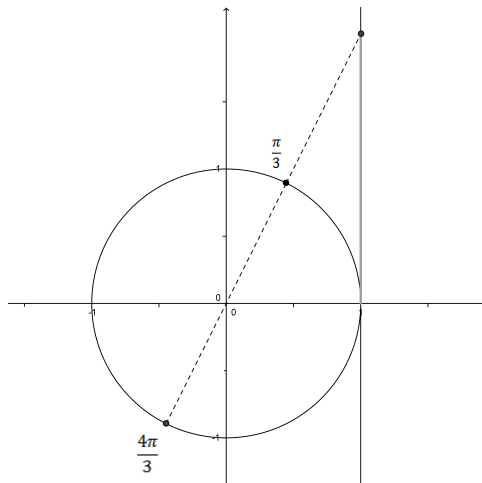
Dois arcos possuem a mesma tangente quando são iguais ou diferem em π radianos, ou seja, têm as extremidades coincidentes ou simétricas em relação ao centro do ciclo. Logo, temos $x = \alpha$ ou $x = \alpha \pm \pi$ como raízes da equação $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$.



Exemplo 7.2.3. Temos a equação $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, considerando x como um arco da primeira volta. Temos:

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Assim } S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}.$$



7.3 Exercícios

Exercícios 7.3.1. Resolva, com $I = [0, 2\pi[$, as seguintes equações:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $1 + \operatorname{sen} x = 0$

c) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}$

Exercícios 7.3.2. Com x na primeira volta do ciclo, resolva:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos x = 0$

c) $\cos x + 1 = 0$

Exercícios 7.3.3. Sendo $I = [0, 2\pi[$, apresente a solução de:

a) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2}$

c) $1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 + \operatorname{sen}^2 x$

Exercícios 7.3.4. Apresente os valores de x , $0 \leq x < 2\pi$, tais que:

a) $\cos x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{10}$

b) $2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

c) $1 - \cos^2 x = 0,25$

Exercícios 7.3.5. Com $I = [0, 2\pi[$, resolva as equações:

a) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$

b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \operatorname{sen} x$

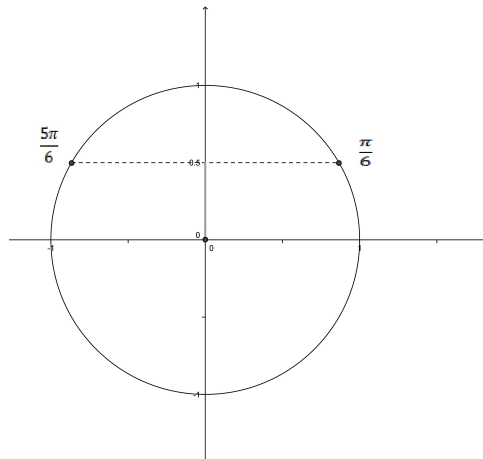
Exercícios 7.3.6. Quantas soluções tem a equação $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} 2\theta$, sabendo que $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$? Tente as soluções gráficas.

Exercícios 7.3.7. Quantas soluções possui a equação $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$ no intervalo $]0, 2\pi[$?

7.4 Solução Geral de uma Equação

Aqui veremos como encontrar o conjunto universo de uma equação o mais amplo possível, de modo que todos os valores atribuídos à incógnita tornem a sentença verdadeira.

Exemplo 7.4.1. Ao resolver a equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ no conjunto dos reais, fazemos:



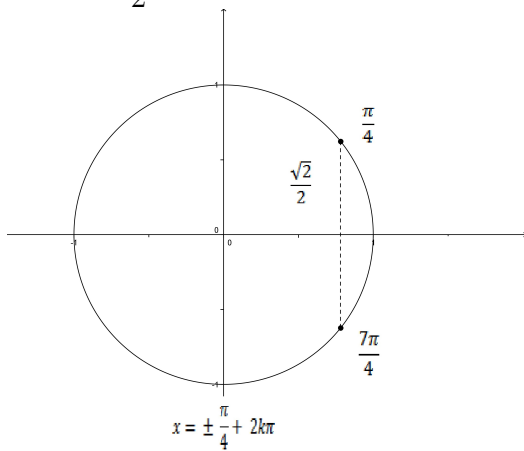
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} &\Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{R} \end{array} \right. \end{aligned}$$

obtendo todos os arcos x (por meio da expressão geral dos arcos x) que tornam verdadeira a sentença $\sin x = \frac{1}{2}$. Portanto:

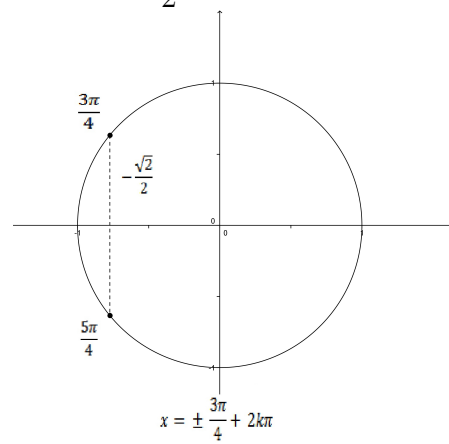
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exemplo 7.4.2. Na resolução se $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, $I = \mathbb{R}$, fazemos $\cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, temos :

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Englobando as soluções parciais, temos $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exemplo 7.4.3. Vamos resolver a $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ no conjunto

$$U = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Como $\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, podemos fazer:

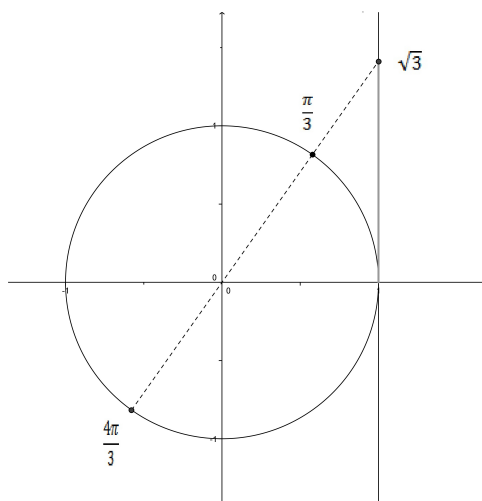
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$$

Considerando a simetria em torno de 0, temos:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

Num único conjunto:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$



7.5 Exercícios

Exercícios 7.5.1. Resolva, sendo $U = \mathbb{R}$

- a) $\sin x = \sin \frac{\pi}{2}$
- b) $\sin x = \sin \frac{\pi}{7}$
- c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercícios 7.5.2. Resolva as equações:

- a) $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$
- b) $\cos x = \cos \frac{1}{2}$
- c) $\cos 3x = 1$

Exercícios 7.5.3. Encontre a solução:

- a) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- b) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$
- c) $\operatorname{tg} x = 0$

Exercícios 7.5.4. (UF - CE) Encontre as soluções da equação $9 - 2 \cos^2 x = 15 \sin x$, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercícios 7.5.5. Resolva em $\mathbb{R}$: $2 \cos^2 \theta - (1 + \cos \theta) = 0$.

Exercícios 7.5.6. (UF - PA) Dê a solução geral da equação: $(\sin 2x + \cos 2x)^2 + \cos^2 4x = \sin 4x + \sin^2 4x$.

Exercícios 7.5.7. (ITA - SP) Obtenha todos os pares (x, y) , com $x, y \in [0, 2\pi[$, tais que: $\sin(x + y) + \sin(x - y) = \frac{1}{2}$ e $\sin x + \cos y = 1$

Exercícios 7.5.8. Obtenha x de modo que:

- a) $\sin x = \cos 2x$
- b) $\cos x = \sin 2x$
- c) $\sin x = -\sin 2x$
- d) $\cos x = \cos 2x$

7.6 Identidades

Numa igualdade pode ocorrer que o domínio e a imagem coincidam, logo todos os elementos do conjunto universo tornam verdadeira a igualdade. Quando isso ocorre, dizemos que se trata de uma identidade. Agora iremos verificar algumas identidades, mas sempre respeito os domínios das funções envolvidas.

Exemplo 7.6.1. Verifiquemos a identidade $\frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x} = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$. Vamos então partir pelo lado direito desenvolvendo-o (em certos casos a análise deve ser feita pelo lado esquerdo, ou até mesmo desenvolvendo os dois lados da igualdade):

$$\begin{aligned} \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x} & \stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{1 + \sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x \cos x + \cos x}{\sin x}} = \\ & = \frac{\frac{1 + \sin x}{\cos x}}{\frac{(1 + \sin x) \cdot \cos x}{\sin x}} \stackrel{(2)}{=} \frac{1 + \sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{(1 + \sin x) \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \cdot \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

Onde em (1) foi usado a definição das funções tangente, cotangente e secante. E em (2) foi simplificada a expressão.

7.7 Exercícios

Exemplo 7.7.1. Verifique as identidades abaixo:

- a) $\frac{\sec x + \sin x}{\operatorname{cosec} x + \cos x} = \operatorname{tg} x$
- b) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{1 + \operatorname{cotg} x}{1 - \operatorname{cotg} x}$
- c) $\sin(a + b) \cdot \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

$$\text{d)} \quad \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos 2x$$

$$\text{e)} \quad 2 \operatorname{cossec} 2x = \sec x \cdot \operatorname{cossec} x$$

$$\text{f)} \quad \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{\operatorname{cossec}}{1 + \cos x}$$

$$\text{g)} \quad \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \sec x \cdot \sec y \cdot \operatorname{sen}(x - y)$$

$$\text{h)} \quad \cotg(\alpha \pm \beta) = \frac{\cotg \alpha \cdot \cotg \beta \mp 1}{\cotg \alpha \pm \cotg \beta}$$

Capítulo 8

Funções Trigonométricas Inversas

Neste capítulo estudaremos as funções inversas de algumas funções trigonométricas já conhecidas. Mas como sabemos, as funções trigonométricas são periódicas, sendo assim não são injetoras e por isso não seriam invertíveis.

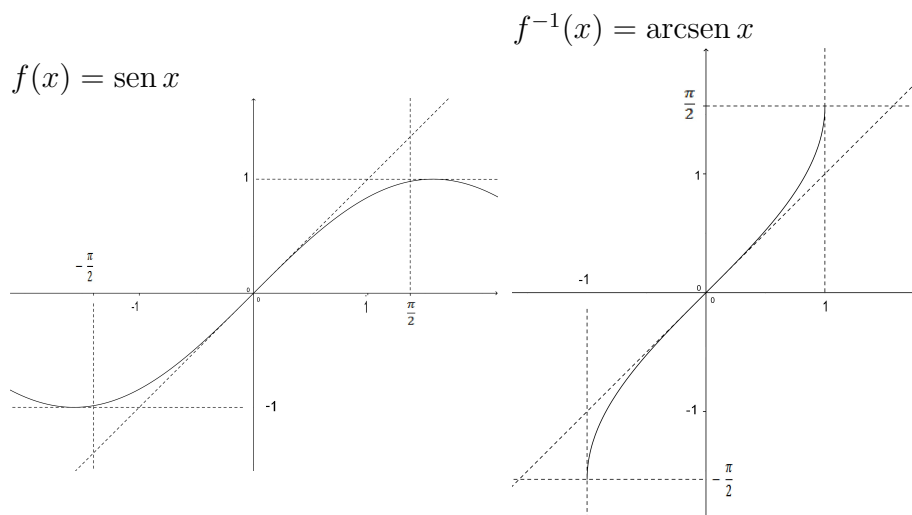
Faremos, então, algumas alterações de modo que se tornem invertíveis, e essas adaptações serão feitas nos domínios das funções, restringindo a intervalos.

8.1 Função arco-seno

Aqui a restrição a ser feita, para que haja apenas um arco nas condições estabelecidas (desde que pertença ao intervalo $[-1, 1]$) é considerar como domínio o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Feita a restrição sobre o domínio da função $f(x) = \sin x$, podemos notar que cada elemento do intervalo $[-1, 1]$ passa a ser imagem exclusiva de um arco de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. E assim ela se torna bijetora.

Analisando graficamente:



A função inversa de $f(x) = \sin x$ é $f^{-1}(x) = \text{arsen } x$; lê-se : “arco-seno x” e entende-se por “arco cujo seno é x”. Associando cada valor do seno (de -1 a 1) o arco correspondente (de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$).

