

11^o Brincando de Matemático

Cônicas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

Tutor: Prof. Dr. Alexandre Kirilov

Estudantes: André Luiz Correa Vianna Filho
Arthur Rezende Alves Neto
Bruno Cezar Steinmetz
Carolina Akemy Bavastri
Diogo Ubaldino
Jaqueline Aline Iensen
João Pedro Schimitka Rodrigues de Lima
Lorayne Veri
Lucas Seiffert
Luciano Luzzi Junior
Luís Eduardo Alves França
Rodrigo Zeni Stocco
Yasmim Adara Amorim

Sites: www.petmatematica.ufpr.br
facebook.com/petmatematicaufpr

Telefone: (41) 3361-3672

Data do curso: 29 a 31 de Julho de 2015

Horários: 8:00 – 11:30 (turma da manhã)
13:30 – 17:00 (turma da tarde)

Local de realização: PC - Bloco de Exatas,
Centro Politécnico - UFPR

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Um pouco de história	1
1.2	Propriedades reflexivas	3
1.2.1	Telescópio de reflexão	4
2	O Plano Cartesiano	6
2.1	Bissetrizes dos quadrantes	7
2.1.1	Bissetriz do 1 ^o e 3 ^o quadrantes	7
2.1.2	Bissetriz do 2 ^o e 4 ^o quadrantes	8
2.2	Segmento de reta	9
2.3	Distância entre dois pontos	9
2.4	Ponto médio	10
2.5	As equações da reta	11
2.5.1	Equação geral	11
2.5.2	Equação reduzida da reta	12
2.6	Distância entre ponto e reta	12
2.7	Translação de um sistema cartesiano xOy	13
2.8	Exercícios	15
3	Parábola	17
3.1	Definições iniciais	17
3.2	Equação da parábola	18
3.3	Exercícios	20
3.4	Aplicação da parábola	21
3.4.1	Propriedade refletora da parábola	21

3.4.2	Na prática	22
4	Elipse	24
4.1	Introdução	24
4.2	Equação da elipse	25
4.3	Equação da elipse transladada	28
4.4	Exercícios	29
4.5	Curiosidades e aplicações	30
4.5.1	Excentricidade	30
4.5.2	Orbitais de Kepler	30
4.5.3	Exercício	32
4.5.4	Sala do Sussurro	32
5	Hipérbole	34
5.1	Definição	34
5.2	Equação da hipérbole	38
5.3	Equação da hipérbole transladada	42
5.4	Assíntotas da hipérbole	43
5.5	Exercícios	44

Capítulo 1

Introdução

Bem-vindo ao *Brincando de Matemático*! Nesses 3 dias estudaremos algumas curvas geométricas conhecidas desde a antiguidade usando técnicas modernas da Matemática. Essas curvas são chamadas de cônicas e têm aplicações muito interessantes em problemas físicos.

A primeira pergunta que surge é: o que são **cônicas**? A capa dessa apostila que você tem em mãos traz a dica: são as curvas que surgem da interseção de um plano com um cone de duas folhas. Algumas dessas curvas são estudadas no Ensino Médio (parábola e circunferência) e outras talvez você já tenha ouvido falar: elipse e hipérbole.

1.1 Um pouco de história

Os gregos antigos tiveram um papel importante no desenvolvimento da matemática, sendo responsáveis pela primeira formalização da geometria, ou seja, por provar sistematicamente as propriedades que descobriram ou já conheciam.

Entretanto, há uma diferença fundamental entre a forma que os matemáticos gregos encaravam a ideia de variável e como nós as vemos hoje em dia. Para eles, uma variável representava o

comprimento de um segmento, a multiplicação de duas variáveis era somente vista como área de um retângulo, e a multiplicação de três variáveis era vista como o volume de um paralelepípedo.

Três problemas de geometria ficaram famosos nessa época devido a sua dificuldade, e acredita-se que o estudo formal das seções cônicas tenha iniciado também com o objetivo de resolvê-los. São eles:

Duplicação do cubo: dado um cubo de lado conhecido, quanto mede o lado de um cubo que tenha o dobro do volume do primeiro?

Quadratura do círculo: dado um quadrado de lado conhecido, é possível encontrar um círculo com a mesma área desse quadrado, usando apenas régua e compasso?

Trissecção de um ângulo: como dividir um ângulo dado em três partes usando apenas régua e compasso?

Apesar de não ter sido o primeiro a escrever sobre cônicas, o matemático grego Apolônio incluiu em sua obra *Tratado sobre as seções cônicas* algumas propriedades dessas curvas usando as técnicas e argumentos que ele dispunha na época.

Séculos mais tarde, pouco antes do Renascimento, os matemáticos Descartes e Fermat formularam, separadamente, os primórdios de um novo método para estudo de figuras geométricas, conhecido por *Geometria Analítica*. Nesse novo método a ideia primordial é associar a um problema geométrico uma ou mais equações algébricas que, após estudadas, possam fornecer informações que indiquem a solução do problema geométrico.

Curiosamente, a ideia de dois eixos ortogonais, chamados de eixos das abscissas e ordenadas, e de plano cartesiano, não foi proposto por Descartes, apesar de ter sido baseada em seus trabalhos. Ela foi apresentada posteriormente, durante o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

Nesse curso usaremos as técnicas de Geometria Analítica para entender melhor as propriedades das cônicas.

1.2 Propriedades reflexivas

As aplicações mais conhecidas das cônicas decorrem de suas propriedades reflexivas que podem ser usadas, por exemplo, para projetar e aprimorar estruturas de telescópios e câmeras fotográficas. Antes de entender como funciona um telescópio, vamos descrever com argumentos da física o que dizem estas propriedades.

Vamos imaginar que a parábola e a hipérbole são espelhadas, de modo que um raio de luz que incida sobre essas curvas refletirá e continuará descrevendo uma semireta. Nessas condições temos as seguintes propriedades:

Parábola: um raio de luz paralelo ao eixo de uma parábola interceptará essa parábola em um ponto P , refletirá e passará pelo foco da parábola;

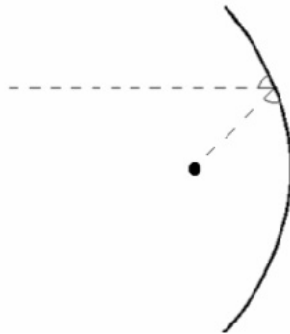


Figura 1.1: Propriedade reflexiva da parábola.

Hipérbole: um raio de luz dirigido a um dos focos da hipérbole que encontra a hipérbole num ponto Q , refletirá e passará pelo outro foco da hipérbole.

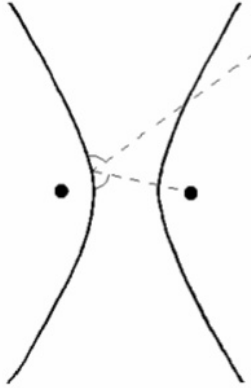
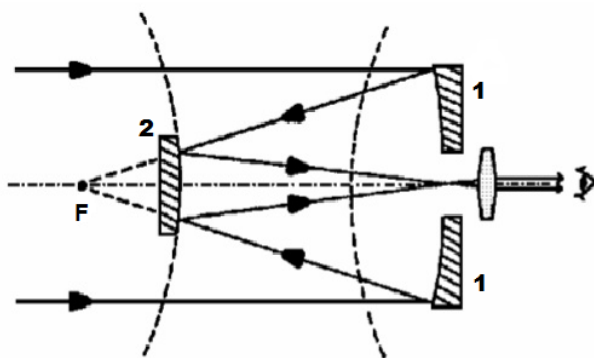


Figura 1.2: Propriedade reflexiva da hipérbole.

1.2.1 Telescópio de reflexão

Um exemplo de uma aplicação óptica é o chamado *telescópio de reflexão*. É constituído basicamente por dois espelhos, um maior, chamado primário, que é parabólico, e outro menor, que é hiperbólico. Os dois espelhos dispõem-se de modo que os eixos da parábola e da hipérbole coincidam, e que o foco da primeira coincida com um dos focos da segunda.

Quando os raios de luz se refletem no espelho parabólico são dirigidos para o foco, pela propriedade de reflexão da parábola. Como este também é foco da hipérbole, pela propriedade de reflexão desta, os raios de luz refletem-se no espelho hiperbólico e seguem em direção ao outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam através de um orifício no centro do espelho primário, atrás do qual está uma lente-ocular que permite corrigir ligeiramente a trajetória da luz, que chega finalmente aos olhos do observador.