Assim:

$$y = \arcsen x \Leftrightarrow \sen y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 8.1.1. Neste exemplo mostraremos uma notação mais prática e adequada para encontrar os valores do arco correspondente. Queremos encontrar o valor de $\arcsen \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chamamos de α o $\arcsen \frac{\sqrt{2}}{2}$, podemos escrever:

$$\alpha = \arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sen \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Sendo que essa equação possui unicamente a solução $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

8.2 Exercícios

Exercícios 8.2.1. Determine:

a) $\arcsen -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\arcsen 1$

c) $\arcsen \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\arcsen -1$

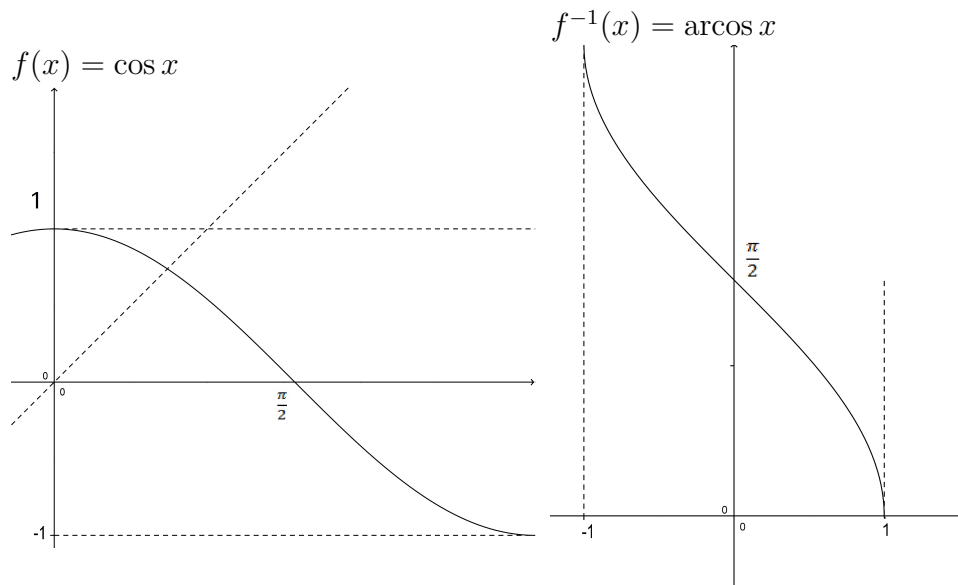
Exercícios 8.2.2. Analise se $f(x) = \arcsen x$ é uma função bijetora, ímpar ou par. Caso seja justifique sua resposta.

Exercícios 8.2.3. Quanto vale $\cos(\arcsen \frac{4}{5} + \arcsen \frac{5}{13})$?

8.3 Função arco-cosseno

Já para a função $f(x) = \cos x$, a restrição a ser feita é considerar o intervalo $[0, \pi]$ como seu domínio, pois nesse intervalo a função decresce de -1 a 1.

Vendo graficamente:



Note que a cada valor de $\cos x$, entre -1 e 1, corresponde um único arco entre 0 e π . Assim a função inversa da função $f(x) = \cos x$ é a $f^{-1}(x) = \arccos x$.

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \text{ e } 0 \leq y \leq \pi$$

Exemplo 8.3.1. Para resolver a equação: $2 \arccos \left(x - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$ devemos fazer

$\arccos \left(x - \frac{1}{2} \right) = \alpha$. Assim, $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

A seguir, $\cos \alpha = x - \frac{1}{2}$.

Como $\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos: $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Daí, $S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right\}$.

8.4 Exercícios

Exercícios 8.4.1. Calcule , se existir:

- a) $\arccos -\frac{1}{2}$
- b) $\arccos 1$
- c) $\arccos \pi$
- d) $\arccos -1$

Exercícios 8.4.2. Resolva as equações:

- a) $\arcsen x = 2 \arcsen \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\arccos x = 2 \arccos 0,5$

c) $\arcsen x = \arccos x$

d) $\arcsen x = \arccos 1$

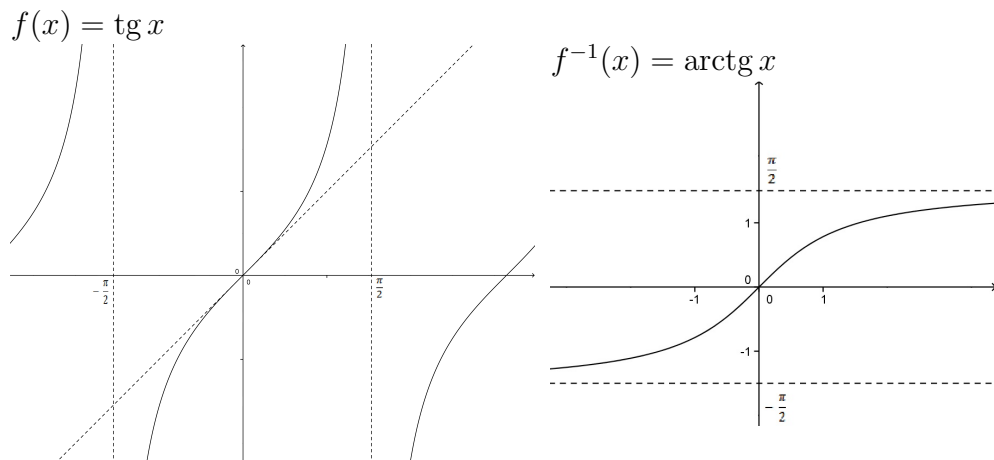
Exercícios 8.4.3. Analise cada afirmação, justificando sua resposta:

a) $f(x) = \arccos x$ é função ímpar ou par.

b) $f(x) = (\arcsen x)^2 + (\arccos x)^2 = 1$

8.5 Função arco-tangente

Como anteriormente, também teremos que ajustar o domínio da função $f(x) = \operatorname{tg} x$, para que possamos encontrar sua inversa. Note que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ não existe, e sendo seu domínio e contradomínio os reais ($\mathbb{R}$), então restringimos a função do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ como domínio e sua imagem permanecendo os reais. Pensando graficamente:



Assim temos que a função inversa de $f(x) = \operatorname{tg} x$ será $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$.

$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 8.5.1. Para encontrar o valor de $A = 3 \operatorname{arctg} \sqrt{3}$, temos

$$\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{3} \implies \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

e daí, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e $A = 3\alpha = \pi$.

8.6 Exercícios

Exercícios 8.6.1. Ache, se existir:

- a) $\operatorname{arctg} 1$
- b) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$
- c) $\operatorname{arctg} -1$
- d) $\operatorname{arctg} -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercícios 8.6.2. Calcule cada soma:

- a) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$
- b) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$
- c) $-\operatorname{arctg}(-2) + \operatorname{arctg}(-1)$
- d) $\cos(\operatorname{arctg} \sqrt{3}) + \sin(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2})$

Exercícios 8.6.3. (UF - GO) Calcule o seno e o cosseno do ângulo $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, sendo θ medido em radianos, sabendo que $\theta = \operatorname{arctg}(-4\sqrt{3})$.

Parte III

PA e PG, Exponencial e Logaritmos

Capítulo 9

Sequência

Sequência numérica é uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Normalmente, indicamos uma sequência apenas pelo conjunto das imagens. Para dar um exemplo, vejamos os anos em que ocorreram os Jogos Olímpicos da era moderna:

ANO	EDIÇÃO
1896	I
1900	II
1904	III
1906	IV
1908	V
1912	VI
1916	VII
1920	VIII
1924	IX
1928	X
1932	XI
1936	XII
1948	XIII
1952	XIV
1956	XV
1960	XVI
1964	XVII
1968	XVIII
1972	XIX
1976	XX
1980	XXI
1984	XXII
1988	XXIII
1992	XXIV
1996	XXV
2000	XXVI

ANO EDIÇÃO

2004	XXVII
2008	XXVIII
2012	XXIX

Se selecionarmos apenas os anos e o número da edição, temos uma sequência, onde 1896 é a imagem de 1, 1900 é a imagem de 2, e assim em diante. Normalmente, chamamos o primeiro termo de a_1 , o segundo termo de a_2 e consequentemente o n -ésimo termo de a_n . Então, uma sequência de n termos é indicada por:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

Os elementos de uma sequência são geralmente determinados por uma lei. Esta é chamada de lei de formação. Exemplo: $a_n = 2n - 1$. Temos, neste caso:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \cdot 1 - 1 \\ a_2 &= 2 \cdot 2 - 1 \\ a_3 &= 2 \cdot 3 - 1 \\ a_4 &= 2 \cdot 4 - 1 \\ &\vdots \\ a_n &= 2 \cdot n - 1 \end{aligned}$$

Podemos concluir então que o conjunto de números ímpares pode ser escrito como uma sequência, onde a lei de formação é: $a_n = 2 \cdot n - 1$.

Uma sequência pode ser crescente, decrescente, constante ou oscilante. Se a sequência é crescente, então $\forall n, a_{n+1} > a_n$. Se é decrescente, então $\forall n, a_{n+1} < a_n$. Se é constante, então $\forall n, a_{n+1} = a_n$. Se é oscilante, como o próprio nome diz, ela oscila, de forma com que nem sempre é possível saber o comportamento do próximo termo. Além disso, as sequências podem ter finitos ou infinitos termos.

Exemplos:

- $(2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ é uma sequência crescente, pois ordena os números primos de ordem crescente. Além disso, tem infinitos termos, pois os naturais primos são ilimitados.
- $(24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1)$ é uma sequência decrescente, pois ordena os divisores de 24 de forma decrescente. Além disso, tem 8 termos, sendo assim obviamente uma sequência de termos finitos.
- $(1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ é uma sequência constante, pois todos os termos desta são iguais a 1. Neste caso, ela tem infinitos termos.
- $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots\right)$ é uma sequência oscilante, pois os termos se alteram entre valores negativos e positivos, não havendo um padrão crescente, decrescente ou constante. Além disso, possui infinitos termos.

Capítulo 10

Progressões

10.1 Progressão Aritmética

Progressões aritméticas são um tipo de sequência, no qual a diferença entre um termo qualquer, a partir do segundo, e seu termo antecedente é sempre a mesma. Esta é a diferença chamada de razão, sendo representada pela letra r . A lei de formação de uma P.A é: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, onde $r \in \mathbb{R}$ e a_1 é o primeiro termo. Uma progressão aritmética, sendo um tipo restrito de sequência, pode ser apenas crescente, decrescente ou constante. Ela é considerada crescente se $r > 0$. Se $r < 0$, ela é decrescente. Se $r = 0$, ela é constante.

Diz uma lenda que Carl Friedrich Gauss, considerado por muitos o maior matemático de todos os tempos, aos dez anos de idade, recebeu uma tarefa de seu professor de somar todos os números naturais de 1 a 100. Esta sequência é claramente uma progressão onde $a_1 = 1$ e $r = 1$. O menino Gauss, ao invés de somar termo por termo, percebeu algo interessante: $(1 + 100) = (2 + 99) = (3 + 98) = \dots = 101$, ou seja, que os elementos dos extremos, somados, resultavam em um mesmo valor. Assim, como ele sabia que existiam 100 termos, fez uma simples conta: $101 \cdot 50 = 5050$. Assim ele mostrava, mesmo criança, que podemos calcular a soma de uma progressão aritmética.

10.1.1 Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética

Em uma P.A, podemos sempre somar qualquer número de termos consecutivos que desejarmos. Vejamos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Mas podemos escrever cada a_n como $a_1 + (n-1) \cdot r$. Então temos:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \dots + (a_1 + (n-1) \cdot r)$$

Além disso, podemos escrever de forma contrária, ou seja.

$$S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \dots + (a_n - (n-1) \cdot r)$$

Podemos agora somar as duas equações escritas anteriormente e deduzirmos uma fórmula.

$$\begin{array}{r}
 + \quad \begin{array}{l} S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \dots + (a_1 + (n-1) \cdot r) \\ S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) \dots + (a_n - (n-1) \cdot r) \end{array} \\
 \hline
 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)
 \end{array}$$

Perceba que na equação acima, $(a_1 + a_n)$ se repete n vezes, visto que este é o número de termos que estão sendo somados. Assim, temos a fórmula da soma:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

10.1.2 Exercícios Resolvidos

1- Qual o 17º termo da P.A. $(5, 12, 19, \dots)$

Sabemos que $a_2 = a_1 + r$. Então $r = a_2 - a_1$. Neste caso, $r = 12 - 5 = 7$. Então $a_1 = 5$ e $r = 7$.

Logo, $a_{17} = 5 + 16 \cdot 7 = 5 + 112 = 117$.