- 1- Espelho Parabólico (Primário).
- 2- Espelho Hiperbólico.
- F- Foco coincidente.

Figura 1.3: Modelo do Telescópio.

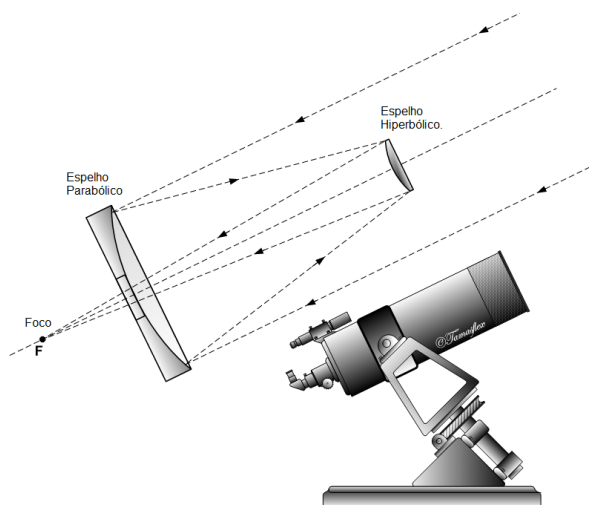


Figura 1.4: Telescópio de Reflexão.

Capítulo 2

O Plano Cartesiano

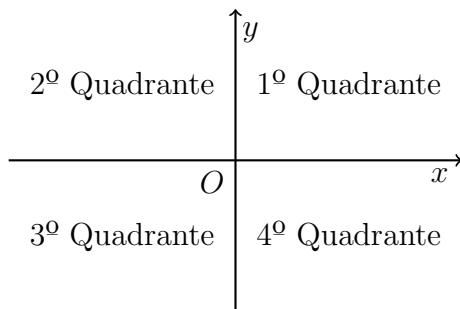


Figura 2.1: O plano

O plano cartesiano é o plano determinado por dois eixos orientados, x e y , perpendiculares em O . O eixo x é chamado de eixo das abscissas, o eixo y é chamado de eixo das ordenadas e o ponto de interseção dos eixos recebe o nome de *origem*.

Dividiremos o plano em partes chamadas de *quadrantes*, conforme a *Figura 2.1*.

Um ponto P possui coordenadas que são escritas como um par de números (x, y) . O primeiro número é a medida x e o segundo é a medida y (ver *Figura 2.2(a)*).

Se o ponto P tiver abscissa $x = 0$, diremos que o ponto P pertence ao eixo das ordenadas. Da mesma forma, se o ponto

P tiver ordenada $y = 0$, diremos que P pertence ao eixo das abscissas. Por exemplo, na *Figura 2.2(b)*, o ponto P_1 pertence ao eixo das ordenadas e o ponto P_2 , ao eixo das abscissas.

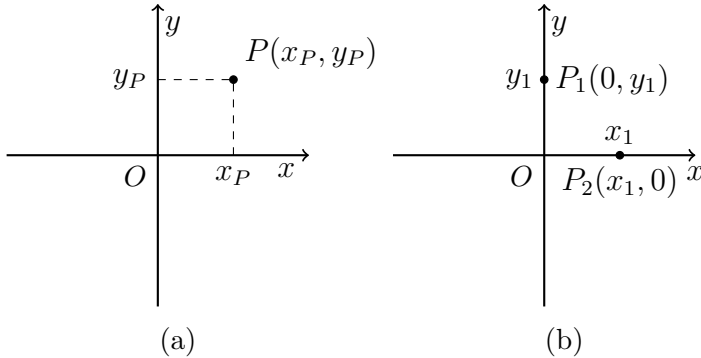


Figura 2.2

2.1 Bissetrizes dos quadrantes

Na geometria clássica, uma bissetriz de ângulo é uma semi-reta, com origem no vértice desse ângulo, que o divide em dois outros ângulos congruentes. Na geometria analítica temos duas bissetrizes importantes, cujos nomes dependem dos quadrantes por onde elas passam.

2.1.1 Bissetriz do 1^o e 3^o quadrantes

As coordenadas do ponto que pertence a essa bissetriz são iguais, ou seja, os pontos são da forma (a, a) .

No exemplo da *Figura 2.3*, temos que:

$A = (x_A, y_A)$, com $x_A = y_A$ positivos.

$B = (x_B, y_B)$, com $x_B = y_B$ negativos.

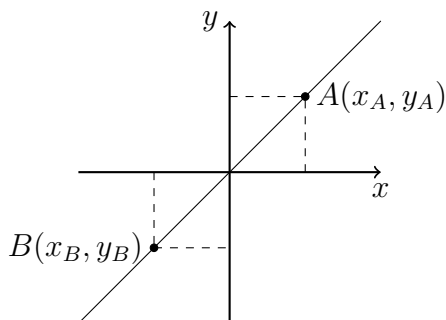


Figura 2.3

2.1.2 Bissetriz do 2^o e 4^o quadrantes

As coordenadas do ponto que pertence a essa bissetriz são da forma $(a, -a)$ ou $(-a, a)$, ou seja, possuem sinais opostos, embora sejam iguais em valor absoluto.

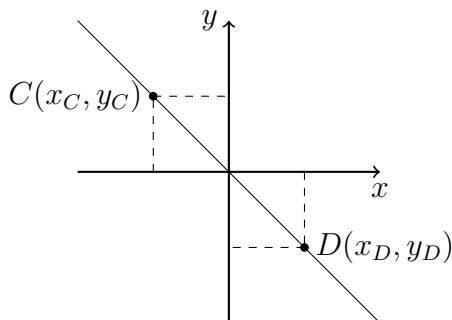


Figura 2.4

No exemplo da *Figura 2.4*, temos

$D = (x_D, y_D)$, com x_D positivo, y_D negativo e $|x_D| = |y_D|$.

$C = (x_C, y_C)$, com x_C negativo, y_C positivo e $|x_C| = |y_C|$.

Exemplo 1. Os pontos $A = (2, -2)$ e $B = (-2, 2)$ na *Figura 2.5* pertencem à bissetriz dos quadrantes pares e os pontos $C = (2, 2)$ e $D = (-2, -2)$ pertencem à bissetriz dos quadrantes ímpares.

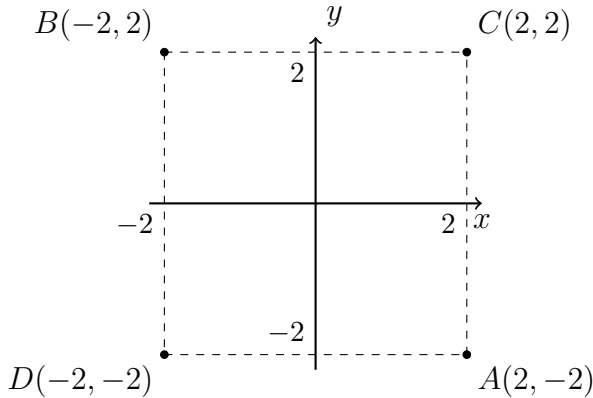


Figura 2.5

2.2 Segmento de reta

Dados dois pontos A e B como na *Figura 2.6*, o segmento que liga o ponto A ao ponto B é representado por \overline{AB} . O tamanho do segmento \overline{AB} é a distância de A até B ou a distância de B até A .

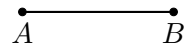


Figura 2.6

2.3 Distância entre dois pontos

A distância entre A e B , representada por $d(A, B)$, é o tamanho do segmento \overline{AB} .

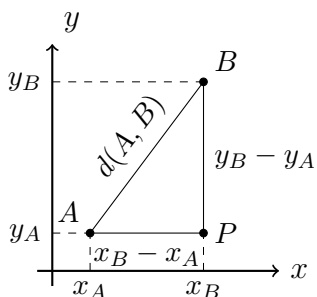


Figura 2.7

Para calcular a distância entre os pontos A e B basta observar que o triângulo $\triangle APD$ é retângulo e aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$[d(A, B)]^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemplo 2. Calcule a distância entre $A = (2, 3)$ e $B = (5, 1)$:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{9 + 4} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

2.4 Ponto médio

Definição 1. O ponto médio é o ponto que divide ao meio um segmento de reta.

Considere o segmento \overline{AB} e M seu ponto médio. Se M divide o segmento ao meio, então a distância de A até M será a metade da distância de A até B , assim como a distância de B a M . Portanto,

$$d(A, M) = d(B, M).$$

Se $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $M = (x_M, y_M)$, então

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Exemplo 3. Se $A = (4, 2)$ e $B = (8, 4)$, quais as coordenadas do ponto médio de \overline{AB} ?

Solução:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 + 8}{2} = 6$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

Então $M = (6, 3)$.

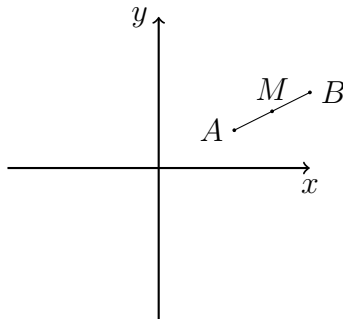


Figura 2.8

2.5 As equações da reta

2.5.1 Equação geral

Se $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $P = (x, y)$ são colineares, ou seja, pertencem à mesma reta, então satisfazem:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Logo, $x_A y_B + x y_A + y x_B - x y_B - x_A y - x_B y_A = (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A y_A - x_B y_A = 0$. Chamando $a = y_A - y_B$,

$b = x_B - x_A$ e $c = x_A y_A - x_B y_A$, temos

$$ax + by + c = 0,$$

com a, b e $c \in \mathbb{R}$.

Em geral, conhecemos os pontos A e B e com esta equação é possível identificar outros pontos da reta, porque da forma como foi deduzida foi deduzida, temos que o ponto $P = (x, y)$ que satisfizer a equação pertencerá à reta.

2.5.2 Equação reduzida da reta

A equação reduzida é obtida quando isolamos a variável y na equação geral:

$$ax + by + c = 0$$

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

É costume usar as notações $m = \frac{-a}{b}$ e $n = \frac{-c}{b}$ e reescrever a última equação acima como

$$y = mx + n$$

2.6 Distância entre ponto e reta

A menor distância entre um ponto P e uma reta r é dada por um segmento perpendicular a r que chega a P .

Dados o ponto $P = (x_0, y_0)$ e a reta r de equação geral $ax + by + c = 0$, a distância entre o ponto P e r é dada por

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo 4. Determinar a distância entre o ponto $P = (1, 5)$ e a reta r de equação $5x + y - 11 = 0$.

$$\begin{aligned} d(P, r) &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|5 \cdot 1 + 1 \cdot 5 - 11|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|10 - 11|}{\sqrt{26}} = \frac{|-1|}{\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \end{aligned}$$

2.7 Translação de um sistema cartesiano xOy

Considere a figura 2.9 abaixo.

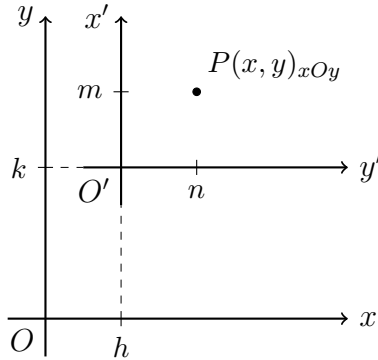


Figura 2.9

Para encontrarmos as coordenadas de O' no sistema xOy consideramos O' como um ponto em xOy . Note que $O' = (x_0, y_0)_{xOy}$. De forma geral, para sabermos as coordenadas de um ponto $P = (x', y')$ no sistema xOy , com coordenadas x' e y'

dadas no sistema cartesiano $x'O'y'$, escrevemos:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + x' \\ y &= y_0 + y'.\end{aligned}$$

onde x e y são as coordenadas de P no sistema xOy , x_0 e y_0 são as coordenadas de O' também no sistema xOy . Podemos ainda escrever as coordenadas x' e y' de um ponto em função de x e y :

$$\begin{aligned}x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0,\end{aligned}$$

Exemplo 5. Seja xOy um sistema cartesiano e $x'O'y'$ outro sistema cartesiano, com $O' = (1, 3)_{xOy}$. Quais são as coordenadas de $P = (2, 1)_{xOy}$ em relação a $x'O'y'$?

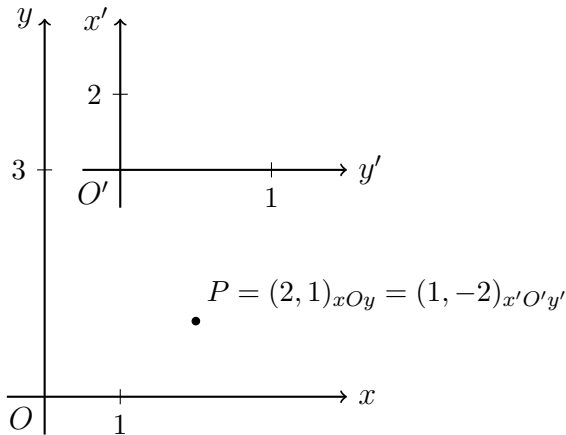


Figura 2.10: Exemplo 5

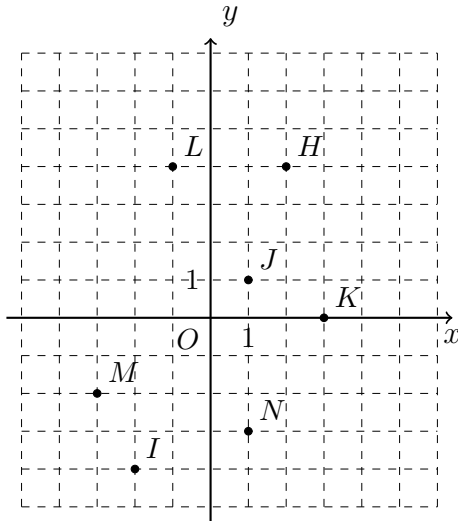
Solução:

$$\begin{aligned}x' &= 2 - 1 = 1 \\ y' &= 1 - 3 = -2.\end{aligned}$$

Logo $P = (1, -2)_{x'O'y'}$.

2.8 Exercícios

Exercício 1. a) Forneça as coordenadas dos pontos abaixo:

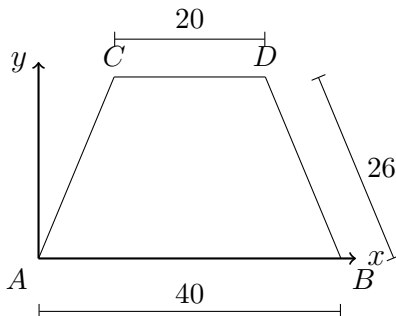


b) A qual quadrante cada ponto pertence?

Exercício 2. Determine os valores de k para que:

- $P(0, k^2 - 2)$ coincida com a origem.
- $P(5, k)$ e $Q(3, 2)$ tenham a mesma coordenada y .

Exercício 3. Determine as coordenadas dos vértices do trapézio isósceles abaixo.



Exercício 4. Calcule a distância entre os pontos

a) $A = (1, 2)$ e $B = (3, 2)$

b) $C = (5, 4)$ e $D = (5, 8)$

c) $E = (1, 5)$ e $F = (7, 2)$

Exercício 5. O ponto B possui coordenada x nula e dista 4 de A , que possui ambas as coordenadas iguais a 2. Calcule a coordenada y de B .

Exercício 6. Se $A = (7, 2)$ e $M = (8, 5)$, com M ponto médio do segmento \overline{AB} , quais são as coordenadas do ponto B ?

Exercício 7. Calcule a distância entre o ponto P e a reta r

a) $P = (-1, -3)$ e $r : 3x - y + 5 = 0$

b) $P = (0, 2)$ e $r : 4x - 3y - 11 = 0$.

Capítulo 3

Parábola

3.1 Definições iniciais

Definição 2. Sejam r uma reta e F um ponto não pertencente a ela. Chamamos de parábola P o lugar geométrico dos pontos X equidistantes de F e r , isto é, $d(X, r) = d(X, F)$.