R: **117**

2- Determine a Progressão Aritmética cuja soma de a_2 e $a_7 = 2$, e $a_5 = 4$.

$$\begin{array}{l}
 a_2 = a_1 + r \\
 a_7 = a_1 + 6r \\
 \hline
 (a_2 + a_7) = (a_1 + a_1) + (r + 6r) \\
 2 = 2a_1 + 7r
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 a_5 = a_1 + 4r \\
 4 = a_1 + 4r \\
 a_1 = 4 - 4r
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2 = 2a_1 + 7r \\
 2 = 2 \cdot (4 - 4r) + 7r \\
 2 = 8 - 8r + 7r \\
 -6 = -r \\
 r = 6
 \end{array}$$

$$a_1 = 4 - 4r = 4 - 4 \cdot 6 = 4 - 24 = -20.$$

Então, a P.A. será: $(-20, -20 + 6, -20 + 12, \dots)$

R: $(-20, -14, -8, \dots)$

- 3- Determine x de modo que a sequência $(x + 2, x^2, 5x - 2)$ seja uma Progressão Aritmética.

$$a_1 = a_2 - r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$2 \cdot a_2 = (a_1 + a_3)$$

Utilizando a propriedade dada anteriormente, temos que:

$$(x + 2) + (5x - 2) = 2 \cdot (x^2)$$

$$6x = 2x^2$$

$$2 \cdot (x^2 - 3x) = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau, temos que $x = 0$ ou $x = 3$. Assim, temos duas progressões que se encaixam na resposta do problema. $(2, 0, -2, \dots)$ e $(5, 9, 13, \dots)$

R: $(2, 0, -2, \dots)$ **ou** $(5, 9, 13, \dots)$

- 4- Escreva qual a sequência através da interpolação de sete meios aritméticos entre 4 e 28.

O que temos de fazer neste exercício é achar uma progressão aritmética onde existam sete termos entre 4 e 28. Ou seja, $a_1 = 4$ e $a_9 = 28$.

$$a_9 = a_1 + 8 \cdot r$$

$$28 = 4 + 8 \cdot r$$

$$24 = 8 \cdot r$$

$$r = 3$$

R: $(4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, \dots)$

5- Encontre três termos em P.A., cuja soma dos três é 24 e o produto dos três é 312.

Podemos escrever os termos como $(x - r, x, x + r)$. Desta forma, chegamos às seguintes equações:

$$\begin{aligned}(x - r + x + x + r) &= 24 \\ [(x - r) \cdot (x + r) \cdot (x)] &= 312\end{aligned}$$

Resolvendo a primeira, temos $x = 8$. Fazemos a substituição na segunda equação:

$$(8 - r) \cdot (8 + r) = \frac{312}{8}$$

$$(8^2 - r^2) = 39$$

$$r^2 = 25$$

$$r = 5 \text{ ou } r = -5$$

Portanto os três termos são: $[(8 - 5), 8, (8 + 5)]$ ou $[(8 + 5), 8, (8 - 5)]$.

R: $(3, 8, 13)$ ou $(13, 8, 3)$

10.2 Progressão Geométrica

Uma progressão geométrica é um tipo de sequência no qual o quociente de todo termo, a partir do segundo, pelo termo antecedente é sempre o mesmo. Este quociente também é chamado de razão, mas neste caso é denotado pela letra q . A lei de formação de uma P.G. é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, onde $r \in \mathbb{R}$ e a_1 é o primeiro termo. Este tipo de progressão tem a mesma classificação das sequências quanto ao crescimento. Se $q = 1$, então a P.G. é constante. Se $a_1 > 0$ e $q > 0$, então a sequência é crescente. Se $a_1 < 0$ e $q > 0$, então a progressão é decrescente. E se $q < 0$, ela se torna oscilante.

Uma fábula oriental muito famosa é a do inventor do xadrez. Ela conta que o Rei Shirham autorizou um de seus ministros, que havia inventado o xadrez, a pedir a recompensa que quisesse por sua criação. E o ministro então pediu que lhe desse um grão para a primeira casa do tabuleiro, dois grãos para a segunda, quatro grãos para a terceira e assim em diante, até a 64ª casa. Como descobrir quantos grãos ele receberá, caso seu pedido seja atendido?

10.2.1 Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica

Para resolvermos o problema acima, temos de descobrir a fórmula da soma de n termos de uma P.G. Vejamos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Mas a_n pode ser escrito como $a_1 \cdot q^{n-1}$. Então, podemos escrever a mesma sequência da seguinte maneira:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}$$

Se multiplicarmos S_n por q , teremos:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n$$

Agora, é possível fazer uma soma das duas equações de forma que S_n aparece isolado, e em função apenas de A_1 e q . Observe:

$$\begin{array}{r} S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n \\ S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \\ \hline S_n \cdot q - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1 \end{array}$$

Colocando S_n e a_1 em evidência, chegamos a:

$$(q - 1) \cdot S_n = a_1 \cdot (q^n - 1)$$

Se $x \neq 1$, então podemos passar dividindo $(q - 1)$, e obtemos uma fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{(q - 1)}$$

10.2.2 Séries Geométricas Convergentes

Suponha que $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$. Desta forma, $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n$. Por exemplo, a progressão $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$. A soma dos n primeiros termos neste caso é de-

terminada por: $S_n = \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)}$ Agora vejamos o comportamento desta soma quando

n vai assumindo valores maiores.

$$S_5 = \frac{\left(1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \frac{1 \cdot \left(-\frac{31}{32}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{62}{32} = 1,9375.$$

$$S_{10} = \frac{\left(1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \frac{1 \cdot \left(-\frac{1023}{1024}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2046}{1024} \approx 1,998.$$

$$S_{50} = \frac{\left(1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{50} - 1\right)}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \frac{1 \cdot \left(-\frac{1125899906842623}{1125899906842624}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2251799813685246}{1125899906842624} \approx 1,9999999999999998$$

Assim, podemos notar que quanto maior é n , mais próxima de 2 é a soma. Então podemos supor que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$. Agora vamos provar isto matematicamente neste caso, e chegar a uma fórmula para qualquer P.G. onde as hipóteses acima sejam verdadeiras.

Com relação ao exemplo, a função $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, quando n tende ao infinito, tende a 0. Assim, pela fórmula da soma, obtemos: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 \cdot (0 - 1) / - (1/2) = (-1) / (-1/2) = 2$. Desta forma provamos que a suposição era correta. Agora vamos generalizar para qualquer progressão onde $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$:

Se $0 < q < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (q^n) = 0$. Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 \cdot \frac{(0 - 1)}{(q - 1)} = \frac{-a_1}{(q - 1)} = \frac{a_1}{(1 - q)}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{(1 - q)}$$

E o que isso significa??? Que em qualquer P.G. decrescente, a soma de n termos, não importa quão grande seja n , será cada vez mais próxima, porém sempre menor que um determinado número real.

10.2.3 Exercícios Resolvidos

1- Em uma P.G., o 2º termo é 2 e o 5º termo é 128. Qual a razão desta progressão?

$$\begin{aligned} a_1 \cdot q &= 2 \\ a_1 \cdot q^4 &= 128 \end{aligned}$$

Dividindo a equação de baixo pela de cima, temos que:
 $q^3 = 64$.

R: 4

- 2- Descreva a Progressão Geométrica cuja soma do 3º com o 5º termo é $\frac{5}{4}$ e a soma do 7º com o 9º termo é 20.

$$a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^4 = \frac{5}{4}$$

$$a_1 \cdot q^6 + a_1 \cdot q^8 = 20$$

Podemos em ambas as equações colocar em evidência $(1 + q^2)$. Fazendo isto, temos:

$$a_1 \cdot q^2 \cdot (1 + q^2) = \frac{5}{4}$$

$$a_1 \cdot q^6 \cdot (1 + q^2) = 20$$

Fazendo a divisão da equação de baixo pela de cima, chegamos a:

$$q^4 = 16$$

$$q = 2 \text{ ou } q = -2.$$

Então:

$$a_1 \cdot 2^6 \cdot (1 + 2^2) = 20$$

$$64 \cdot a_1 = 4$$

$$a_1 = \frac{1}{16}$$

Concluimos portanto que existem duas sequências que satisfazem a proposição. São elas: $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16} \cdot 2, \frac{1}{16} \cdot 4, \dots\right)$ e $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16} \cdot (-2), \frac{1}{16} \cdot 4, \dots\right)$.

$$\text{R: } \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \dots\right) \text{ ou } \left(\frac{1}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

- 3- Determine x de forma que a sequência $(2 \cdot x - 5, 3 \cdot x - 3, 6 \cdot x + 3)$ seja uma P.G.

$$a_1 \cdot q = a_2$$

$$a_3 = a_2 \cdot q$$

Se multiplicarmos as equações, temos:

$$a_1 \cdot a_3 = (a_2)^2$$

Usando a fórmula acima aplicada ao exercício, chegamos a:

$$(2 \cdot x - 5) \cdot (6 \cdot x + 3) = (3 \cdot x - 3)^2$$

$$12 \cdot x^2 - 24 \cdot x - 15 = 9 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 9$$

$$3 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 24 = 0$$

Resolvendo a equação, temos que $x = 4$ ou $x = -2$. Temos assim a resposta.

R: $x = 4$ **ou** $x = -2$

- 4- Determine três números em P.G cujo produto seja 1000 e a soma do 1º com o 3º termo seja igual a 52.

Podemos escrever os três termos como $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$. Assim:

$$\frac{x}{q} \cdot x \cdot q \cdot x = x^3 = 1000$$

$$x = 10.$$

Utilizando a segunda hipótese do exercício:

$$\frac{x}{q} + q = 52.$$

$$10 + 10 \cdot q^2 = 52 \cdot q$$

Resolvendo a equação, $q = \frac{1}{5}$ ou $q = 5$.

R: $(2, 10, 50)$ ou $(50, 10, 2)$.

10.3 Exercícios

- 1- Calcule a soma dos quinze primeiros termos da P.A $(-45, -41, -37, \dots)$.
- 2- Qual o número de termos da P.A $(131, 138, \dots, 565)$?
- 3- Quantos múltiplos de 9 existem entre 100 e 1000??
- 4- A sequência de números inteiros positivos $a_1 = 1, a_2, a_3$ está em progressão aritmética com razão positiva. Calcule o menor valor de $a_1 + a_2 + a_3$ para que a equação $a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ possua raízes reais.
- 5- Felipe começa a escrever números naturais em uma folha de papel muito grande, uma linha após a outra, como mostrado a seguir:

```

1
2 3 4
3 4 5 6 7
4 5 6 7 8 9 10
5 6 7 8 9 10 11 12 13
⋮

```

- a) Determine quantos números naturais ele escreverá na 50^a linha.
 - b) Determine a soma de todos os números escritos na 50^a linha.
 - c) Prove que a soma de todos os elementos de uma linha é sempre o quadrado de um número ímpar.
- 6- Qual é o 8º termo da P.G. $(-1, 4, -16, \dots)$?
- 7- Que número deve ser adicionado a cada um dos termos da sequência $(3, 5, 8)$ a fim de que ela seja uma P.G.? Qual a razão desta P.G.??
- 8- Seja $S = (4 \cdot x + 1) + (4 \cdot x + 1)^2 + (4 \cdot x + 1)^3 + \dots$

- a) Para que valores de x a série é convergente?
- b) Determine x para que $S = 1$.
- 9- Quantos termos da P.G. $(3, 6, 12, \dots)$ devemos somar a fim de que o total resulte 12.285??
- 10- Qual o valor de $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{n}{2^n}\right)$?
- 11- Em uma progressão aritmética crescente, cujo 1º termo é 2, os termos a_1, a_4 e a_{10} estão em progressão geométrica. Determine a razão esta progressão aritmética.
- 12- Sejam a e b números reais tais que $(a, b, a + b)$ formam uma P.A., e $(2^a, 16, 2^b)$ formam nesta ordem uma P.G. Qual o valor de a ??

Capítulo 11

Função Exponencial

11.1 Definição:

Dado um número real a , tal que $0 < a \neq 1$, chamamos função exponencial de base a a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real ao número a^x .