Definimos também:

1. F como o foco da parábola;
2. r como a diretriz da parábola P ;
3. a reta que contém o foco F e é perpendicular à diretriz como o eixo da parábola;
4. o número positivo p tal que $d(F, r) = 2p$ como parâmetro da parábola P ;
5. se H é o ponto de intersecção do eixo com a diretriz o ponto médio V de HP é definido como vértice da parábola;
6. corda da parábola é qualquer segmento cujas extremidades (distintas) pertencem à parábola;

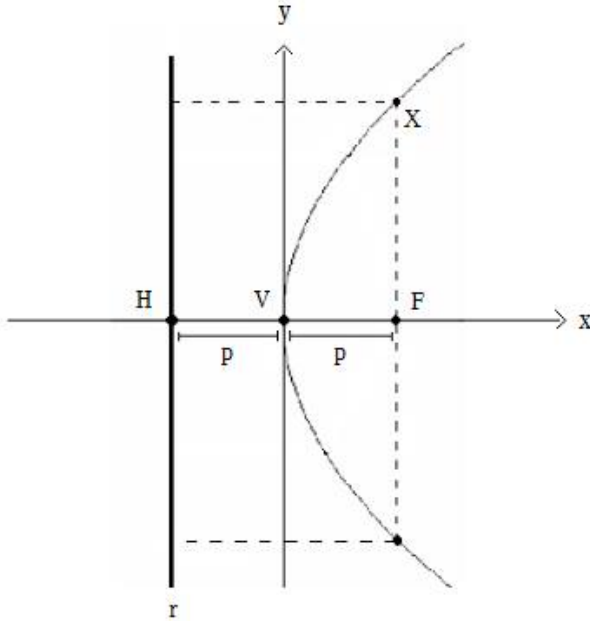


Figura 3.1

7. o comprimento da corda que contém o foco e é perpendicular ao eixo é a amplitude focal.

3.2 Equação da parábola

Tomemos o sistema ortogonal de coordenadas padrão, com $F = (p, 0)$, $X = (x, y)$ e a diretriz é a reta $r : x = -p$, como na figura acima.

Pela definição de parábola, temos que:

$$\begin{aligned}
 d(X, r) &= d(X, F) \\
 \sqrt{(x - (-p))^2 + (y - y)^2} &= \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} \\
 \sqrt{(x + p)^2} &= \sqrt{(x - p)^2 + y^2} \\
 |x + p| &= \sqrt{(x - p)^2 + y^2} \\
 |x + p|^2 &= \left(\sqrt{(x - p)^2 + y^2}\right)^2 \\
 |x + p|^2 &= (x - p)^2 + y^2 \\
 x^2 + 2px &= p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2
 \end{aligned}$$

Simplificando a expressão acima chegamos a seguinte equação

$$y^2 = 4px$$

conhecida como a equação reduzida da parábola P .

Outras situações da parábola no sistema de coordenadas ortogonal:

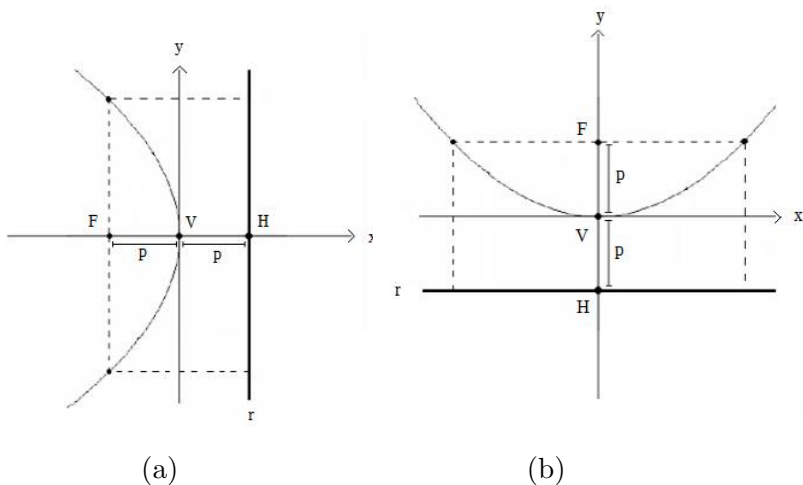


Figura 3.2

Se $F = (-p, 0)$ e $V = (0, 0)$, então a reta diretriz terá equação $r : x = p$ e a equação reduzida da parábola (*Figura 3.2(a)*) será

$$y^2 = -4px.$$

Se $F = (0, p)$ e $V = (0, 0)$, então a reta diretriz terá equação $r : y = -p$ e a equação reduzida da parábola (*Figura 3.2(b)*) será

$$x^2 = 4py.$$

Se $F(0, -p)$ e $V = (0, 0)$ então a reta diretriz terá equação $r : y = p$ e a equação reduzida da parábola (*Figura 3.3*) será

$$x^2 = -4py.$$

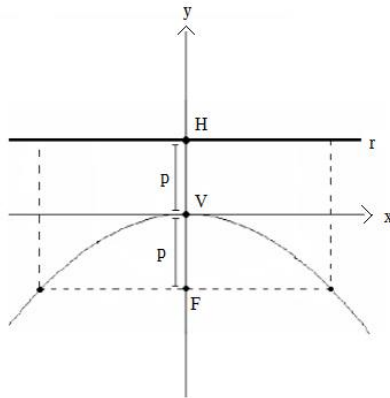


Figura 3.3

3.3 Exercícios

Exercício 8. Qual é a equação da parábola de foco $F = (2, 0)$ e vértice a origem?

Exercício 9. Qual é a equação da parábola de foco $F = (6, 3)$ e vértice $V = (2, 3)$?

Exercício 10. Qual é a equação da parábola de foco $F = (4, 0)$ e vértice $V = (2, 0)$?

Exercício 11. Qual é a equação da parábola de foco $F = (0, 4)$ e vértice $V = (0, 1)$?

Exercício 12. Dada a equação $y^2 = -5x$, obtenha:

- (a) o parâmetro;
- (b) o foco;
- (c) a diretriz.

3.4 Aplicação da parábola

3.4.1 Propriedade refletora da parábola

A parábola é uma curva que possui um foco, e já vimos na introdução um pouco sobre como isso está relacionado a aplicações práticas pelas **propriedades de reflexão**. Veremos agora essas propriedades em mais detalhes:

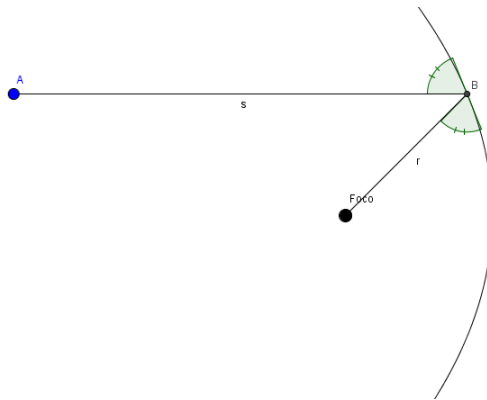


Figura 3.4

Tomando qualquer ponto A , tracemos um segmento de reta s que seja paralelo ao eixo da parábola e que corte a parábola em algum ponto. Temos um ângulo α formado entre o segmento e a parábola. Traçando outro segmento r (diferente de s) que corte a parábola no mesmo ponto que s , se este outro segmento formar o mesmo ângulo com a curva, então r intercepta o foco da parábola.

Se tomarmos agora o foco da parábola como ponto inicial, nos deparamos com outra situação interessante. Traçando um segmento de reta r a partir do foco, que corte a parábola em algum ponto. Temos um ângulo α formado entre o segmento e a parábola. Traçando outro segmento s (diferente de r), que corte a parábola no mesmo ponto que r ; se este outro segmento, formar o mesmo ângulo com a curva, então s é paralela ao eixo da parábola (*Figura 3.4*).

3.4.2 Na prática

Estas propriedades fazem com que a parábola tenha várias aplicações práticas. Um bom exemplo disso são as antenas parabólicas, que concentram em um aparelho receptor os sinais vindos de um satélite, como esquematizado na *Figura 3.5*.

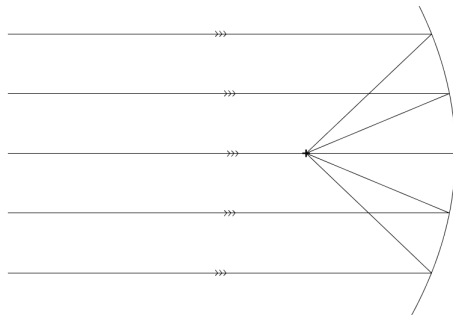


Figura 3.5: Receptor de satélite

Outro exemplo da aplicação das propriedades refletoras da parábola são os faróis dos automóveis e motocicletas. Estes são espelhados por dentro e em que se coloca a lâmpada no foco, como mostrado em esquema similar ao exemplo do satélite, na *Figura 3.6*.