Em símbolos:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow a^x \end{aligned}$$

Exemplos de funções exponenciais em $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) &= 2^x & \text{b)} g(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{c)} h(x) &= 3^x \\ \text{d)} p(x) &= 10^x & \text{e)} r(x) &= (\sqrt{2})^x \end{aligned}$$

11.2 Propriedades

1ª) Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a^0 = 1$$

isto é, o par ordenado $(0, 1)$ pertence a função para todo $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

Isto significa que o gráfico cartesiano de toda função exponencial corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

2ª) A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Portanto, dados os reais x_1 e x_2 , temos:

I) quando $a > 1$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

II) quando $0 < a < 1$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3ª) A função exponencial $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$, é injetora pois, dados x_1 e x_2 tais que $x_1 \neq x_2$ (por exemplo $x_1 < x_2$) vem:

Se $a > 1$, temos: $f(x_1) < f(x_2)$

Se $0 < a < 1$, temos: $f(x_1) > f(x_2)$

e, portanto, nos dois casos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Lema 11.2.1. Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$a^n > 1 \text{ se, e somente se, } n > 0$$

Demonstração:

1ª Parte

Provemos, por indução sobre n , a proposição: $n > 0 \Rightarrow a^n > 1$

1º) é verdade para $n = 1$, pois $a^1 = a > 1$

2º) Suponhamos que a proposição seja verdadeira para $n = p$, isto é, $a^p > 1$ e provemos que é verdadeira para $n = p + 1$.

De fato, de $a > 1$, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a^p e mantendo a desigualdade pois a^p é positivo, temos:

$$a > 1 \Rightarrow a \cdot a^p > a^p \Rightarrow a^{p+1} > a^p > 1$$

2ª Parte

Provemos, por redução a absurdo, a proposição:

$$a^n > 1 \Rightarrow n > 0$$

suponhamos $n \leq 0$ temos, $-n \geq 0$.

Notemos que $n = 0 \Rightarrow a^0 = 1$ e pela primeira parte $-n > 0 \Rightarrow a^{-n} > 1$ portanto

$$-n \geq 0 \Rightarrow a^{-n} \geq 1$$

Multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por a^n e mantendo o sentido da desigualdade pois a^n é positivo, temos

$$a^{-n} \geq 1 \Rightarrow a^n \cdot a^{-n} \geq a^n \Rightarrow 1 \geq a^n$$

o que é um absurdo, pois contraria a hipótese $a^n > 1$. Logo, $n > 0$.

Lema 11.2.2. Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$, temos:

$$a^r > 1 \text{ se, e somente se, } r > 0$$

Demonstração:

1^a. Parte

Provemos a proposição $r > 0 \Rightarrow a^r > 1$

Façamos $r = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}^*$, então:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}}$$

Pelo lema 1, se $a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q > 1$ e $q > 0$ então $a^{\frac{1}{q}} > 1$. Ainda pelo mesmo lema, se $a^{\frac{1}{q}} > 1$ e $p > 0$ então $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1$, ou seja,

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}} = a^r > 1$$

2^a. Parte

Provemos agora a proposição: $a^r > 1 \Rightarrow r > 0$

Façamos $r = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, então

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

Supondo, $q > 0$ e considerando que na 1^a. parte provamos que $a^{\frac{1}{q}} > 1$, temos pelo lema 1:

$$a^{\frac{1}{q}} > 1 \text{ e } \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1 \Rightarrow p > 0$$

Logo:

$$q > 0 \text{ e } p > 0 \Rightarrow r = \frac{p}{q} > 0$$

Suponhamos agora, $q < 0$, isto é, $-q > 0$, pelo lema 1 temos:

$$a^{-\frac{1}{q}} > 1 \text{ e } \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^{-\frac{1}{q}}\right)^{-p} > 1 \Rightarrow -p > 0 \Rightarrow p < 0$$

Logo:

$$q < 0 \text{ e } p < 0 \Rightarrow r = \frac{p}{q} > 0.$$

Lema 11.2.3. Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, r e s racionais, temos:

$$a^s > a^r, \text{ se, e somente se, } s > r$$

Demonstração:

$$a^s > a^r \iff a^s \cdot a^{-r} > a^r \cdot a^{-r} \iff a^{s-r} > 1 \xrightarrow[\iff]{\text{lema2}} s - r > 0 \iff s > r$$

Lema 11.2.4. Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, temos:

$$a^\alpha > 1 \text{ se, e somente se, } \alpha > 0$$

Demonstração:

Sejam os dois conjuntos que definem o número irracional α ,

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}$$

e em correspondência os conjuntos de potências de expoentes racionais que definem a^α .

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}$$

1ª. Parte

Provemos a proposição

$$\alpha > 0 \Rightarrow a^\alpha > 1$$

Pela definição do número α irracional e positivo, existem $r \in A_1$ e $s \in A_2$ tal que $0 < r < \alpha < s$.

Pelo lema 2, como $a > 1$, $r > 0$ e $s > 0$, temos: $a^r > 1$ e $a^s > 1$.

Pelo lema 3, como $a > 1$ e $r < s$, temos: $1 < a^r < a^s$ e, agora, pela definição de potência de expoente irracional, vem:

$$1 < a^r < a^\alpha < a^s$$

isto é,

$$a^\alpha > 1$$

2ª. Parte

Provemos, por redução a absurdo, agora a proposição:

$$a^\alpha > 1 \Rightarrow \alpha > 0$$

Suponhamos, $\alpha < 0$, isto é, $-\alpha > 0$.

Pela primeira parte deste teorema, temos:

$$\left. \begin{array}{l} a > 1, -\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ -\alpha > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a^{-\alpha} > 1$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade obtida por $a^\alpha > 0$, vem:

$$a^{-\alpha} \cdot a^\alpha > a^\alpha$$

isto é,

$$1 > a^\alpha$$

o que contraria a hipótese, logo

$$\alpha > 0$$

Teorema 11.2.1. Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $b \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^b > 1 \text{ se, e somente se, } b > 0.$$

Demonstração:

$$b \in \mathbb{R} \iff \left\{ \begin{array}{l} b \in \mathbb{Q} \xrightarrow[\iff]{Lema2} (a^b > 1 \iff b > 0) \\ \text{ou} \\ b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \xrightarrow[\iff]{Lema4} (a^b > 1 \iff b > 0) \end{array} \right.$$

Teorema 11.2.2. Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \quad \text{se, e somente se,} \quad x_1 > x_2$$

Demonstração:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \iff \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \iff a^{x_1-x_2} > 1 \xrightarrow[\iff]{\text{teorema1}} x_1 - x_2 > 0 \iff x_1 > x_2.$$

Teorema 11.2.3. Sendo $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e $b \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^b > 1 \quad \text{se, e somente se,} \quad b < 0$$

Demonstração:

Se $0 < a < 1$ então $\frac{1}{a} > 1$.

Seja $c = \frac{1}{a} > 1$, pelo teorema 1, vem:

$$c^{-b} > 1 \iff -b > 0$$

Substituindo $c = \frac{1}{a}$, temos:

$$c^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-b} = a^b > 1 \iff b < 0$$

Teorema 11.2.4. Sendo $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \quad \text{se, e somente se,} \quad x_1 < x_2.$$

Demonstração:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \iff \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \iff a^{x_1-x_2} > 1 \xrightarrow[\iff]{\text{teorema3}} x_1 - x_2 < 0 \iff x_1 < x_2$$

11.3 Imagem

No estudo de potência de expoente real temos que se $a \in \mathbb{R}_+^*$, então $a^x > 0$ para todo x real.

Afirmamos, então, que a imagem da função exponencial é

$$Im = \mathbb{R}_+^*$$

11.4 Gráfico

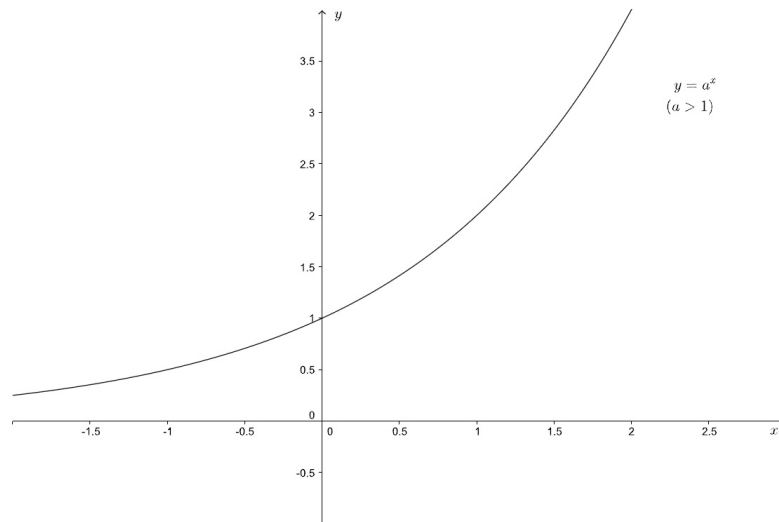


Figura 11.1: Gráfico de $y = a^x$ com $a > 1$

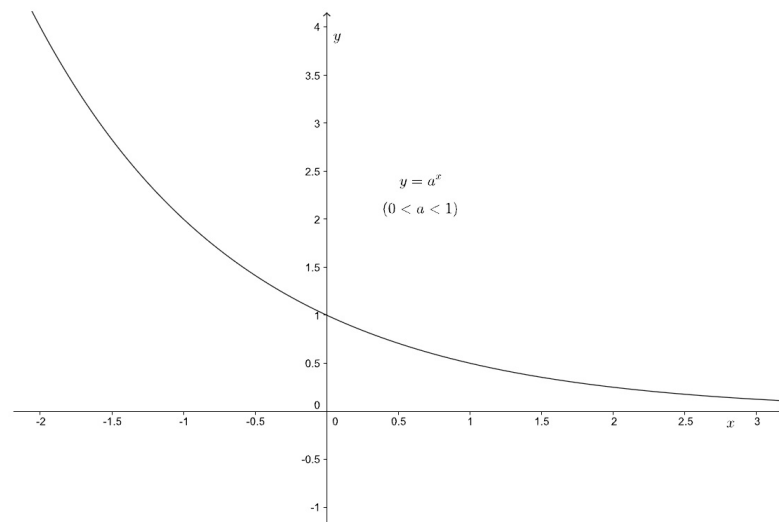


Figura 11.2: Gráfico de $y = a^x$ com $0 < a < 1$

Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = a^x$, podemos dizer:

1º.) a curva representativa está toda acima do eixo dos x , pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

2º.) corta o eixo y no ponto de ordenada 1

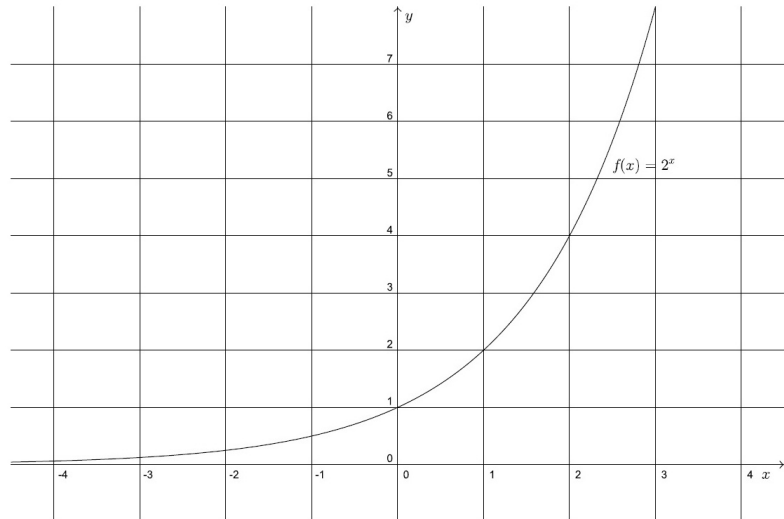
3º.) se $a > 1$ é o de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é o de uma função decrescente.

4º.) toma um dos aspectos da figura abaixo.