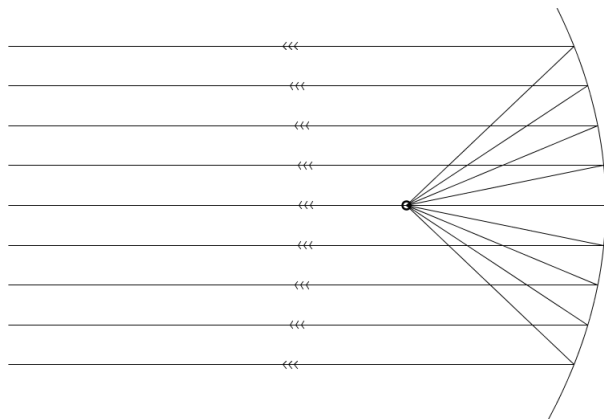


Figura 3.6: Faróis de automóveis

Capítulo 4

Elipse

4.1 Introdução

Fixemos inicialmente dois pontos distintos F_1 e F_2 no eixo x de um plano de forma que tenham mesma distância da origem, e chamemos esses pontos de *focos*. Queremos encontrar todos os pontos X do plano tais que $d(X, F_1) + d(X, F_2)$ seja sempre igual a um valor $2a$, escolhido previamente. O conjunto desses pontos será chamado de *elipse*.

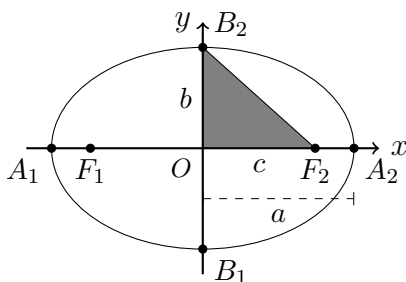


Figura 4.1: a elipse

Com as palavras que usamos para estudar a parábola, temos que:

Definição 3. *Elipse* é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 é constante igual a $2a$.

Para facilitar nossos cálculos, chamaremos de b a distância entre B_1 ou B_2 e a origem; de a a distância entre A_1 ou A_2 e a origem; e de c a distância entre F_1 ou F_2 e a origem.

Na *Figura 4.1*, podemos ver que o segmento $\overline{A_1A_2}$ é maior que $\overline{B_1B_2}$. Nesse caso, diremos que $\overline{A_1A_2}$ é o *eixo maior* da elipse e que $\overline{B_1B_2}$ é o eixo menor.

Observação 1. No triângulo ΔB_2OF_2 , vamos ter $b^2 + c^2 = a^2$. Você saberia nos dizer por quê?

Observação 2. Se tivéssemos $A_1A_2 = B_1B_2$, que figura iríamos obter? Onde estariam os focos?

4.2 Equação da elipse

Para dedução da equação da elipse, vamos considerar que os focos estão nos eixos x ou y e a uma mesma distância da origem. Fixaremos também que $\overline{A_1A_2}$ é sempre o eixo maior. Por isso, dividiremos nosso estudo em dois casos:

I) Caso em que o eixo maior coincide com o eixo Ox

Sejam $P = (x, y)$ um ponto qualquer do plano e $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ os focos da elipse.

O que sabemos:

$$d(F_1, P) + d(P, F_2) = 2a \quad (4.1)$$

$$d(F_1, P) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (4.2)$$

$$d(P, F_2) = \sqrt{(c-x)^2 + (-y)^2} \quad (4.3)$$

Vamos substituir (4.2) e (4.3) em (4.1):

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(c-x)^2+(-y)^2} = 2a$$

Queremos simplificar essa expressão:

$$\sqrt{x^2+2xc+c^2+y^2} + \sqrt{c^2-2xc+x^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2+2xc+c^2+y^2} = 2a - \sqrt{c^2-2xc+x^2+y^2}$$

Elevando ao quadrado em ambos os lados:

$$x^2+2xc+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{c^2-2xc+x^2+y^2} + c^2-2xc+x^2+y^2$$

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{c^2-2xc+x^2+y^2}$$

$$xc = a^2 - a\sqrt{c^2-2xc+x^2+y^2}$$

$$xc - a^2 = -a\sqrt{c^2-2xc+x^2+y^2}$$

$$a^2 - xc = a\sqrt{c^2-2xc+x^2+y^2}$$

Elevando ao quadrado novamente:

$$a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2(c^2 - 2xc + x^2 + y^2)$$

$$a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2c^2 - 2a^2xc + a^2x^2 + a^2y^2$$

$$a^4 + x^2c^2 = a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos

$$a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2$$

Dividindo ambos os lados por a^2b^2 temos a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação da elipse centrada na origem e eixo maior sobre o eixo Ox .

II) Caso em que eixo maior coincide com o eixo Oy

Teremos que os focos serão $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ e, de maneira análoga ao caso I, obteremos

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

que é a equação da elipse centrada na origem e eixo maior sobre o eixo Oy .

Observação 3. Se (x, y) é solução de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ou seja, pertence à elipse, então $(-x, y)$, $(x, -y)$ e $(-x, -y)$ também são soluções, ou seja, também pertencem à elipse. Isto significa que a elipse é simétrica em relação à reta que contém os focos, à mediatriz do segmento F_1F_2 e ao seu centro.

Observação 4. Podemos extrair, da equação da elipse, suas interseções com o eixo x . Façamos $y = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \\ &\iff \frac{x^2}{a^2} = 1 && (4.4) \\ &\iff x^2 = a^2 \\ &\iff x = \pm a \end{aligned}$$

Observação 5. Podemos também obter as interseções da elipse com o eixo y , de forma semelhante à observação anterior. Com $x = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\iff \frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ &\iff \frac{y^2}{b^2} = 1 && (4.5) \\ &\iff y^2 = b^2 \\ &\iff y = \pm b \end{aligned}$$

4.3 Equação da elipse transladada

Nem sempre o eixo maior coincide com um dos os eixos coordenados. Quando isso acontece, precisamos utilizar o estudo de translação para encontrar a equação da elipse.

I) Quando o eixo maior é paralelo ao eixo Ox

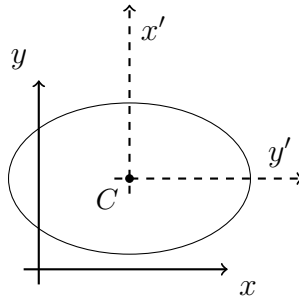


Figura 4.2

Considere o centro da elipse como sendo o ponto $C = (x_0, y_0)$. Conforme estudado na translação de eixos, temos $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$, donde a equação da elipse fica:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

II) Quando o eixo maior é paralelo ao eixo Oy

De modo análogo, deduzimos que a equação da elipse centrada em $C = (x_0, y_0)$ com eixo maior paralelo ao eixo Oy é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

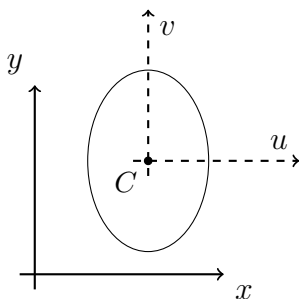


Figura 4.3

4.4 Exercícios

Exercício 13. Dados os parâmetros $a = 5$ e $b = 3$, faça um esboço da elipse e descreva sua equação.

Exercício 14. Determine as coordenadas dos focos da elipse de equação $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Exercício 15. Considere a elipse de equação

$$9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0.$$

Determine:

- As coordenadas dos vértices A_1 , A_2 , B_1 e B_2 .
- As coordenadas dos focos.

Exercício 16. Descreva a equação da elipse nos casos em que:

- O centro é a origem $(0, 0)$, os focos estão em Ox , o eixo menor mede 6 e a distância entre os focos é 8.
- Os focos são $(0, 6)$ e $(0, -6)$ e o eixo maior mede 34.
- O centro é a origem $(0, 0)$, $(0, -\sqrt{40})$ é um foco e o ponto $(\sqrt{5}, \frac{14}{3})$ pertence à elipse.

4.5 Curiosidades e aplicações

4.5.1 Excentricidade

Chamamos de *excentricidade da elipse* o número $e = \frac{c}{a}$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, com a , b e c positivos, teremos que

$$0 < \frac{c}{a} < 1,$$

ou seja, $0 < e < 1$.

O que acontece quando $e = 0$?