Exemplos

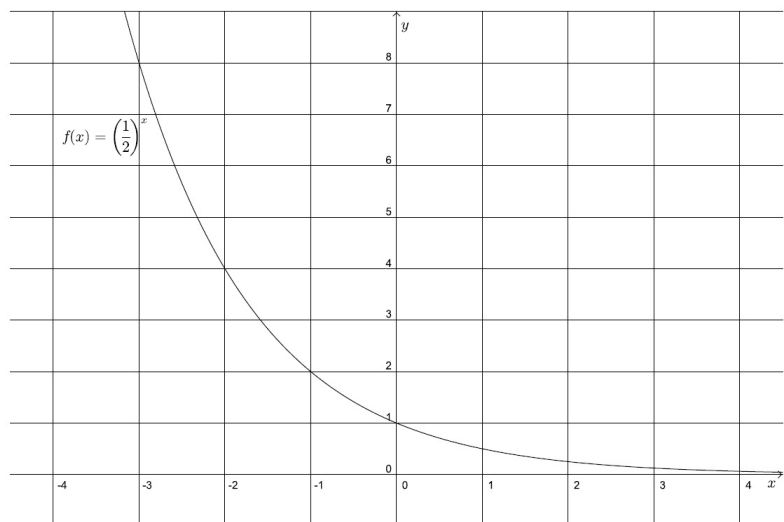
1º.) Construir o gráfico da função exponencial de base 2, $f(x) = 2^x$

x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



2º.) Construir o gráfico da função exponencial de base $\frac{1}{2}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



3º.) Construir o gráfico da função exponencial de base e, $f(x) = e^x$

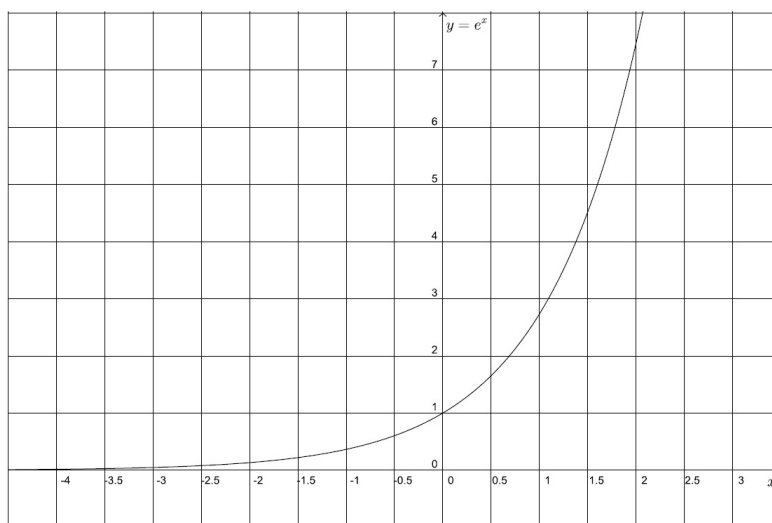
Um número irracional importantíssimo para a análise matemática é indicada pela letra e e definido pela relação:

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

A demonstração de que o citado limite existe será feita futuramente quando fizermos o estudo de limites. A tabela abaixo segere um valor para e (com casas decimais): $e \cong 2,7183$

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$(1+1)^1 = 2$	$(1+0,1)^{10} = 2,594$	$(1+0,001)^{100} = 2,705$	2,717	2,7182	2,7183

x	e^x
-3	0,05
-2,5	0,08
-2	0,14
-1,5	0,22
-1	0,36
-0,5	0,60
0	1
0,5	1,65
1	2,72
1,5	4,48
2	7,39
2,5	12,18
3	20,68



11.5 Equações Exponenciais

Equações exponenciais são equações com incógnitas no expoente.

Exemplos

$$2^x = 64, (\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}, 4^x - 2^x = 2.$$

Existem dois métodos fundamentais para resolução das equações exponenciais.

Faremos a apresentação agora do primeiro método.

11.6 Método da redução a uma base comum

Este método, como próprio nome já nos diz, será aplicado quando, ambos os membros da equação, com as transformações convenientes baseadas nas propriedades de potências,

forem redutíveis a potência de mesma base a ($0 < a \neq 1$). Pelo fato de a função exponencial $f(x) = a^x$ ser injetora, podemos concluir que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais, isto é:

$$a^b = a^c \iff b = c \quad (0 < a \neq 1)$$

11.7 Inequações Exponenciais

Inequações exponenciais são as inequações com incógnita no expoente.

Exemplos

$$2^x > 32, (\sqrt{5})^x > \sqrt[3]{25}, 4x - 2 > 2^x.$$

Assim como em equações exponenciais, existem dois métodos fundamentais para resolução das inequações exponenciais.

Do mesmo modo, usado no estudo de equações exponenciais, faremos a apresentação agora do primeiro método.

11.8 Método de redução a uma base comum

Este método será aplicado quando ambos os membros da inequação puderem ser representados como potências de mesma base a ($0 < a \neq 1$)

Lembremos que a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente, se $a > 1$, ou decrescente, se $0 < a < 1$, portanto:

Se b e c são números reais então para $a > 1$ tem-se $a^b > a^c \iff b > c$ para $0 < a < 1$ tem-se $a^b > a^c \iff b < c$
--

Capítulo 12

Logaritmos

12.1 Definição

Consideremos dois números reais a e b , positivos com $a \neq 1$ e a existência de um único número real c . Chamaremos logaritmo do número b na base a , o expoente c , de forma que $a^c = b$. Ou seja:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Condições de existência: $b > 0$ e $0 < a \neq 1$

Nomenclatura:

Antilogaritmo ou logaritmando é o número b .

Base é o número a .

Logaritmo é o número c .

Exemplos:

a) $\log_2 16 = 4$ pois se $\log_2 16 = x$, então:

$$2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4, \text{ portanto}$$

$$\log_2 16 = 4.$$

b) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$ pois se $\log_7 \frac{1}{49} = x$, então

$$7^x = \frac{1}{49} \Rightarrow 7^x = \frac{1}{7^2} \Rightarrow 7^x = 7^{-2} \Rightarrow x = -2$$

$$\text{Portanto } \log_7 \frac{1}{49} = -2$$

c) $\log_{10} 1000 = 3$ pois se $\log_{10} 1000 = x$, então

$$10^x = 1000 \Rightarrow 10^x = 10^3 \Rightarrow x = 3,$$

$$\text{Portanto } \log_{10} 1000 = 3$$

d) $\log_{12} 1 = 0$, pois se $\log_{12} 1 = x$, então

$12^x = 1 \Rightarrow 12^x = 12^0 \Rightarrow x = 0$, portanto
 $\log_{12} 1 = 0$.

e) $\log_{\frac{5}{3}} 0.6 = -1$, pois se $\log_{\frac{5}{3}} 0.6 = x$, então

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = 0,6 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{6}{10} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^1 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x = -1$$

Portanto, $\log_{\frac{5}{3}} 0.6 = -1$.

Consequência da definição de logaritmo:

i) $\log_a 1 = 0$

Ou seja, $a^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Ex: $\log_5 1 = x \Rightarrow 5^x = 1$, logo $x = 0$.

Portanto $\log_5 1 = 0$

ii) $\log_a a = 1$

Pela definição temos que $\log_a a = x \Rightarrow a^x = a$ logo $x = 1$

Ex: $\log_3 3 = x \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

Portanto $\log_3 3 = 1$

iii) $\log_a a^n = n$

Temos que $\log_a a^n = x \Rightarrow a^x = a^n \Rightarrow n = x$,

Portanto $\log_a a^n = n$.

Ex: $\log_5 5^2 = x \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2$, portanto $\log_5 5^2 = 2$.

iv) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

Seja $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$, temos que $a^x = a^y$, mas $a^x = b$ e $a^y = c$, logo $a^x = a^y \Leftrightarrow b = c$.

Ex: $\log_3 x = \log_3 9 \Rightarrow \log_3 x = \log_3 3^2 \Rightarrow x = 3^2 \Rightarrow x = 9$

v) $a^{\log_a b} = b$

Ex: $5^{\log_5 25} = 25$, pois $5^{\log_5 25} = x \Leftrightarrow 5^{\log_5 5^2} = x$, mas $\log_5 5^2 = 2$ logo, $5^2 = x \Rightarrow x = 25$

12.1.1 Exercícios:

1) Qual é o logaritmo de 49 na base 7? E o logaritmo de $\frac{1}{8}$ na base 4?

2) Calcule os seguintes logaritmos:

a) $\log_2 32$

b) $\log_{25} 125$

c) $\log_4 \sqrt{2}$

- d) $\log_{10} 0,001$
- e) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3}$
- f) $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt[3]{5}$
- g) $\log_2 16\sqrt{2}$

- 3) Qual é a base de um sistema logarítmico, onde o logaritmo é $\frac{1}{2}$ e o antilogaritmo é $\frac{\sqrt{2}}{2}$?
- 4) Calcule o valor de x , de modo que se tenha

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{2}$$

12.2 Sistemas de logaritmos

Chama-se sistema logaritmos de base a para $1 \neq a > 0$ o conjunto dos logaritmos de todos os números reais positivos na base a .

Dois sistemas de logaritmos destacam-se pelo seu importante papel no campo das ciências, são eles: Sistemas de logaritmos decimais (ou sistema de logaritmos de Briggs) e sistema de logaritmos neperianos (ou sistema de logaritmos naturais).

Sistema de logaritmos decimais é um sistema de logaritmos no qual se adota a base 10.

Para esse sistema de logaritmo, na notação iremos omitir a base.

Exemplos:

$$\text{a) } \log_{10} 2 = \log 2 \quad \text{b) } \log_{10} x = \log x$$

O sistema de logaritmos neperianos, que é o sistema de logaritmos na base e , levou esse nome em homenagem ao matemático John Neper que viveu no século XVI e que é considerado o criador dos logaritmos na base e .

Exemplos:

$$\text{a) } \log_e 7 = \ln 7 \quad \text{b) } \log_e 10 = \ln 10 \quad \text{c) } \log_e 35 = \ln 35$$

12.3 Propriedades operatórias

Os logaritmos apresentam algumas propriedades que tornam fundamental a sua utilização na simplificação de cálculos.

- 1) Logaritmo de um produto:

$$\log_a(m.n) = \log_a m + \log_a n \quad \text{sendo } 1 \neq a > 0, \quad m > 0 \quad \text{e} \quad n > 0$$

Essa propriedade pode ser considerada para n fatores reais positivos.

$$\log_a(M_1.M_2.....M_n) = \log_a M_1 + \log_a M_2 + \dots + \log_a M_n \quad , \text{ sendo } 1 \neq a > 0$$

2) Logaritmo de um quociente:

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n, \text{ sendo } 1 \neq a > 0, \quad m > 0 \quad n > 0$$

3) Logaritmo de uma potência:

$$\log_a(n^k) = k \cdot \log_a n \quad \text{sendo } 1 \neq a > 0 \quad \text{e} \quad n > 0$$

Exemplos:

$$1) \log_2 32 = \log_2 8.4 = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$$

$$2) \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 1 - \log_3 27 = -3$$

$$3) \log_3 81 = \log_3(3^4) = 4$$

12.3.1 Exercícios

1) Considerando $\log 2 = 0,3010$ e $\log 3 = 0,4771$, calcule:

- a) $\log 8$
- b) $\log 72$
- c) $\log \sqrt{2}$
- d) $\log 200$

2) Calcule $\log 24$ sabendo que $\log 2 = a$ e que $\log 3 = b$.

3) Determine $\log^3 x$ e $\log x^3$, sabendo que $\log x = \frac{1}{10}$.

4) Ache y real sabendo-se que:

$$\log_2 y = \log_2 3 + \log_2 6 - 3 \log_2 4$$

5) Sendo $a^2 + b^2 = 70ab$, calcule $\log_5 \frac{(a+b)^2}{ab}$ em função de $m = \log_5 2$ e $n = \log_5 3$.

12.4 Mudança de base

Nos casos em que o logaritmo apresentar uma base que não convém, esta poderá ser substituída por outra.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ sendo } b > 0, 0 < a \neq 1, 0 < c \neq 1$$

Exemplos:

Mudar para a base 2 os logaritmos:

$$\text{a) } \log_4 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 4} = \frac{\log_2 5}{2}$$

$$\text{b) } \log_{\frac{1}{8}} 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 \frac{1}{8}} = \frac{\log_2 9}{-3}$$

Definição: Chama-se **cologaritmo** de um número $b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{-1\}$, numa base $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{-1\}$ ao oposto do logaritmo de b na base a .

$$\text{co log}_a b = -\log_a b$$

12.4.1 Exercícios

1) Considerando $\log 2 = 0,3010$ e $\log 3 = 0,47771$, calcule:

a) $\log_6 4$

b) $\log \sqrt{6}$

c) $\text{co log } 72$

d) $\text{co log}(15)^{-1}$

2) Calcule $\log_9(a^2)$ sendo $\log_3 a = x$.

3) Supondo $\log_n m = 2$, determine $\log_{(\frac{1}{n})^2} \sqrt[3]{m}$.

12.5 Equações e inequações logarítmicas

Equações logarítmicas são equações que apresentam a incógnita no logaritmando ou na base do logaritmo.

Exemplo:

Resolva as seguintes equações:

a) $\log_3(\log_2 x) = 2$

Pela definição de logaritmo temos que $\log_3(\log_2 x) = 2 \Rightarrow 3^2 = \log_2 x \Rightarrow 2^9 = x$
Portanto $x = 512$.

b) $\log_x(x+6) = 2$

Pela definição de logaritmo temos que $\log_x(x+6) = 2 \Rightarrow x^2 = x+6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$
resolvendo essa equação de segundo grau encontramos:
 $x' = -2$ e $x'' = 3$, como $x > 0$ temos que $x = 3$

Chama-se **inequação logarítmica** toda inequação que envolve logaritmos com a incógnita aparecendo no logaritmando, na base ou em ambos.

Ex: Resolver nos $\mathbb{R}$ a seguinte inequação: $\log_2(x+2) < 3$.

Condição de existência: $(x+2) > 0$,

então $x > -2$

Substituindo 3 por $\log_2 8$ na inequação temos:

$$\log_2(x+2) < \log_2 8 \text{ logo } x+2 < 8 \Rightarrow x < 6.$$

Portanto, $x \in \mathbb{R}$ tal que $-2 < x < 6$.

12.5.1 Exercícios

1) Determine o conjunto solução das equações logarítmicas:

a) $\log_x(x+20) = 2$

b) $\log_3(x^2 - 5x + 5) = 0$

c) $\log_4 x + \log_4(x+12) = 3$

2) Para que valor real de x temos $\log_3(2x+5) + \log_{\frac{1}{3}}(x+1) = \log_3(x+1)$?

3) Verifique se é verdadeiro:

a) $\log_3 7 > \log_3 5$

b) $\log_{2,5} 15 < \log_{2,5} 8$

4) Resolva as seguintes inequações:

a) $\log_3(x+1) < 2$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4) < 1$

c) $-1 + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 0$

12.6 Função logarítmica

Seja a função exponencial $g(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ sendo $g(x): \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$. A sua inversa chama-se função logarítmica e indica-se $y = g(x) = \log_a x$.

As funções exponencial e logarítmica são funções inversas.

Função exponencial

$$y = a^x$$

$$\text{Domínio: } D(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Imagem: } Im(f) = \mathbb{R}_+^*$$

Função logarítmica

$$y = \log_a x$$

$$\text{Domínio: } D(f) = \mathbb{R}_+^*$$

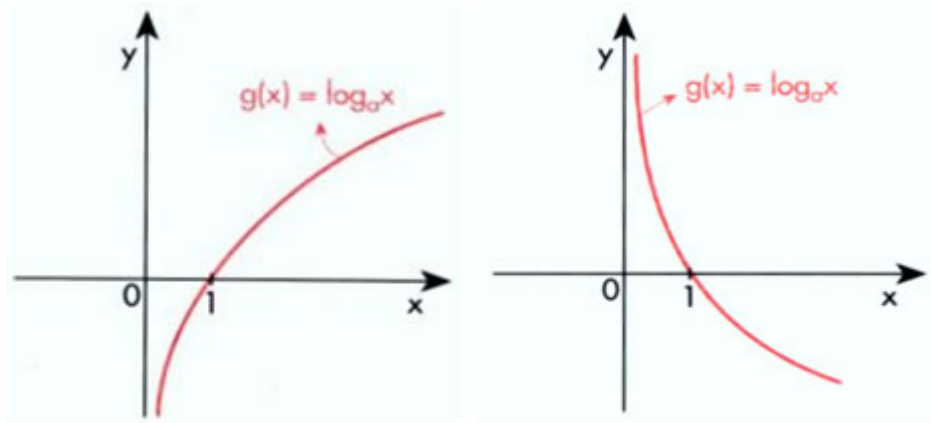
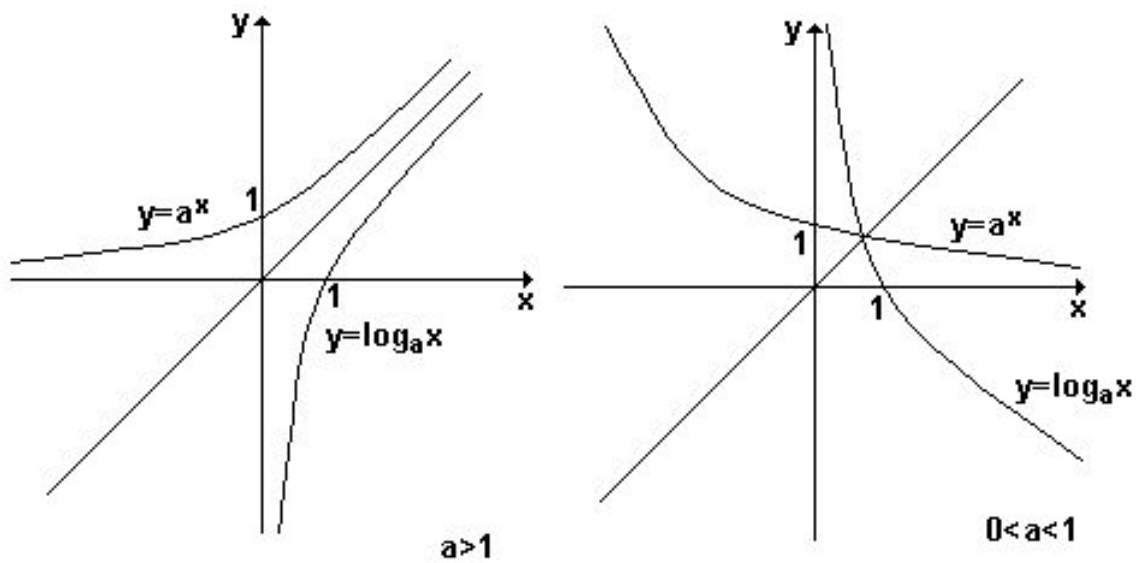
Figura 12.1: para $a > 1$, g será crescenteFigura 12.2: para $0 < a < 1$ g será decrescente

Imagem: $Im(f) = \mathbb{R}$

Figura 12.3: para $a > 1$ Figura 12.4: para $0 < a < 1$

Observamos que os gráficos de a^x e $\log_a x$ são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

12.6.1 Exercícios

1) Esboçar o gráfico cartesiano das seguintes funções:

a) $y = \log_3 x$

b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

a) $y = \log_3(x + 1)$

2) Ache o domínio e o conjunto imagem das funções:

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log(x - 4)$

c) $f(x) = \log_2(1 - x^2)$

d) $f(x) = \log_3 |x - 3|$

Parte IV

Limite

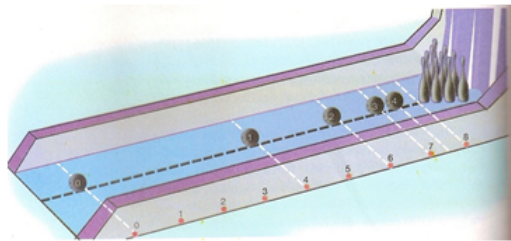
Capítulo 13

Noções de Limite

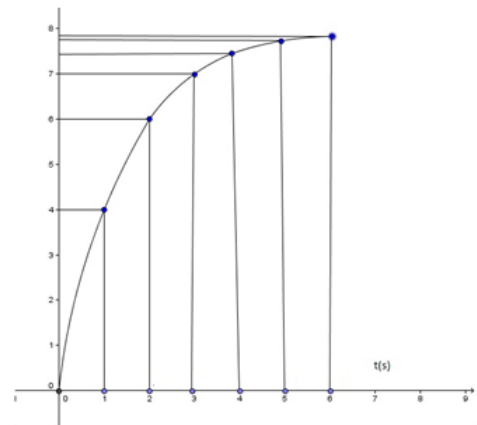
O método dos limites é resultado de muitas incertezas, tentativas e discordâncias. Se as etapas da evolução do homem estivessem embutidas num livro, com certeza o método de limites seria uma das páginas mais belas, onde a inteligência humana deixou marcas significativas. Mas nem por isso deve ser entendido como fruto de uma cabeça privilegiada, e sim como resultado de muitas incertezas, tentativas discordâncias e contribuições convincentes. O limite assumiu relevante importância, no século XVII, com o desenvolvimento do cálculo diferencial, onde matemáticos como Huygens (1629-1695), Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716) tiveram papel marcante. Buscando aperfeiçoar a conceituação dos limites, outras contribuições foram surgindo, como é o caso de d'Alembert (1717-1783) e de Cauchy (1789-1857). Em 1629 nasce Christiaan Huygens, numa Europa que estava aberta a grandes modificações. Huygens foi um estudioso das leis e sonhava com a diplomacia. Porém, foi atraído pelas ciências naturais e logo ficou conhecido como cientista, deixando trabalhos valiosos até hoje, como é o caso da análise das ondas progressivas e da reflexão da luz. Observou os anéis de Saturno e inventou o relógio de pêndulo.

Fonte: Revista Ciência Hoje, vol.14., n.79, p33, ed. F.G.V.

Exemplo 1 : Uma bola de boliche foi jogada em uma pista de 8 metros, sendo que, em cada segundo, percorre metade da distância que a separa do primeiro pino. Considere função $d(t)$ que faz corresponder a cada valor t de tempo ($t \in \mathbb{N}$), em segundo, um único valor d , em metros, da distância percorrida por essa bola.



t(s)	d(m)
0	0
1	4
2	6
3	7
4	7,5
5	7,75
6	7,875

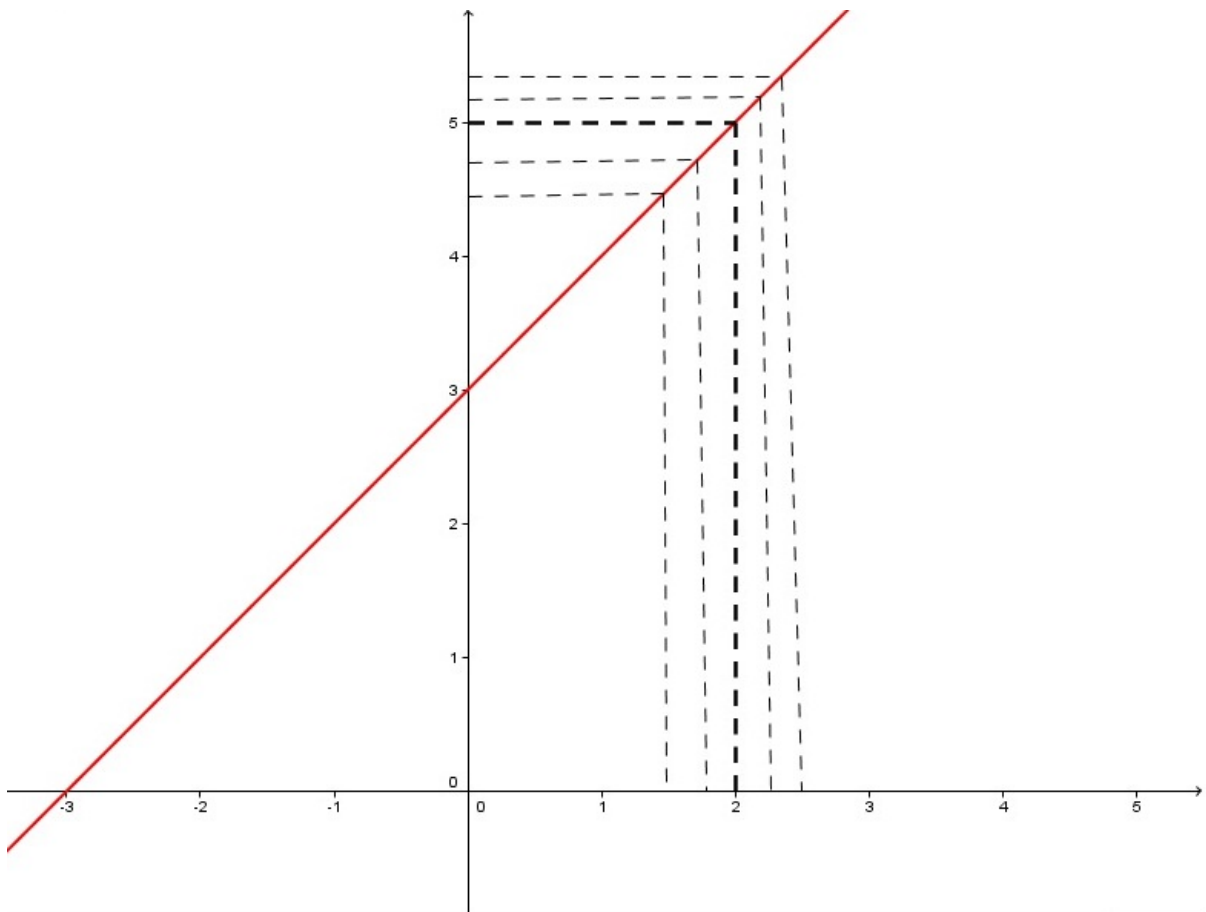


Note que para cada instante, a bola se aproxima mais e mais 1º pino, assim como a distância percorrida se aproxima de 8, quanto maior o valor do tempo. Dizemos que, quando t tende a assumir um valor cada vez maior (t tende ao infinito), então d tende a 8. Em símbolos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = 8$$

Lemos: o limite de $d(t)$, quando t tende ao infinito é igual a 8.