Se $e = 0$, então $\frac{c}{a} = 0$, logo $c = 0$. De $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos $a^2 = b^2$. Logo, $a = b$. Isso implica que $2a = 2b$, ou seja, a medida do eixo maior e a medida do eixo menor são iguais.

Faça um esboço e conclua que, se $e = 0$, a elipse é, de fato, uma *circunferência*.

O que acontece quando $e = 1$?

Se $e = 1$, então $\frac{c}{a} = 1$, logo $a = c$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos $a^2 = b^2 + a^2$, donde $b = 0$ ou seja, a medida do eixo maior é igual a 0.

Faça um esboço e conclua que, se $e = 1$, a elipse é, de fato, um *segmento de reta*.

4.5.2 Orbitais de Kepler

Aprendemos nas aulas de Física que todo objeto exerce uma força de interação gravitacional sobre os outros objetos. A gravidade aumenta com a massa e, assim, quanto maior a massa de um objeto, maior é a força da gravidade que ele exerce sobre os outros. Quando um planeta, como a Terra, se move pelo

espaço, é influenciado por todos os outros corpos em torno dele. Se a gravidade do objeto de maior massa for suficiente, a Terra irá girar em torno dele por um trajeto conhecido como *órbita*. Quando a Terra é capturada pela força gravitacional do Sol, corpo de maior massa no sistema solar, seu trajeto é desviado, fazendo-a virar-se em sua direção.

O cientista Johannes Kepler (1571-1630) foi um dos precursores no estudo matemático envolvendo os orbitais elípticos dos planetas. Antes de Kepler, acreditava-se que os planetas se movimentassem em círculos perfeitos ao redor do Sol, conforme descrito por Copérnico em 1543. Kepler elaborou três leis ao todo, das quais veremos somente a primeira, que serviram de inspiração à Lei da Gravitação Universal, de Newton.

Definição 4. Orbital Elíptico é uma órbita com excentricidade maior do que 0 e menor do que 1. Ou seja, exclui-se a órbita circular.

Primeira Lei de Kepler (Lei das Órbitas)

“Todos os planetas se movem em orbitais elípticos tendo o Sol como um dos focos”

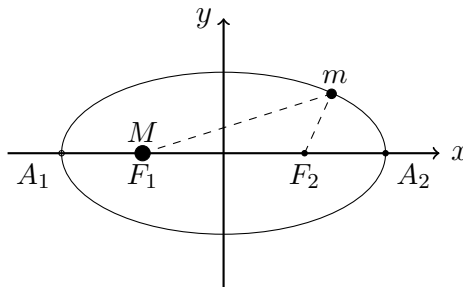


Figura 4.4

A *Figura 4.4* é um exemplo de um orbital elíptico. Representamos o Sol como o ponto de massa M e a Terra como o

ponto de massa m . Como a massa do Sol é muito maior que a massa da Terra, o centro de massa deste sistema fica localizado no próprio Sol, que é um dos focos da elipse. O outro foco é um ponto localizado simetricamente ao foco do Sol, e recebe o nome de “foco vazio”. Note que a distância $d(F_1, A_1) = R_p$ representa a distância mínima que o planeta pode ter com relação ao Sol. Esta é a distância quando a Terra está no ponto chamado de *periélio*. A distância $d(F_1, A_2) = R_a$, quando a Terra está no ponto *afélio*, é a distância máxima possível.

4.5.3 Exercício

Exercício 17. Pela Primeira Lei de Kepler, a trajetória da Terra é elíptica e o Sol ocupa a posição de um de seus focos. Calcule o periélio e o afélio, adotando os valores aproximados: distância focal da trajetória da Terra: $0,50 \cdot 10^7 km$; medida do eixo maior: $30,00 \cdot 10^7 km$.

4.5.4 Sala do Sussurro

As salas de sussurros são construções de formato elíptico com dois pontos marcados no chão, que coincidem com os focos da elipse. Como na *Figura 4.5*, duas pessoas, P1 e P2, ficam em pé, uma em cada ponto, e podem se comunicar em voz sussurrada, praticamente inaudível em qualquer outro ponto da sala.

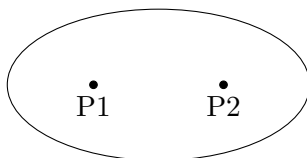


Figura 4.5: uma sala do sussurro

Vejamos como isso ocorre devido a uma propriedade da elipse chamada de *propriedade bissetora*.

Propriedade Bissetora

Seja E uma elipse qualquer com focos P e Q e considere um ponto qualquer X que pertença a E . A propriedade bissetora nos diz que a reta r , tangente à elipse em X , forma ângulos iguais com os raios focais \overline{PX} e \overline{QX} , como mostrado na *Figura 4.6*.

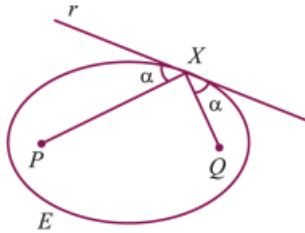


Figura 4.6: propriedade bissetora

Pela definição de elipse, a soma das distâncias de um ponto da curva aos focos é constante. Logo, todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos que cheguem ao segundo foco terão percorrido a mesma distância. A propriedade bissetora nos garante que todo som emitido em um dos focos chegará exatamente ao segundo foco.

Capítulo 5

Hipérbole

5.1 Definição

Considere F_1 e F_2 dois pontos distintos do plano, e seja $2c$ a distância entre eles. Nós chamamos de Hipérbole o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que a diferença das distâncias à F_1 e F_2 é $2a$, onde $0 < 2a < 2c$. Mas o que isso quer dizer? Se tivermos o conjunto de todos os pontos tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a,$$

podemos ver, pela equação acima, que o ponto P está na hipérbole se

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a.$$

Você sabe dizer quando será $+2a$ e será $-2a$?

Quando P está na “parte” da direita teremos $+2a$ e na “parte” da esquerda teremos $-2a$.

Quando $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$, temos

$$d(P, F_1) = d(P, F_2) + 2a > d(P, F_2),$$

logo, a distância de P ao foco F_1 é maior que a distância de P ao foco F_2 .

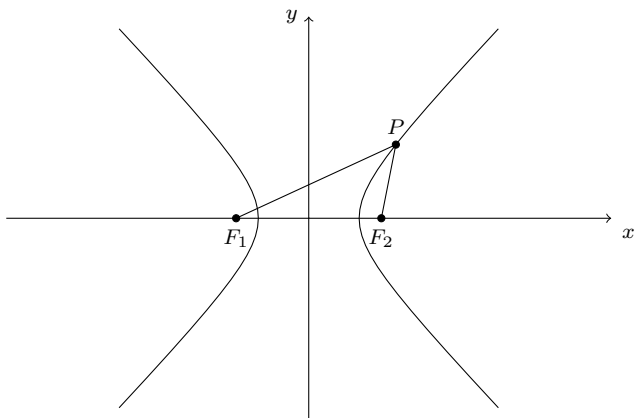


Figura 5.1

Quando $d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a$, então

$$d(P, F_2) = d(P, F_1) + 2a > d(P, F_1),$$

logo, a distância de P ao foco F_2 é maior que a distância de P ao foco F_1 .

Note que um ponto P não pode satisfazer as duas desigualdades, assim dizemos que a hipérbole é formada por dois conjuntos disjuntos de pontos. Esses conjuntos são chamados de ramos da hipérbole. Então chamamos as “partes” às quais nos referíamos anteriormente de ramos.

Considerando a reta que passa por F_1 e F_2 , chamaremos as interseções com a hipérbole de A_1 e A_2 . Se traçarmos uma perpendicular a esta reta, passando pelo centro C do segmento $\overline{F_1F_2}$, podemos perceber a simetria da hipérbole em relação a estas duas retas, e também em relação ao ponto C . Devido a esta simetria, se P_1 é um ponto da hipérbole, é possível apontar outros três pontos da hipérbole: P_2 , P_3 e P_4 . Você consegue identificar, de acordo com a *Figura 5.2*, em relação a qual reta, ou ponto, esses pontos são simétricos a P_1 ?