Exemplo 2: Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 3$ e o gráfico cartesiano correspondente.



Notamos que, para valores de x cada vez mais próximos de 2, temos valores de $f(x)$ cada vez mais próximos de 5. Isso ocorre tanto quando x tende a 2 pela esquerda, isto é, se aproxima por valores menores de 2, como quando x tende a 2 pela direita, isto é, se aproxima por valores maiores de 2.

A notação fica:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$$

Lê-se: o limite de $f(x)$ quando x tende a 2 pela esquerda, é igual a 5.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$$

Lê-se: o limite de $f(x)$ quando x tende a 2 pela direita, é igual a 5.

Exemplo 3: Poeira de Cantor

George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918) foi um grande matemático russo, uma de suas contribuições a Poeria de Cantor é contruída através dos seguintes passos:

- 1 - Trace um segmento $\overline{AB}$.
- 2 - Divida esse segmento em três partes iguais e retire o terço médio.
- 3 - Continue o processo com os segmentos restantes.

Exercício: Para quanto tenderá o comprimento do segmento se repetirmos o processo infinitas vezes?

Capítulo 14

Definição e propriedades do limite

14.1 Definição

Nesta seção vamos tentar entender um pouco graficamente o sentido de limite de uma função em um certo ponto. Vamos tomar como exemplo uma função $f(x) = x + 1$, considerar o ponto $x = 1$ e ver o limite da função nesse ponto.

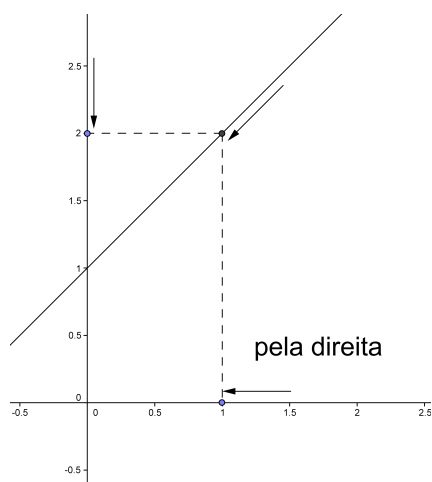


Figura 14.1: Limite pela direita

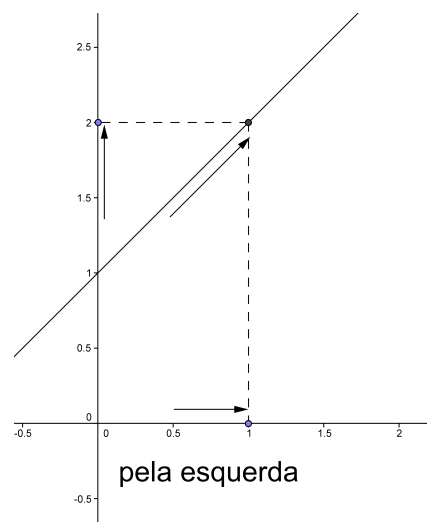


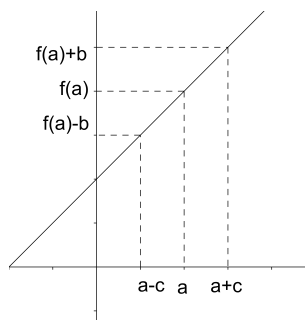
Figura 14.2: Limite pela esquerda

Podemos notar pelo gráfico que quando x avança para 1 pela direita, $f(x)$ tende a 2; e quando x avança para 1 pela esquerda, $f(x)$ tende a 2. Assim, podemos dizer que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 é 2 e denotamos por

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Mas e se o limite pela direita e pela esquerda forem diferentes? Nesse caso, dizemos que o limite **não** existe, pois o limite, quando existe, é **único**. Vamos agora nos aprofundar um pouco mais matematicamente.

Definição 14.1. Considere $f(x)$ uma função definida num intervalo I nos reais. Dizemos que o limite de $f(x)$ no ponto a é L (número real), se para todo $b > 0$, existe um número $c > 0$ que depende de b tal que se $a - c \leq x \leq a + c$, então $L - b \leq f(x) \leq L + b$.

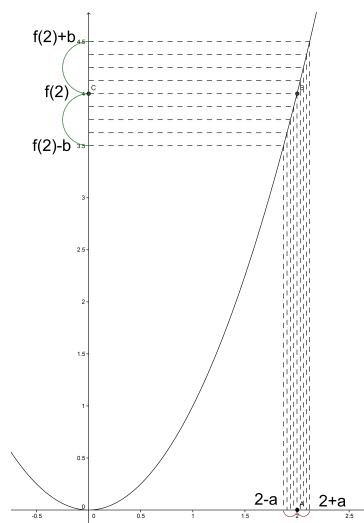


Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 14.1.1. Considere a função $f(x) = x^2$ definida nos reais.

x	y
1,85	3,4225
1,90	3,61
1,95	3,8025
2,05	4,2025

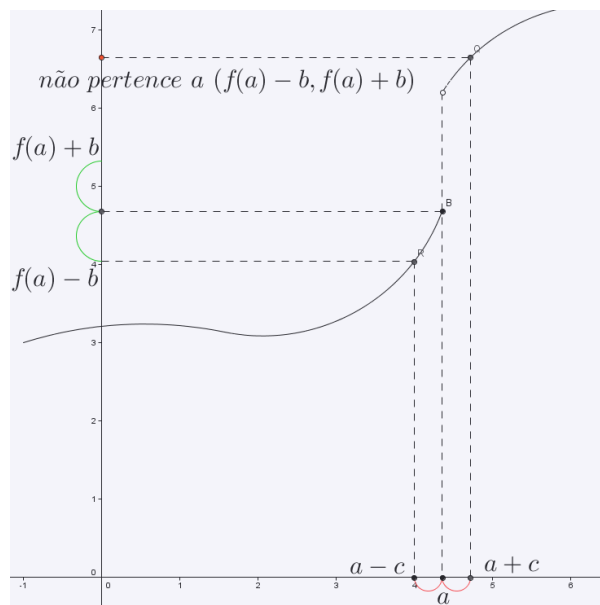
Quando x tende a 2 pela esquerda e pela direita, f tende a 4. Então $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$



Exemplo 14.1.2. Considere a função g descrita pelo gráfico abaixo definida nos reais.

x	y	x	y
4,00	4,04	4,72	6,65
4,18	4,30	4,54	6,45
4,36	4,68	4,37	6,22

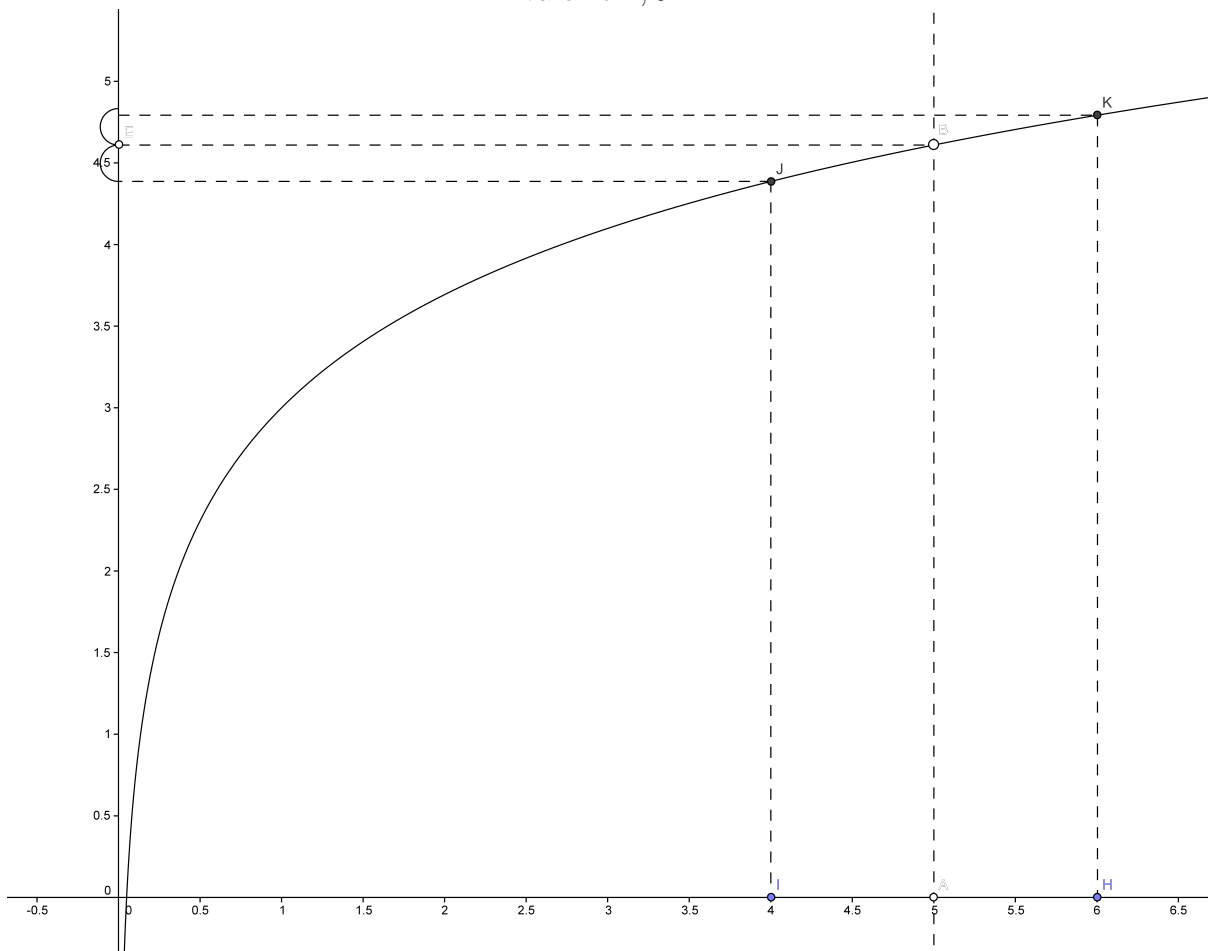
Temos que quando x tende a 4,36 pela esquerda, a função g tende a 4,68 = $g(2)$. Já quando x tende a 4,36 pela direita, a função g tende a 6,2. Dizemos então que **não** existe o limite de $g(x)$ quando x tende a 4,36.



Exemplo 14.1.3. Considere a função $h(x) = \ln(x) + 3$ definida em $\mathbb{R}_+^* \setminus \{5\}$ (ou seja, a função h não está definida para $x = 5$).

x	y	x	y
4,00	4,39	6	4,79
4,25	4,45	5,75	4,75
4,50	4,5	5,50	4,70
4,75	4,56	5,25	4,66
4,99	4,61	5,01	4,61

Temos que quando x tende a 5 tanto pela esquerda como pela direita, a função $h(x)$ tende a 4,61. Portanto, mesmo que o ponto 5 não faça parte do domínio (a função h não está definida para $x = 5$), dizemos que existe o limite de $h(x)$ quando x tende a 5 e que seu valor é 4,61.