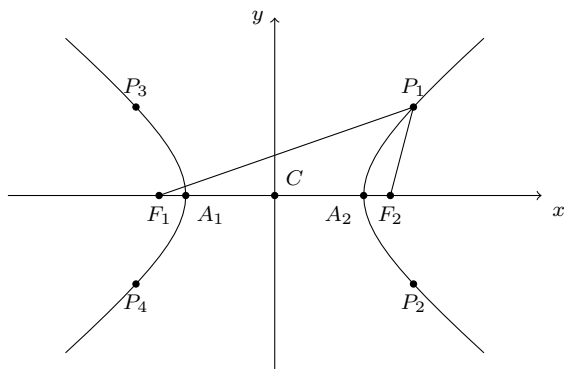


Figura 5.2

Note que P_2 é simétrico em relação à reta horizontal, P_3 é simétrico em relação à reta vertical e P_4 é simétrico em relação ao ponto C . Ainda podemos concluir que

$$d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2).$$

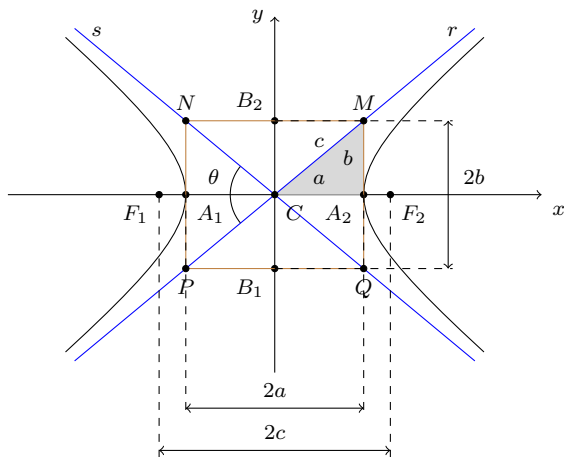


Figura 5.3

Focos: F_1 e F_2 ;

Centro: é o ponto médio C do segmento $\overline{F_1F_2}$;

Distância Focal: é a distância $2c$ entre os focos,

$$c = d(C, F_1) = d(C, F_2);$$

Eixo Real: é o segmento $\overline{A_1A_2}$, de comprimento $2a$, sendo

$$a = d(C, A_1) = d(C, A_2);$$

Eixo Imaginário: é o segmento B_1B_2 , de comprimento $2b$.

O valor de $b = d(C, B_1) = d(C, B_2)$ é definido pelo Teorema de Pitágoras ($c^2 = a^2 + b^2$), sendo a , b e c são as medidas dos lados do triângulo retângulo CA_2M ;

Assíntotas: são as retas r e s das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos focos (falaremos mais sobre elas mais tarde);

Abertura: o ângulo θ é chamado de abertura da hipérbole;

Excentricidade: é o número $e = \frac{c}{a}$.

Note que $c > a$, logo $e > 1$.

A excentricidade de uma hipérbole está ligada com a sua abertura, se mantivermos o segmento c fixo e variarmos o comprimento do segmento a , teremos uma abertura maior quando a é menor, e uma abertura menor quando a é maior. Então, se diminuirmos o valor de a teremos uma excentricidade maior, logo, os ramos da hipérbole estarão mais abertos. E quando $a = b$? O que podemos dizer de $MNPQ$? Quando isso acontece, $MNPQ$ é um quadrado, $\theta = \frac{\pi}{4}$, e temos uma Hipérbole Equilátera.

5.2 Equação da hipérbole

Dado um ponto genérico $P = (x, y)$ podemos utilizar a definição de hipérbole para encontrar a relação que x e y devem satisfazer para que o ponto P pertença à hipérbole. Primeiro vamos considerar o caso em que o eixo real coincide com o eixo O_x .

Suponha que o ponto $P = (x, y)$ é um ponto da hipérbole com focos em $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Por definição, se o ponto P está na hipérbole então ele satisfaz

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a,$$

ou seja,

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a.$$

Isto significa que

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a.$$

Considere o caso em que $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.

Vamos isolar $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

e elevar ao quadrado os dois lados da equação,

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Agora vamos desenvolver os termos $(x+c)^2$ e $(x-c)^2$,

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

isolar $4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ na equação,

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4xc - 4a^2$$

e dividir os dois lados por 4,

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2.$$

Antes de continuar, note que se considerarmos o caso em que $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a$, fazendo as mesmas contas chegamos em

$$-a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2.$$

Nos dois casos, para eliminar a raiz quadrada podemos elevar os dois lados da equação ao quadrado. Como o quadrado de um número é igual ao quadrado do seu oposto, a partir desse ponto as contas ficam iguais para os dois casos. Então elevamos os dois lados da equação ao quadrado desenvolvemos o termo $(x-c)^2$,

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = x^2c^2 - 2xca^2 + a^4.$$

Fazendo as simplificações possíveis e levando para o lado esquerdo da equação apenas os termos que tem x e y obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

$$\text{Mas } a^2 - c^2 = -b^2,$$

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2(-b^2)$$

e se dividirmos os dois lados por $a^2(-b^2)$ teremos a equação reduzida da hipérbole com centro na origem e eixo real paralelo ao eixo x (*Figura 5.4*):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

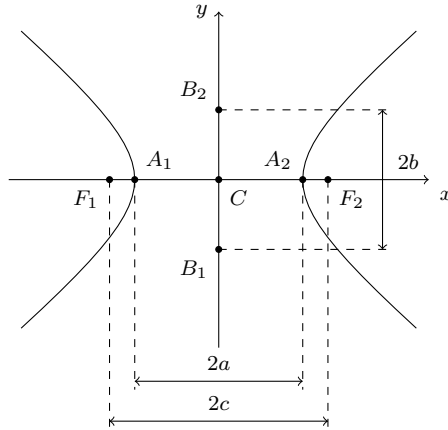


Figura 5.4

O caso em que o eixo real coincide com o eixo O_y é muito parecido. A diferença está nos focos da hipérbole que agora estão no eixo O_y e tem coordenadas $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$. Suponha que o ponto $P = (x, y)$ está na hipérbole, então ele satisfaz

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Fazendo as mesmas operações que foram feitas acima, teremos a equação reduzida da hipérbole com centro na origem e eixo real paralelo ao eixo y (Figura 5.5):

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Note que o eixo real da hipérbole coincide com o eixo da coordenada que acompanha o coeficiente positivo. Além disso, a equação reduzida nos permite identificar com mais facilidade outros elementos da hipérbole, como podemos ver no exemplo:

Exemplo 1. Considere a equação $16x^2 - 25y^2 = 400$. Dividimos por 400 para colocá-la na forma reduzida:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

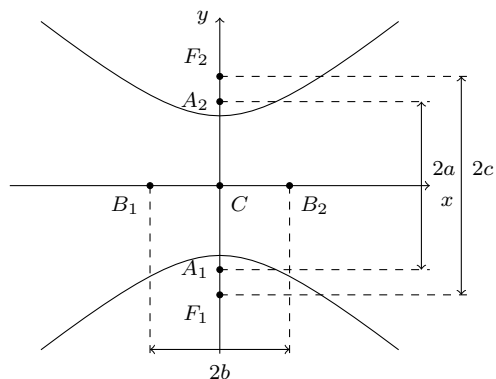


Figura 5.5

Podemos ver que o eixo real coincide com o eixo x . Além disso, como $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$ fica fácil identificar os focos $F_1 = (-\sqrt{41}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{41}, 0)$, e os pontos $A_1 = (-5, 0)$ e $A_2 = (5, 0)$, $B_1 = (0, -4)$ e $B_2 = (0, 4)$.