14.2 Propriedades do limite

São apresentadas aqui três propriedades do limite e duas consequências. Para todas elas, dados as funções f e g , considere que existem os limites de f e de g e que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = N$, com $M, N \in \mathbb{R}$

Propriedade 1. O limite da soma é a soma dos limites.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M + N$$

Segue da **Propriedade 1** que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M - N$$

Propriedade 2. O limite do produto é o produto dos limites.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = MN$$

Propriedade 3. Seja $g(x)$ tal que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$. Então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{N}$$

Segue das **Propriedades 2 e 3** que se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, então

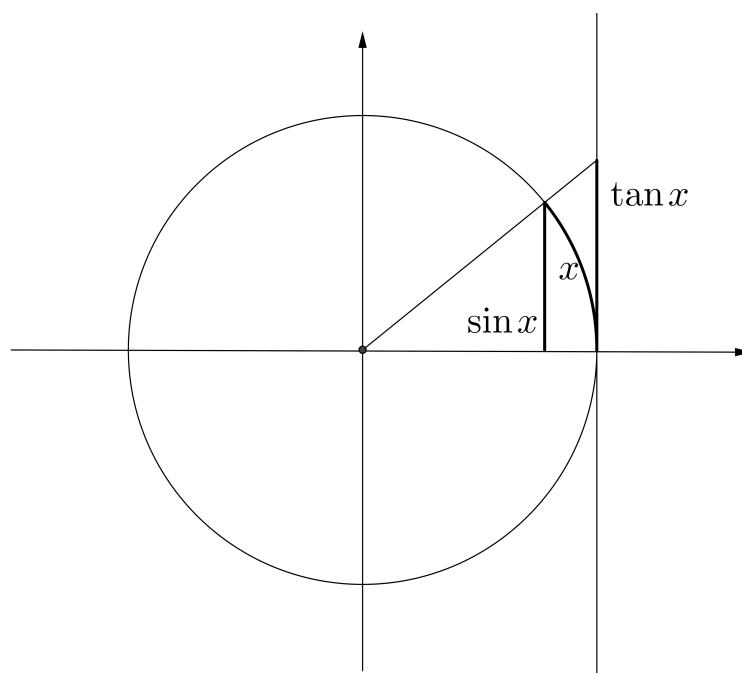
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{M}{N}$$

Capítulo 15

Limites Notáveis

15.1 O limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Observe a circunferência trigonométrica:



Para um valor de x positivo e próximo de 0, temos

$$\sin x < x < \tan x.$$

Dividindo a desigualdade por $\sin x$, chegamos a

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

Como, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, então

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Portanto, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} 1,$$

ou seja,

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

15.2 O limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

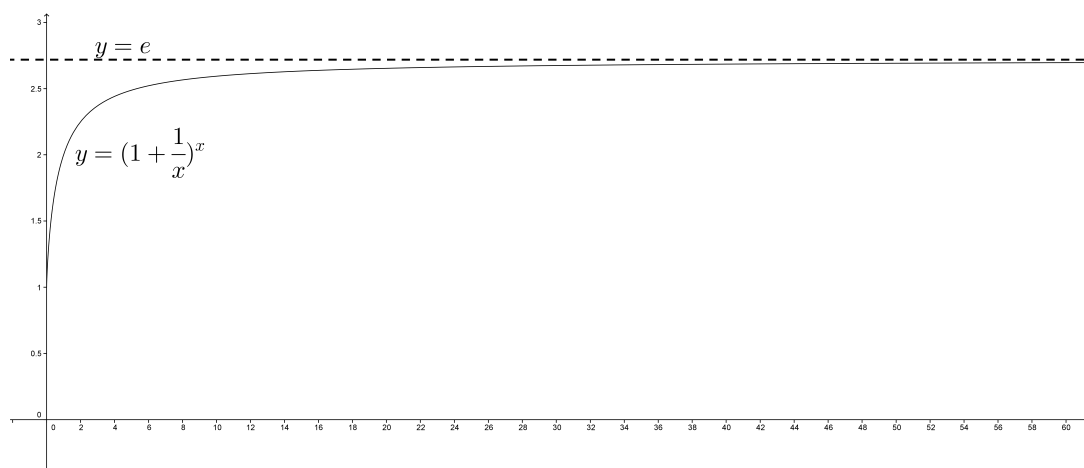
Vamos calcular o $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ para alguns valores de x :

x	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
1	2
10	2,5937424601
10^4	2,71814592682522
10^6	2,71828046931
10^8	2,71828181486
10^{10}	2,718281828323

O limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ é muito usado em modelos matemáticos de economia, biologia, engenharia, dentre outras áreas. Pode-se provar usando fatos da Análise Matemática que esse limite existe. Este número é muito famoso na Matemática e é chamado de *Número de Euler*, denotado por e . Usando um computador para calcular algumas casas decimais desse número, pode fazer a aproximação

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595$$

Observe também que o gráfico $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ se aproxima cada vez mais do gráfico de $y = e$:



15.3 Exercícios

1) Calcule os limites das seguintes funções para $x \rightarrow 0$:

a) $f(x) = x$

b) $g(x) = \sin x$

c) $h(x) = \sin x + x$

d) $i(x) = 3^x$

e) $j(x) = \frac{\sin x}{x}$

f) $k(x) = \frac{\sin 2x}{2x}$

g) $l(x) = \frac{\sin 2x}{x}$

h) $m(x) = \frac{\sin x}{2x}$

i) $n(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

j) $o(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

2) Calcule os limites das seguintes funções para $x \rightarrow \infty$

a) $\alpha(x) = x^2$

b) $\beta(x) = \frac{1}{x^2}$

c) $\gamma(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

d) $\delta(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

e) $\epsilon(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$

f) $\lambda(x) = \frac{x^2}{1 + x^3}$

3) Fotossíntese: A taxa de produção R na fotossíntese é relacionada com a intensidade da luz I pela função

$$R(I) = \frac{aI}{b + I^2}$$

a) Considerando $a = b = 1$, calcule $R(I)$ para $I = 1$, $I = 2$, $I = 3$, $I = 4$ e $I = 5$.

b) Estime o valor de $\lim_{I \rightarrow \infty} R(I)$

c) Use os resultados de (a) e (b) para esboçar o gráfico de $R(I)$. Interprete esse resultado.

- 4) Concentração de um medicamento na corrente sanguínea: A concentração de um certo medicamento na corrente sanguínea de um certo paciente t horas após a injeção é dada por

$$C(t) = \frac{0,2t}{t^2 + 1}$$

mg/cm^3 . Estime o valor de $\lim_{t \rightarrow \infty}$ e interprete esse resultado.

- 5) Crescimento populacional: Uma grande corporação está construindo um complexo de 4325 acres de residências, escritórios, comércios, escolas e igrejas na área rural de Glen Cove. Como resultado desse desenvolvimento, os planejadores estimaram que a população de Glen Cove, em milhares de pessoas, em t anos será de

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125t + 200}{t^2 + 5t + 40}$$

- a) Qual é a população atual de Glen Cove?
b) Qual será a população de Glen Cove a longo prazo?
- 6) Lucros de bilheteria: O faturamento mundial em bilheterias de um longa-metragem de sucesso é estimado pela função

$$T(x) = \frac{120x^2}{x^2 + 4}$$

onde $T(x)$ é medido em milhões de dólares e x é o número de meses após o lançamento do filme.

- a) Qual o faturamento total das bilheterias após o primeiro mês? O segundo mês? O terceiro mês?
b) Quanto o filme vai render a longo prazo?
- 7) Absorção de medicamento: A concentração de um medicamento em um órgão do corpo humano em algum momento t , em segundos, é dada por

$$x(t) = 0,08 + 0,12(1 - e^{-0,02t})$$

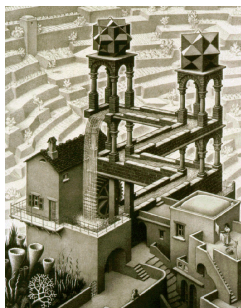
onde $x(t)$ é medido em g/cm^3 (gramas por centímetro cúbico).

- a) Qual a concentração inicial do medicamento no órgão?
b) Qual a concentração do medicamento no órgão após 50 segundos?
c) Qual será a concentração do medicamento no órgão a longo prazo?

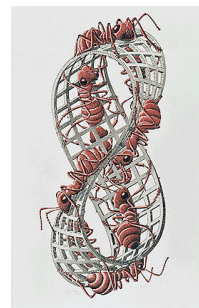
Apêndice A

A Faixa de Moebius

A Faixa de Moebius é um objeto matemático que teve seu primeiro registro histórico com August Ferdinand Moebius (1790-1868). Essa faixa foi uma das precursoras de uma área da Matemática chamada de Topologia. Ela inspirou muitos trabalhos de artistas como M. C. Escher, muito famoso por elaborar imagens com ilusões de óptica e construções impossíveis.

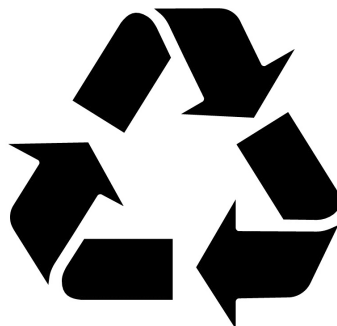


Waterfall, M. C. Escher, 1961

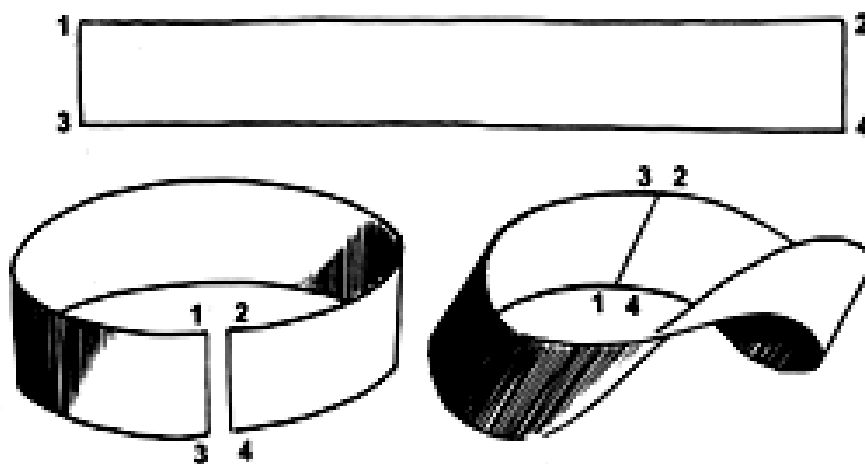


Moebius Strip II, M. C. Escher, 1963

Um símbolo famoso inspirado na faixa de Moebius é o símbolo da reciclagem. Observe:



Para construir uma Faixa de Moebius, pegue uma tira de papel (quanto mais estreita a fita mais fácil será fazer a faixa) e junte os lados opostos como se fosse fazer um anel, mas “inverta” um dos lados antes. Observe o desenho:



Agora vamos fazer alguns experimentos com esta faixa:

- 1) Marque um ponto na faixa e faça uma linha no sentido da tira até que a linha chegue ao ponto onde começou. Observe o que aconteceu.
- 2) O que acontecerá com a faixa se você cortá-la por onde você fez a linha? Faça o experimento e verifique o que acontece.
- 3) O que acontecerá com a faixa se você cortá-la ao meio novamente? Faça o experimento e verifique o que acontece.

Referências Bibliográficas

- [1] PAIVA, Manoel. *Matemática*. 1ª Edição. São Paulo, 2005. Volume Único. Editora Moderna.
- [2] DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é Matemática — 6ª série*. 1ª Edição. São Paulo, 2007. Editora Ática.
- [3] ISOLANI, Clélia Maria M.; MIRANDA, Diair Terezinha L.; ANZZOLIN, Vera Lúcia A.; MELÃO, Walderez S. *Matemática — 6ª série*. 2ª Edição. Curitiba, 2002. Editora Construindo o Conhecimento.
- [4] LONGEN, Adilson. *Matemática em Movimento — 6ª série*. Livro do Professor. Editora do Brasil.
- [5] IEZZI, G. DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, D. *Matemática, Ciência e Aplicações — Ensino Médio*. 4ª Edição. São Paulo, 2006. Volume 2. Editora Atual.
- [6] IEZZI, G. DOLCE, Osvaldo. MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos da Matemática Elementar 2*. 3ª Edição. Volume 2. São Paulo, 1977. Editora Atual. P.23-30,34-42.
- [7] PAIVA, Manoel R. *Matemática 1*. 1ª Edição. Volume 1. São Paulo, 1995. Editora Moderna.
- [8] ENZENSBERGER, Hans M. *O Diabo dos Números*. 1997. Editora Companhia das Letras.
- [9] da SILVA, C. X. FILHO, B. B. *Matemática Aula por Aula*. 2ed. renov. — São Paulo: FTD, 2005. (Coleção Matemática aula por aula).
- [10] LIMA, Elon L. *Curso de Análise*. Volume 1 — Rio de Janeiro, IMPA — Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ, 1976.
- [11] GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. Volume 1 — Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos, Editora S.A., 1985.
- [12] XAVIER E BARRETO. *Matemática Ensino Médio — Aula por aula*. Volume 1. FTD, 2005.
- [13] <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria/trigo03-a.htm>
- [14] <http://ensinodematemtica.blogspot.com.br/2011/05/exercicios-de-trigonometria.html>
- [15] <http://pt.scribd.com/doc/70364539/lista-trigonometria>