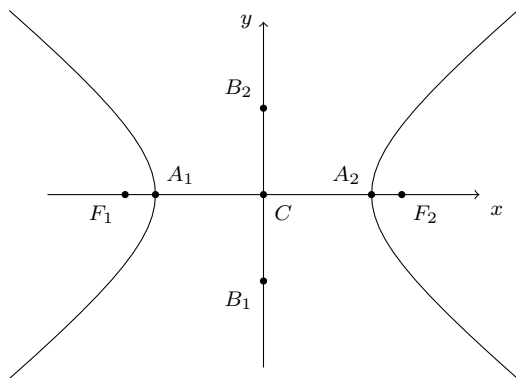


Figura 5.6: Exemplo 1

5.3 Equação da hipérbole transladada

Na seção anterior foram deduzidas as equações das hipérbolas com centro na origem, mas podemos pensar na hipérbole com eixo real paralelo ao eixo x e centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$. Se utilizarmos o sistema de coordenadas com centro em O' , a equação reduzida da hipérbole é:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

onde $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$. Portanto, no sistema de coordenadas com centro na origem, a equação reduzida da hipérbole com centro em $O' = (x_0, y_0)$ e eixo real paralelo ao eixo x é (Figura 5.7):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

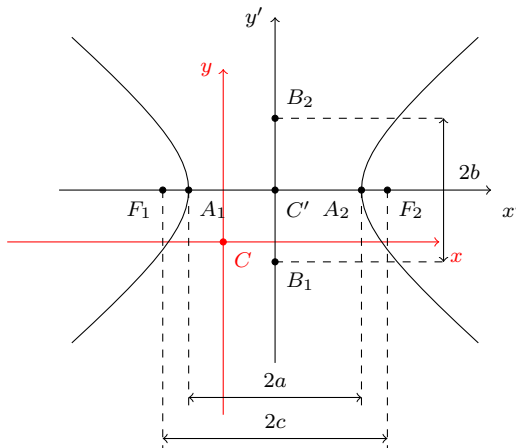


Figura 5.7

Da mesma forma, a equação reduzida da hipérbole com centro em $O'(x_0, y_0)$ e eixo real paralelo ao eixo y é (Figura 5.8):

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

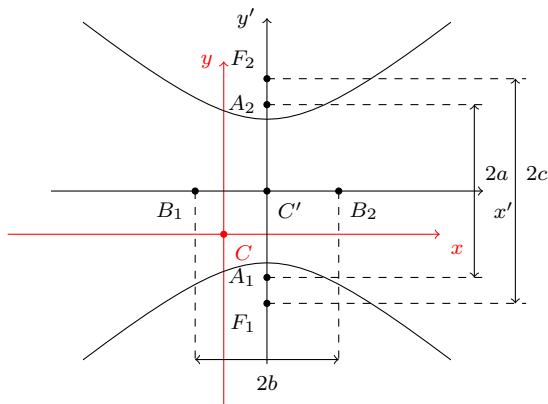


Figura 5.8

5.4 Assíntotas da hipérbole

Vamos considerar a hipérbole com centro na origem e eixos paralelos ao eixo O_x , pois as contas são análogas para os demais casos.

As assíntotas são retas que, conforme os valores de x ficam muito grandes, se aproximam cada mais da hipérbole, mas nunca interceptam a hipérbole. Para encontrar tais retas é útil falar do retângulo $MNPQ$ de lados $2a$ e $2b$, tangente à hipérbole nos vértices, como mostra a *Figura 5.9*.

Este retângulo é chamado de retângulo fundamental. Note que, devido à relação fundamental, as diagonais do retângulo tem comprimento $2c$.

As assíntotas são as retas que passam sobre as diagonais do retângulo fundamental. Considere a reta $y = \alpha x + \beta$ que passa pelos pontos $P_2 = (a, b)$ e $P_4 = (-a, -b)$. Substituindo os pontos na equação da reta obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} a\alpha + \beta = b \\ -a\alpha + \beta = -b \end{cases}$$

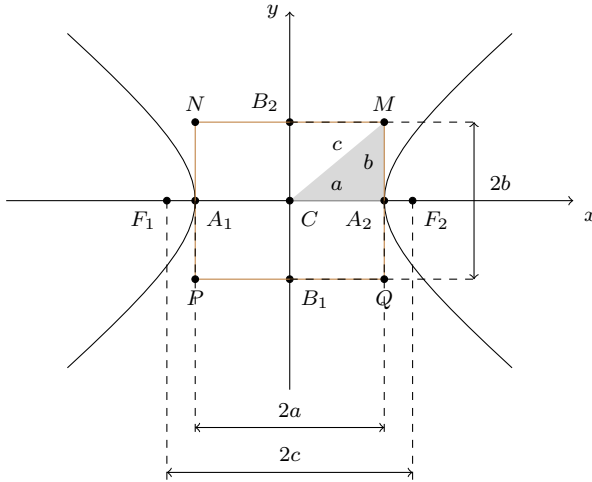


Figura 5.9

Resolvendo o sistema de equações encontramos $\alpha = \frac{b}{a}$ e $\beta = 0$, ou seja, a equação da assíntota é:

$$r : y = \frac{b}{a}x.$$

De forma análoga podemos determinar a equação da assíntota que passa pelos pontos $P_1 = (a, -b)$ e $P_3 = (-a, b)$, e obtemos:

$$s : y = -\frac{b}{a}x.$$

5.5 Exercícios

Exercício 18. Determine a equação da hipérbole com centro na origem e:

- Focos em** $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$ e **vértices** $A_1 = (-2, 0)$ e $A_2 = (2, 0)$.
- Focos em** $F_1 = (0, -5)$ e $F_2 = (0, 5)$ e **vértices** $A_1 =$

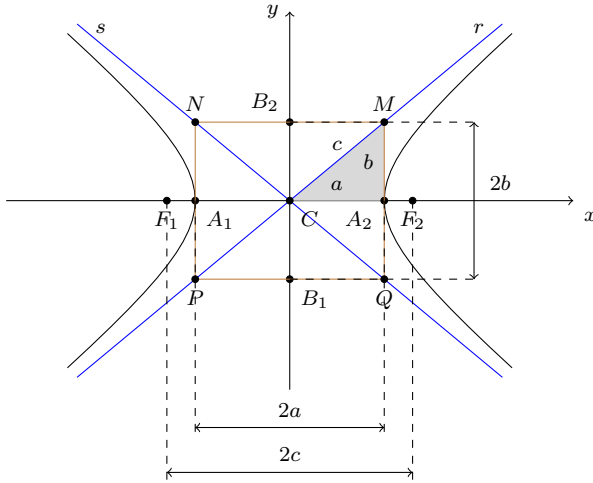


Figura 5.10

$(0, -4)$ e $A_2 = (0, 4)$.

c) **Focos em** $F_1 = (0, -\sqrt{5})$ e $F_2 = (0, \sqrt{5})$ e **vértices** $A_1 = (0, -\sqrt{2})$ e $A_2 = (0, \sqrt{2})$.

d) **Focos em** $F_1 = (-\sqrt{7}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{7}, 0)$ e **vértices** $A_1 = (0, -\sqrt{3})$ e $A_2 = (0, \sqrt{3})$.

Exercício 19. Dada a equação da hipérbole, diga a qual eixo o eixo real é paralelo, e identifique os focos, o centro, os vértices e a excentricidade da hipérbole:

a) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$.

b) $\frac{(x-3)^2}{100} - \frac{(y-4)^2}{64} = 1$.

c) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 4$.

d) $10(y - \sqrt{3})^2 - 40(x - \sqrt{10})^2 = 360$.

Exercício 20. Determine o centro, a distância focal, o comprimento do eixo real, e a equação da hipérbole com:

- a) Focos em $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$ e vértices $A_1 = (-2, 0)$ e $A_2 = (2, 0)$.
- b) Focos em $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$ e vértices $A_1 = (-2, 0)$ e $A_2 = (2, 0)$.
- c) Focos em $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$ e vértices $A_1 = (-2, 0)$ e $A_2 = (2, 0)$.
- d) Focos em $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$ e vértices $A_1 = (-2, 0)$ e $A_2 = (2, 0)$.

Exercício 21. Para cada hipérbole do exercício anterior, determine as assíntotas e esboce o seu gráfico.

Exercício 22. Como já vimos, *uma hipérbole equilátera é uma hipérbole na qual $a = b$* . Qual a excentricidade de uma hipérbole equilátera?

Exercício 23. Prove que se o ponto (x_0, y_0) satisfaz a equação da hipérbole, então os pontos $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, e $(-x_0, -y_0)$ também a satisfazem. Portanto, a hipérbole é simétrica em relação aos eixos coordenados e em relação à origem.

Referências Bibliográficas

- [1] GIOVANNI José Ruy; BONJORNO José Roberto. *Matemática 2^o grau*, FTD.
- [2] CAMARGO, Ivan de, BOULOS, Paulo; *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*, terceira edição, Ed. Pearson-Prentice Hall, 2005.
- [3] RIGHETTO, Armando; *Vetores e Geometria Analítica*, quinta edição, Ed. Ivan Rossi, 1978.
- [4] VENTURI, Jacir J. ; *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*. Disponível online em: <http://www.geometriaanalitica.com.br/> (acessado em 30/06/2015).
- [5] HALLIDAY, David, RESNICK, Robert, KRANE, Kenneth; *Física 2*, quinta edição, Ed. LTC, 2006.
- [6] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. *Matemática Ciência e Aplicações - 3^o ano E.M.* Ed. Saraiva, 2010.